

УДК 517.53

## О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ПО ОБОБЩЕННЫМ ПОЛИНОМАМ ФАБЕРА

М.А.ТАГИЕВА

*Бакинский Государственный Университет*  
*mtagiyeva@mail.ru*

*В работе установлены оценки приближения с помощью обобщенных полиномов, которые получаются различными методами суммирования ряда по обобщенным полиномам Фабера, для функции, обобщенной аналитической в односвязной области и непрерывной в ее замыкании.*

**Ключевые слова:** обобщенные аналитические функции, обобщенные полиномы Фабера, кривая Альпера, суммирование ряда.

В теории рядов Фурье суммы Фейера, Валле-Пуссена, Бернштейна-Рогозинского, Джексона представляют собой один из известных аппаратов приближения  $2\pi$ -периодических функций вещественного переменного. Если применить эти теоремы к функции  $\varphi(\theta) = f(\rho e^{i\theta})$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , и принять во внимание то обстоятельство, что ряд Фурье функции  $\varphi(\theta)$  совпадает с рядом Тейлора функции  $f(z)$ , голоморфной в круге  $\{|z| < \rho\}$  и непрерывной в  $\{|z| \leq \rho\}$ , то получаются аналогичные теоремы о приближении функции  $f(z)$  в круге  $\{|z| \leq \rho\}$  суммами вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k^{(n)} z^k,$$

которые при определенном выборе множителей  $\lambda_k^{(n)}$  дают указанные выше суммы.

В работе [1] получены аналоги методов суммирования ряда Фурье на случай ряда по полиномам Фабера для голоморфной в односвязной области  $G$  и непрерывной в  $\overline{G}$  функции, и приведены соответствующие оценки приближения.

В данной статье установлены аналогичные оценки приближения обобщенной аналитической в области  $G$  функции  $W(z)$  обобщенными полиномами определенного вида, доставляемыми разложением функции  $W(z)$  в ряд по обобщенным полиномам Фабера при применении к нему различных методов суммирования.

В дальнейшем  $G$  – конечная односвязная область, ограниченная кривой Альпера  $\Gamma[1]$ ,  $D = \overline{C}/\overline{G}$ ,  $\eta = \Phi(z)$  – функция, конформно и однолистно отображающая область  $D$  на область  $\{|\eta| > 1\}$  при условиях  $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(\infty) > 0; z = \psi(\eta)$  – обратная к ней функция;  $W(z)$  – функция, обобщенная аналитическая (о.а) в области  $G$  и непрерывная в  $\overline{G}$  [2].

Рассмотрим бесконечную нижнюю треугольную матрицу чисел

$$\begin{aligned} & \lambda_0^{(0)}, \\ & \lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \\ & \lambda_0^{(2)}, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \\ & \dots\dots\dots \\ & \lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{1}$$

В качестве аппарата приближения рассмотрим суммы

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} c_{2k} \Phi_{2k}(z, G) + \lambda_k^{(n)} \Phi_{2k+1}(z, G),$$

где  $\lambda_k^{(n)}$  числа из строки с номером  $n$  матрицы (1), используемые как коэффициенты суммирования,  $a_k = c_{2k} + ic_{2k+1}$  – коэффициенты Фабера функции  $W(z)$  для области  $G$ ,  $\Phi_{2k}(z, G), \Phi_{2k+1}(z, G)$  – обобщенные полиномы Фабера для области  $G$  [3.]

В [4] получено представление функции  $W(z)$  на границе  $\Gamma$  области  $G$  через граничные значения функции  $\varphi(t)$ , голоморфной в  $\{|t| < 1\}$  и непрерывной в  $\{|t| \leq 1\}$ . Это представление имеет вид:

$$\begin{aligned} W(\zeta) - \sum_{k=0}^n c_{2k} \Phi_{2k}(\zeta, G) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(\zeta, G) &= \varphi(\eta) - \sum_{k=0}^n a_k \eta^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|t|=1\}} F_1(\eta, t) \left( \varphi(t) - \sum_{k=0}^n a_k t^k \right) dt + \\ &+ F_2(\eta, t) \overline{\left( \varphi(t) - \sum_{k=0}^n a_k t^k \right)} dt, \\ &|\eta| = 1, \zeta \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2}$$

В равенстве (2)  $\varphi(t)$  определяется по функции  $W(z)$  следующим образом:

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=1} \frac{f(\psi(t))dt}{t-\eta}, \quad |\eta| < 1, \quad (3)$$

где

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{W(\xi)d\xi}{\xi-z}, \quad z \in G. \quad (4)$$

Функция  $f(z)$  голоморфна в области  $G$  и непрерывна в замкнутой области  $\bar{G}$  [2].

Используя (2), представим разность

$$W(\zeta) - \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} c_{2k} \Phi_{2k}(\zeta, G) + \lambda_k^{(n)} \Phi_{2k+1} c_{2k+1}(\zeta, G)$$

для  $\zeta = \psi(\eta)$ ,  $|\eta| = 1$  в виде

$$\begin{aligned} W(\zeta) - \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} c_{2k} \Phi_{2k}(\zeta, G) + \lambda_k^{(n)} c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(\zeta, G) &= \varphi(\eta) - \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} a_k \eta^k + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} F_1(\eta, t)(\varphi(t) - \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} a_k t^k) dt - F_2(\eta, t)(\varphi(t) - \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(n)} a_k t^k) \bar{dt} \end{aligned} \quad (5)$$

Положим

$$\tilde{\lambda}_k^{(n)} = \frac{3b_k^{(n)}}{2n(2n^2 + 1)}, \quad k=0, 1, 2, \dots, 2n-2,$$

где  $b_k^{(n)}$  коэффициенты разложения функции

$$\left( \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4 = \sum_{k=0}^{2n-2} b_k^{(n)} \cos kt.$$

Полагая в (2)

$$\lambda_k^{(n)} = \tilde{\lambda}_k^{(n)},$$

получим аналог сумм Джексона для рядов по обобщенным полиномам Фабера

$$\tilde{D}_n(z, W) = \sum_{k=0}^n \tilde{\lambda}_k^{(n)} c_{2k} \Phi_{2k}(z, G) + \tilde{\lambda}_k^{(n)} c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, G). \quad (6)$$

В этом случае равенство (5) приводиться к виду

$$W(z) - \tilde{D}_N(z, W) = \varphi(\eta) - D_n(\eta, \varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\{|t|=1\}} F_1(\eta, t)(\varphi(t) - D_n(t, \varphi)) dt - F_2(\eta, t) \overline{(\varphi(t) - D_n(t, \varphi))} dt,$$

(где  $D_n(t, \varphi)$  - суммы Джексона для функции  $\varphi(\eta)$  [1].

Справедлива

**Теорема 1.** Если граница  $\Gamma$  области  $G$  удовлетворяет условию Альпера, то для уклонения сумм (6) от функции  $W(z)$ , обобщенной аналитической в области  $G$  и непрерывной в  $\bar{G}$ , имеет место неравенство

$$|W(z) - \tilde{D}_n(z, W)| \leq c\omega(1/n, f), \quad z \in \bar{G}. \quad (8)$$

**Доказательство.** Неравенство Джексона для функции  $\varphi(\eta)$ , голоморфной в  $\{|t| < 1\}$  и непрерывной в  $\{|\eta| \leq 1\}$  имеет вид [1]:

$$|\varphi(\eta) - D_n(z, \varphi)| \leq c\omega(1/n, f), \quad |\eta| \leq 1. \quad (9)$$

Модули непрерывности функций  $\varphi$  и  $f$  связаны неравенством [1]

$$\omega(\delta, \varphi) \leq c\omega(\delta, f), \quad (10)$$

где  $\omega(\delta, \varphi)$  - модуль непрерывности функции  $\varphi(\eta)$  в замкнутом круге  $\{|\eta| < 1\}$ , а  $\omega(\delta, f)$  - модуль непрерывности функции  $f$  в замкнутой области  $\bar{G}$ . Тогда из формулы (7), с помощью оценок (9) и (10), находим неравенство (8). Теорема доказана.

**Следствие.** При условиях теоремы 1 для наилучшего равномерного приближения  $E_n(W, \bar{G})$  функции  $W(z)$  в замкнутой области  $\bar{G}$  обобщенными полиномами Фабера порядка не выше  $n$  справедливо неравенство

$$E_n(W, \bar{G}) \leq c\omega(1/n, f).$$

**Теорема 2.** Пусть граница  $\Gamma$  области  $G$  удовлетворяет условию Альпера, а о.а. в области  $G$  функция  $W(z)$  в замкнутой области  $\bar{G}$  удовлетворяет условию Липшица

$$|W(\zeta) - W(z)| \leq M |\zeta - z|^\alpha, \quad z, \zeta \in \bar{G}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (11)$$

Тогда справедливы неравенства

$$|W(z) - \tilde{D}_n(z, W)| \leq cM/n^\alpha, \quad z \in \bar{G}, \quad (12)$$

$$E_n(W, \bar{G}) \leq cM/n^\alpha. \quad (13)$$

**Доказательство.** Из условия (11) следует, что функция  $\varphi(z)$ , определенная равенством (3), также удовлетворяет условию (11) [1]. Тогда неравенство (9) примет вид

$$|\varphi(\eta) - D_n(\eta, \varphi)| \leq \frac{c}{n^\alpha}, \quad |\eta| \leq 1. \quad (14)$$

Учитывая (14), из формулы (5) находим оценки (12) и (13). Теорема доказана.

Выбирая множители суммирования

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}, \lambda_k^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}, \lambda_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{2n+1},$$

получим соответственно аналоги сумм Фейера, Валле-Пуссена, Бернштейна-Рогозинского. При каждом из указанных типов множителей можно дать определенные оценки приближения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Суетин П.К. Ряды по многочленам Фабера. М.: Наука, 1984, 336 с.
2. Векуа В.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988, 512 с.
3. Тагиева М.А. Обобщенный оператор Фабера в пространстве голоморфных функций // Вестник БГУ, сер. физ.- мат. наук, 2010, №4, с.58-64.
4. Тагиева М.А. О разложении обобщенных аналитических функций в ряд по обобщенным полиномам Фабера в замкнутой области // Вестник БГУ, сер. физ.- мат. наук, 2011, №4.

### ÜMUMİLƏŞMİŞ FABER POLİNOMLARINA GÖRƏ SIRALARIN CƏMLƏNMƏSİ HAQQINDA

M.A.TAĞIYEVA

#### XÜLASƏ

Bu məqalədə  $G$  oblastında ümumiləşmiş analitik ( $\bar{u}, a$ )  $W(z)$  funksiyasının həmin oblastda ümumiləşmiş Faber polinomlarına nəzərən sıraya ayrılışı üçün kafi şərtlər verilmişdir.

**Açar sözlər:** ümumiləşmiş analitik funksiyaları, ümumiləşmiş Faber polinomları, Alper əyrisi, sıraların cəmlənməsi.

### ABOUT SUMMATION OF A SERIES BY FABER'S GENERALIZED POLYNOMIALS

M.A.TAGIYEVA

#### SUMMARY

The paper presents estimations of approaches by means of the generalized polynomials, which turn out various methods of summation of a series by Faber's generalized polynomial for the generalized analytical function in a simply connected domain and continuous in its closure.

**Key words:** generalized analytical functions, Faber's generalized polynomials, Alper's curve, various methods of summation of a series.

*Принято в редакцию: 06.12.2012 г.*

*Подписано к печати: 12.12.2012 г.*