RİYAZİYYAT

УДК 517.95

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМ ГУРСА-ДАРБУ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

М.Ф.МЕХТИЕВ, А.Р.САФАРИ, Я.А.ШАРИФОВ
Бакинский Государственный Университет
sharifov22@rambler.ru

В работе рассматривается задача оптимального управления для системы Гурса-Дарбу с интегральными краевыми условиями. На основе формулы приращения функционала найден явный вид формул для градиента функционала и используя формулу градиента, расписан алгоритм метода условного градиента.

Ключевые слова: системы Гурса-Дарбу, интегральные краевые условия, оптимальное управление, градиент функционала.

В последние годы интенсивно исследуются дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями. Заметим, что нелокальными задачами принято называть такие задачи, в которых вместо классических краевых условий для дифференциальных уравнений в частных производных задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри нее. Часто роль таких соотношений выполняют условия, содержащие интегралы от искомого решения.

В книгах [1,2] рассмотрены многочисленные примеры из биологии, социологии, сельского хозяйства, математические модели описываются гиперболическими уравнениями с нелокальными условиями. В работе [3] рассмотрена линейная гиперболическая система с интегральными и многоточечными краевыми условиями и доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач, а также приведены конкретные процессы, математические модели которых описываются именно такими задачами. В работе [5] рассмотрено одномерное нелинейное гиперболическое дифференциальное уравнение с интегральными условиями. Краевые условия заданы на характеристиках уравнения. Доказано существование и единственности классического решения рассмотренной задачи. В работах [6-11] рассмотрены линейные и квазилинейные гиперболические уравнения с интегральными условиями и доказаны теоремы о существовании и единственности классических решений. Таким образом, из выше отмеченного следует, что потребность в гиперболических уравнениях с нелокальными краевыми условиями возникает в различных областях науки, техники и экономики. Поэтому возникает вопрос об оптимальном управлении такими процессами.

Задачи оптимального управления с различными нелокальными условиями изучены сравнительно мало. Различные задачи оптимального управления для гиперболических систем с различными нелокальными условиями рассмотрены в работах [15-19].

В данной работе рассмотрена нелинейная система гиперболических уравнений на ограниченном прямоугольнике. Граничные условия заданы на характеристиках гиперболической системы с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Для однозначной разрешимости дифференциальных уравнений на одной из характеристик заданы интегральные условия. Управляющие параметры входят в правую часть гиперболической системы и в граничные условия. Вычислена формула градиента функционала и на основе градиента функционала получены необходимые условия оптимальности и расписан алгоритм численного решения.

Постановка задачи. Пусть некоторый управляемый объект описывается системой гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 y(t,s)}{\partial t \partial s} = f\left(t, s, y(t,s), \frac{\partial y(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial y(t,s)}{\partial s}, u(t,s)\right), \text{ п. в. } (t,s) \in Q, \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$\frac{\partial y(t,0)}{\partial t} = \varphi(t, y(t,0), v(t)), \text{ п. в. } t \in [0,T], \quad (2)$$

$$\frac{\partial y(0,s)}{\partial s} = \psi(s, y(0,s), \omega(s)), \text{ п. в. } s \in [0,l], \quad (3)$$

$$y(0,0) + \int_0^T n(t) y(t,0) dt = c, \quad (4)$$

где $Q = \{(t,s): 0 \le t \le T, 0 \le s \le l\}$ – заданный прямоугольник, $T, l > 0$ заданные числа; $y = (y_1, y_2, .., y_n)$–состояние системы; $u = (u_1, u_2, .., u_r)$, $v = (v_1, v_2, .., v_m)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, .., \omega_q)$–управляющие параметры; $\frac{\partial y(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial y(t,s)}{\partial s}, \frac{\partial^2 y(t,s)}{\partial t \partial s}$ – обобщенные производные функции $y = y(t,s)$ по Соболеву; $f = (f_1, f_2, .., f_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_n)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, .., \psi_n)$ - заданные вектор функции; $n(t) - n \times n$ - мерная матрица-функция, $c \in R^n$ - заданный постоянный вектор.

Предполагается, что управления $w = w(t,s) = (u(t,s), v(t), \omega(s))$ выбирают из множества

$$W = U \times V \times \Omega, \tag{5}$$

где $U \subseteq L_2^r(Q)$, $V \subseteq L_2^m([0,T])$, $\Omega \subseteq L_2^q([0,l])$.

Здесь использованы следующие обозначения: $R^n - n$-мерное евклидово пространство, $L_2^r(A)$ – пространство r – мерных вектор функций, измеримых и квадратично-суммируемых по Лебегу на множестве A.

Определение. *Под решением задачи (1)-(4), соответствующему управлению* $w \in W$, *понимается вектор-функция* $y = y(t,s;w) \in H_2^{1,n}(Q)$, *обладающая обобщенной производной по Соболеву* $\frac{\partial^2 y(t,s)}{\partial t \partial s} \in L_2^n(Q)$ *и удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1) и условиям (2), (3) почти всюду, а условию (4) в классическом смысле.*

Здесь $H_2^{1,n}(Q)$- пространство Соболева n- мерных вектор-функций (в дальнейшем будем опускать значки, указывающие размерность вектор-функций), квадратично-суммируемых по Лебегу на Q вместе со своими первыми обобщенными производными, т. е. $y(t,s), \frac{\partial y(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial y(t,s)}{\partial s} \in L_2(Q)$.

Отметим, что из данного определения решение начально-краевой задачи (1)-(4) следует, что данное обобщенное решение также принадлежит пространству $C^n(Q)$. (Через $C^n(Q)$ обозначено пространство n- мерных вектор-функций непрерывных на прямоугольнике Q).

Задача оптимального управления ставится следующим образом: среди управлений $w = w(t,s) \in W$ требуется найти такое, чтобы минимизировать функционал

$$J(w) = \iint_Q F\left(t, s, y(t,s), \frac{\partial y(t,s)}{\partial t}, \frac{\partial y(t,s)}{\partial s}, u(t,s)\right) dtds + \sum_{i=1}^{k} \Phi(y(t_i, s_i)), \tag{6}$$

где $F(t,s,y,p,q,u)$ и $\Phi(y)$ скалярные функции; (t_i, s_i), $i = \overline{1,k}$ - произвольный набор точек из прямоугольника Q; k – фиксированное натуральное число.

Условие (4) оправдывается тем, что при моделировании конкретного процесса невозможно измерять некоторые характеристики (состояния) в характерной точке, а известно некоторое среднее (интегральное) значение характеристики [5].

Сделаем следующие предположения относительно заданных функций.

I).Пусть функции $f(t,s,y,p,q,u)$ и $F(t,s,y,p,q,u)$ для почти всех $(t,s) \in Q$ непрерывны по переменным $(y,p,q,u) \in R^{3n} \times R^r$, а при каждом фиксированном $(y,p,q,u) \in R^{3n} \times R^r$, измеримы по $(t,s) \in Q$;

II).Предполагается, что функция $f(t,s,y,p,q,u)$ для почти всех $(t,s) \in Q$ и для любого $(y,p,q,u) \in R^{3n} \times R^r$ имеет непрерывные производные по $(y,p,q) \in R^{3n}$. При этом имеют место:

$$f\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_2(Q);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_\infty(Q);$$

$$\frac{\partial f}{\partial p}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_\infty(Q);$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_\infty(Q).$$

III).Пусть для функции $f(t,s,y,p,q,u)$ имеет место $f(t,s,0,0,0,0)\in L_2(Q)$;

IV).Функция $f(t,s,y,p,q,u)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $(y,p,q,u)\in R^{3n}$, т.е.

$$\left|f(t,s,y,p,q,u)-f(t,s,\bar y,\bar p,\bar q,\bar u)\right|\le k(|y-\bar y|+|p-\bar p|+|q-\bar q|+|u-\bar u|),$$

для всех $(y,p,q,u),(\bar y,\bar p,\bar q,\bar u)\in R^{3n}\times R^r$;

V).Функция $\varphi(t,y,v)$ для почти всех $t\in[0,T]$ непрерывна по $(y,v)\in R^n\times R^m$ и измерима по $t\in[0,T]$ при каждом фиксированном $(y,v)\in R^n\times R^r$;

VI).Функция $\varphi(t,y,v)$ для почти всех $t\in[0,T]$ и для любого $(y,v)\in R^n\times R^r$ имеет непрерывные производные по y и при этом

$$\varphi(\cdot,y(t,0),v(t)):C([0,T])\times V\to L_2([0,T]),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\cdot,y(t,0),v(t)):C([0,T])\times V\to L_\infty([0,T]);$$

VII). Пусть для функции $\varphi(t,y,v)$ имеет место $\varphi(t,0,0)\in L_2([0,T])$;

VIII).Функция $\varphi(t,y,v)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $(y,v)\in R^n\times R^m$, т.е. $|\varphi(t,y,v)-\varphi(t,\bar y,\bar v)|\le L(|y-\bar y|+|v-\bar v|)$, для всех (t,y,v) и $(t,\bar y,\bar v)\in[0,T]\times R^n\times R^m$;

IX). Пусть функция $\psi(s,y,\omega)$ для почти всех $s\in[0,l]$ непрерывна по $(y,\omega)\in R^n\times R^q$;

X).Функция $\psi(s,y,\omega)$ для почти всех $s\in[0,l]$ и для любого $(y,\omega)\in R^n\times R^q$ имеет непрерывные производные по y и при этом

$$\psi(\cdot,y(0,s),\omega(s)):C([0,l])\times\Omega\to L_2([0,l]),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(\cdot,y(0,s),\omega(s)):C([0,l])\times\Omega\to L_\infty([0,l]);$$

XI). Пусть $\psi(s,0,0)\in L_2([0,l])$;

XII).Функция $\psi(s,y,\omega)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $(y,\omega)\in R^n\times R^q$, т.е. $|\psi(s,y,\omega)-\psi(s,\bar y,\bar\omega)|\le N(|y-\bar y|+|\omega-\bar\omega|)$, для всех (s,y,ω) и $(s,\bar y,\bar\omega)\in[0,l]\times R^n\times R^q$;

XIII). $n(t)$ матрица функция порядка $n\times n$ и $n_{ij}(t)\in L_\infty([0,T])$,

$i,j=\overline{1,n}$, причем $\left\|\int_0^T n(t)dt\right\|<1$. Очевидно, при этом $\tilde{n}(T)=E+\int_0^T n(t)dt$ невырожденная матрица и, кроме того,

$$LT\left(1+\left\|\tilde{n}^{-1}(T)\right\|\cdot\left|n(t)\right|_{L_\infty}\frac{T}{2}\right)<1;$$

XIV). Функция $\Phi(y)$ для любого $y\in R^n$ имеет непрерывные производные;

XV). Пусть скалярная функция $F(t,s,y,p,q,u)$ для почти всех $(t,s)\in Q$ и для любого $(y,p,q,u)\in R^{3n}\times R^r$ непрерывна по $y,p,q,u\in R^{3n}\times R^r$, а при фиксированном $y,p,q,u\in R^{3n}\times R^r$ имеет непрерывные производные по (y,p,q,u) и

$$F\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_1(Q);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_2(Q);$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_2(Q);$$

$$\frac{\partial F}{\partial q}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_2(Q);$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\cdot,\cdot,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right):H_2^1(Q)\times U\to L_2(Q).$$

Формула приращения функционала. Пусть $w=(v,\omega,u)$ и $w+\overline{w}=(v+\overline{v},\omega+\overline{\omega},u+\overline{u})$ два допустимых управления, т.е. w и $w+\overline{w}\in W=V\times\Omega\times U$. Решение задачи (1)-(4), соответствующее этим управлениям обозначим через $y(t,s)=y(t,s;w)$ и $y(t,s)+\overline{y}(t,s)==y(t,s;w+\overline{w})$.Тогда согласно (6) для приращения функционала получается следующая формула:

$$J(w+\overline{w})-J(w)=\sum_{i=1}^{k}\left[\Phi\left(y(t_i,s_i)+\overline{y}(t_i,s_i)\right)-\Phi\left(y(t_i,s_i)\right)\right]+$$

$$+\iint_Q\left[F\left(t,s,y(t,s)+\overline{y}(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t}+\frac{\partial\overline{y}(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s}+\frac{\partial\overline{y}(t,s)}{\partial s},u(t,s)+\overline{u}(t,s)\right)-\right.$$

$$\left.-F\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right)\right]dtds, \qquad (7)$$

где $\overline{y}(t,s)$ является решением следующей системы:

$$\frac{\partial^2\overline{y}(t,s)}{\partial t\partial s}=f\left(t,s,y(t,s)+\overline{y}(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t}+\frac{\partial\overline{y}(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s}+\frac{\partial\overline{y}(t,s)}{\partial s},u(t,s)+\overline{u}(t,s)\right)-$$

$$-f\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial y(t,s)}{\partial s},u(t,s)\right),\ \text{п. в. }(t,s)\in Q \qquad (8)$$

с начально-краевыми условиями

$$\frac{\partial\overline{y}(t,0)}{\partial t}=\varphi\left(t,y(t,0)+\overline{y}(t,0),v(t)+\overline{v}(t)\right)-\varphi\left(t,y(t,0),v(t)\right),\ \text{п. в. }t\in[0,T], \qquad (9)$$

$$\frac{\partial\overline{y}(0,s)}{\partial s}=\psi\left(s,y(0,s)+\overline{y}(0,s),\omega(s)-\overline{\omega}(s)\right)-\psi\left(s,y(0,s),\omega(s)\right),\ \text{п. в. } s\in[0,l]\ , \tag{10}$$

$$y(0,0)+\int_0^T n(t)\overline{y}(t,0)dt=0. \tag{11}$$

Для дальнейшего упрощения математических формул введем обозначения:

$$\tilde{H}(t,s)=H\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),\psi(t,s),u(t,s)\right),$$

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(t,s)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(t,s,y(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s),u(t,s)\right)\ \text{и т.д.}$$

Введем систему уравнений в вариациях:

$$\frac{\partial^2 z(t,s)}{\partial t\partial s}=\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y}(t,s)z(t,s)+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial p}(t,s)\frac{\partial z}{\partial t}(t,s)+$$

$$+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial q}(t,s)\frac{\partial z}{\partial s}(t,s)+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial q}(t,s)\overline{u}(t,s),\ \text{п. в. } (t,s)\in Q, \tag{12}$$

$$\frac{\partial z(t,0)}{\partial t}=\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}(t)z(t)+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial v}(t)\overline{v}(t),\quad \text{п. в. } t\in[0,T]\ , \tag{13}$$

$$\frac{\partial z(0,s)}{\partial s}=\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}(s)z(s)+\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\omega}(s)\overline{\omega}(s),\ \text{п. в. } s\in[0,l]\ , \tag{14}$$

$$z(0,0)+\int_0^T n(t)z(t,0)dt=0. \tag{15}$$

С помощью решений системы вариационных уравнений (12)-(15) формулу приращения функционала (7) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$J(w+\overline{w})-J(w)=\sum_{i=1}^{k}\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial y}\left(y(t_i,s_i),z(t_i,s_i)\right)\right\rangle+\iint_Q\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y}(t,s),z(t,s)\right\rangle dtds+$$

$$+\iint_Q\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial p}(t,s),\frac{\partial z}{\partial t}(t,s)\right\rangle dtds+\iint_Q\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial q}(t,s),\frac{\partial z}{\partial s}(t,s)\right\rangle dtds+$$

$$+\iint_Q\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial u}(t,s),\overline{u}(t,s)\right\rangle dtds+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left[\Phi\left(y(t_i,s_i)+\overline{y}(t_i,s_i)\right)-\Phi\left(y(t_i,s_i)\right)-\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial y}\left(y(t_i,s_i),\overline{y}(t_i,s_i)\right)\right\rangle\right]+$$

$$+\iint_Q\Bigg[\ F\left(t,s,y(t,s)+\overline{y}(t,s),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s)+\frac{\partial\overline{y}}{\partial t}(t,s),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s)+\frac{\partial\overline{y}}{\partial s}(t,s),u(t,s)+\overline{u}(t,s)\right)-$$

$$-\tilde{F}(t,s)-\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial y}(t,s),\overline{y}(t,s)\right\rangle-\left\langle\frac{\partial\tilde{F}}{\partial p}(t,s),\frac{\partial\overline{y}}{\partial t}(t,s)\right\rangle-$$

$$-\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q}(t,s), \frac{\partial \bar{y}}{\partial s}(t,s) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(t,s), \bar{u}(t,s) \right\rangle \Bigg] dtds + \tag{16}$$

$$+\sum_{i=1}^{k} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y(t_i,s_i)), \bar{y}(t_i,s_i) - z(t_i,s_i) \right\rangle + \iint_Q \Bigg[\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(t,s), \bar{y}(t,s) - z(t,s) \right\rangle +$$

$$+\left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial p}(t,s), \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial z}{\partial t}(t,s) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q}(t,s), \frac{\partial \bar{y}}{\partial s}(t,s) - \frac{\partial z}{\partial s}(t,s) \right\rangle \Bigg] dtds.$$

Равенство (12) умножим скалярно на функцию $\psi(t,s)$, (13) скалярно умножим на $\mu(t)$, (14) умножим скалярно на $\eta(s)$, а (15) умножим на постоянный вектор λ и полученные равенства, соответственно, интегрируем на прямоугольнике Q и отрезках $[0,T]$ и $[0,l]$, и полученные сложим с (16) и введем систему сопряженных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y(t_i,s_i)) - \iint_Q \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}(t,s)dtds -$$
$$-\int_0^T \frac{\partial}{\partial y}\tilde{H}^1(t)dt - \int_0^l \frac{\partial}{\partial y}\tilde{H}^2(s)ds + (\tilde{n}(T))'\lambda = 0, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}\chi(t-t_i)\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y(t_i,s_i)) - \int_0^l \int_t^T \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}(\tau,s)d\tau ds -$$
$$-\int_0^l \frac{\partial}{\partial p}\tilde{H}(t,s)ds - \int_t^T \frac{\partial}{\partial y}\tilde{H}^1(\tau)d\tau + \left(\int_t^T n(\tau)d\tau\right)'\lambda + \mu(t) = 0, \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}\chi(s-s_i)\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y(t_i,s_i)) - \int_0^T \int_s^l \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}(t,r)dr$$
$$-\int_0^T \frac{\partial}{\partial q}\tilde{H}(t,s)dt - \int_s^l \frac{\partial}{\partial y}\tilde{H}^2(r)dr + \eta(s) = 0, \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}\chi(t-t_i)\chi(s-s_i)\frac{\partial \Phi}{\partial y}(y(t_i,s_i)) -$$
$$-\int_t^T \int_s^l \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}(\tau,r)d\tau dr - \int_s^l \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p}(t,r)dr - \int_t^T \frac{\partial}{\partial q}\tilde{H}(\tau,s)d\tau + \psi(t,s) = 0, \tag{20}$$

где

$$\tilde{H}(t,s) = \left\langle \psi(t,s), \tilde{f}(t,s) \right\rangle - \tilde{F}(t,s),$$
$$\tilde{H}^1(t) = \langle \mu(t), \tilde{\varphi}(t) \rangle, \quad \tilde{H}^2(s) = \langle \eta(s), \tilde{\psi}(s) \rangle.$$

$\chi(t)$ -функция Хевисайда, E - единичная матрица.

В результате имеем следующее равенство:

$$J(w+\bar{w}) - J(w) = -\iint_Q \left\langle \frac{\partial}{\partial u}\tilde{H}(t,s), \bar{u}(t,s) \right\rangle dtds -$$

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial v}\tilde{H}^1(t), \bar{v}(t)\right\rangle dt - \int_0^l \left\langle \frac{\partial}{\partial \omega}\tilde{H}^2(s), \overline{\omega}(s)\right\rangle ds + R \ , \qquad (21)$$

где R - остаточная формула приращения функционала, определяется равенством

$$R = \sum_{i=1}^{k}\Bigg[\ \Phi\big(y(t_i, s_i) + \bar{y}(t_i, s_i)\big) - \Phi\big(y(t_i, s_i)\big) -$$
$$- \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y}\big(y(t_i, s_i)\big), \bar{y}(t_i, s_i)\right\rangle \ \Bigg] + \sum_{i=1}^{k}\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y}\big(y(t_i, s_i)\big), \bar{y}(t_i, s_i) - z(t_i, s_i)\right\rangle +$$
$$+ \iint_Q \Bigg[\ F\left(t, s, y(t,s) + \bar{y}(t,s), \frac{\partial y}{\partial t}(t,s) + \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}(t,s), \frac{\partial y}{\partial s}(t,s) + \frac{\partial \bar{y}}{\partial s}(t,s), u(t,s) + \bar{u}(t,s)\right) -$$
$$- \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q}(t, s), \frac{\partial \bar{y}}{\partial s}(t, s)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u}(t, s), \bar{u}(t, s)\right\rangle \ \Bigg] dtds +$$
$$+ \iint_Q \Bigg[\ \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(t, s), \bar{y}(t, s) - z(t, s)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial p}(t, s), \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}(t, s) - \frac{\partial z}{\partial t}(t, s)\right\rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q}(t, s), \frac{\partial \bar{y}}{\partial s}(t, s) - \frac{\partial z}{\partial s}(t, s)\right\rangle \ \Bigg] dtds. \qquad (22)$$

Градиент в задаче оптимального управления. Введем следующие условия:

XVI). Пусть функция $f(t, s, y, p, q, u)$ удовлетворяет условию

$$\left| f(t, s, y + \bar{y}, p + \bar{p}, q + \bar{q}, u + \bar{u}) - \tilde{f}(t,s) - \frac{\partial f}{\partial y}(t,s)\bar{y} - \frac{\partial f}{\partial p}(t,s)\bar{p} - \frac{\partial f}{\partial q}(t,s)\bar{q} - \frac{\partial f}{\partial u}(t,s)\bar{u} \right| \le$$
$$\le \bar{k}\left(|\bar{y}|^2 + |\bar{p}|^2 + |\bar{q}|^2 + |\bar{u}|^2\right);$$

XVII). Пусть функция $\varphi(t, y, v)$ удовлетворяет условию

$$\left| \varphi(t, y + \bar{y}, v + \bar{v}) - \tilde{\varphi}(t) - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{\varphi}(t)\bar{y} - \frac{\partial}{\partial v}\tilde{\varphi}(t)\bar{v} \right| \le \bar{L}\left(|\bar{y}|^2 + |\bar{v}|^2\right);$$

XVIII). Пусть функция $\psi(s, y, \omega)$ удовлетворяет условию

$$\left| \psi(s, y + \bar{y}, \omega + \overline{\omega}) - \psi(s, y, \omega) - \frac{\partial}{\partial y}\psi(s, y, \omega)\bar{y} - \frac{\partial}{\partial \omega}\psi(s, y, \omega)\overline{\omega} \right| \le$$
$$\le \bar{N}\left(|\bar{y}|^2 + |\overline{\omega}|^2\right);$$

XIX). Пусть функция $\Phi(y)$ удовлетворяет условию

$$\left| \ \Phi(y + \bar{y}) - \Phi(y) \ - \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y), \bar{y}\right\rangle \ \right| \le \ M\left|y - \bar{y}\right|^2;$$

XX). Пусть функция $F(t, s, y, p, q, u)$ удовлетворяет условию

$$\Big|\ F(t,s,y+\overline{y},p+\overline{p},q+\overline{q},u+\overline{u})-\widetilde{F}(t,s)-$$
$$-\left\langle \frac{\partial \widetilde{F}(t,s)}{\partial y},\overline{y}\right\rangle-\left\langle \frac{\partial \widetilde{F}(t,s)}{\partial p},\overline{p}\right\rangle-\left\langle \frac{\partial \widetilde{F}(t,s)}{\partial q},\overline{q}\right\rangle-\left\langle \frac{\partial \widetilde{F}(t,s)}{\partial u},\overline{u}\right\rangle\ \Big|\le$$

$\le \overline{M}(|\overline{y}|^2+|\overline{p}|^2+|\overline{q}|^2+|\overline{u}|^2)$, для всех
$(y,v),\ (y+\overline{y},v+\overline{v})\in R^n\times R^m,\ (y,\omega),\ (y+\overline{y},\omega+\overline{\omega})\in R^n\times R^q,$
$(y,p,q,u),\ (y+\overline{y},p+\overline{p},q+\overline{q},u+\overline{u})\in R^{3n}\times R^r.$

Для вычисления градиента функционала (6) при ограничениях (1)-(5) достаточно показать, что остаточная формула функционала (21) имеет порядок $O\left(\|\overline{w}\|^2\right)$. Используя условия I)- XIII) можно доказать, что существуют неотрицательные числа $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ такие, как

$$\max_{[0,T]}\left|\overline{y}(t,0)-z(t,0)\right|\le\sigma_1\|\overline{v}\|^2, \tag{23}$$

$$\max_{[0,l]}\left|\overline{y}(0,s)-z(0,s)\right|\le\sigma_2\left(\|\overline{v}\|^2+\|\overline{\omega}\|^2\right), \tag{24}$$

$$\max_{Q}\left|\overline{y}(t,s)-z(t,s)\right|+\underset{[0,l]}{vrai}\max\int_0^T\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{y}(t,s)-z(t,s)\right)\right|dt+$$
$$+\underset{[0,T]}{vrai}\max\int_0^l\left|\frac{\partial}{\partial s}\left(\overline{y}(t,s)-z(t,s)\right)\right|ds\le\sigma_3\left[\|\overline{u}\|^2+\|\overline{v}\|^2+\|\overline{\omega}\|^2\right]. \tag{25}$$

Учитывая оценки (23)-(25) ,а также условия XIV) -XX) из (22) можно получить оценку

$$|R|\le C\|\overline{w}\|^2,$$

где C - некоторая постоянная, которая не зависит от управляющих параметров.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть выполняются условия I) -XX). Тогда функционал (6) при ограничениях (1)-(5) дифференцируем и его градиент имеет вид:*

$$J'(w)=-\left(\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial u}(t,s),\ \frac{\partial\widetilde{H}^1}{\partial v}(t),\ \frac{\partial\widetilde{H}^2}{\partial\omega}(s)\right)\in L_2^r(Q)\times L_2^m([0,T])\times L_2^q([0,l]).$$

Необходимое условие оптимальности. Имея формулы градиента для функционала (6) при ограничениях (1)-(5), можно получить необходимые условия оптимальности для задачи оптимального управления (1)-(6).

Теорема 2. *Пусть* $w_*=(u_*(t,s),v_*(t),\omega_*(s))\in W$ *оптимальное управление в задаче (1)-(6).Тогда имеет место неравенство*

$$\iint_Q\left\langle\frac{\partial H}{\partial u}\left(t,s,y(t,s;w_*),\frac{\partial y}{\partial t}(t,s;w_*),\frac{\partial y}{\partial s}(t,s;w_*),\psi(t,s;w_*),u_*(t,s)\right),\overline{u}(t,s)\right\rangle dtds+$$
$$+\int_0^T\left\langle\frac{\partial H^1}{\partial v}\left(t,y(t,0;w_*),\mu(t;w_*),v_*(t)\right),\overline{v}(t)\right\rangle dt+$$

$$+\int_0^l \left\langle \frac{\partial H}{\partial \omega}^2 \left(s, y(0,s;w_*), \eta(s;w_*), \omega_*(s)\right), \overline{\omega}(s) \right\rangle ds \le 0,$$

где $y(t,s;w_*)$ *решение краевой задачи (1)-(6) при* $w_* = (u_*, v_*, \omega_*) \in W = U \times V \times \Omega$, *а тройка* $(\psi(t,s;w_*), \mu(t;w_*), \eta(s;w_*))$ *решение сопряженной системы (17)-(20), соответствующей управлению* $w_* = (u_*, v_*, \omega_*) \in W$. *Если* $w_* \in \operatorname{int} W$, *то последнее неравенство эквивалентно*

$$\frac{\partial H}{\partial u}\left(t, s, y(t,s;w_*), \frac{\partial y}{\partial t}(t,s;w_*), \frac{\partial y}{\partial s}(t,s;w_*), \psi(t,s;w_*), u_*(t,s)\right) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial v}^1 \left(t, y(t,0;w_*), \mu(t;w_*), v_*(t)\right) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \omega}^2 \left(s, y(0,s;w_*), \eta(s;w_*), \omega_*(s)\right) = 0.$$

Доказательство проводится с помощью схемы из [19, 524].

Численный алгоритм метода условного градиента для задачи оптимального управления (1)-(5). Имея формулу градиента в задачах оптимального управления можно расписать различные численные алгоритмы для приближенного решения их решения. Так как в задачах оптимального управления обычно множество допустимых управлений принимает значения из ограниченного множество, то метод условного градиента является наиболее приемлемым методом для численного решения таких задач. К настоящему времени существуют многочисленные алгоритмы метода условного градиента для приближенные решения классических начально-краевых задач [19, 20]. Однако, при изучении задачи оптимального управления с нелокальными краевыми условиями возникает некоторые трудности. Например, требуется разработать численный алгоритм для исходной и сопряженной системы. Один из таких методов разработан в [21] и приведены численные эксперименты. Применяется метод расщепления, который заменяет граничную задачу в интегральном виде двумя задачами Коши. Первоначально метод расщепления появлялся как итеративный метод для нелинейных граничных задач. Для линейной задачи этот метод оказывается точным. Переходим к описанию алгоритма.

Шаг 0. Выберем произвольное управление $w^0 = w^0(t,s) \in W$ и положим $k = 0$.

Шаг 1. По заданным управлению $w^k = w^k(t,s) \in W$ решаем исходную и сопряженную систему и определяем $y^k = y^k(t,s)$ и $\psi^k = \psi^k(t,s)$ задачи типа (1)-(4) и (17)-(20). Решаем вспомогательную задачу

$$\left\langle J'\left(w^k\right), w^k - \overline{w^k}\right\rangle = \max_{w\in W}\left\langle J'\left(w^k\right), w - w^k\right\rangle .$$

Если при некотором k оказалось $w^k = \overline{w^k}$, то процесс прекращают, т.е. $\left\langle J'\left(w^k\right), w - w^k\right\rangle \geq 0$ при всех $w \in W$. В противном случае переходим на следующий шаг.

Шаг 2. Задаем

$$w^{k+1} = w^k + \alpha^k\left(\overline{w^k} - w^k\right), \quad 0 \leq \alpha^k \leq 1 .$$

Здесь шаг α^k может выбирается из условия

$$J\left(w^k_{\alpha^k}\right) = \min_{\alpha\in[0,1]} J\left(w^k + \alpha\left(\overline{w^k} - w^k\right)\right).$$

Вычисляем $w^{k+1} = w^k_{\alpha^k}$, полагаем $k = k+1$ и переходим на шаг 1.

ЛИТЕРАТУРА

1.Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006, 287с.

2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995, 305 с.

3.Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения, 1986, т. 22, №1, с. 171-174.

4.Жестков С.В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // Укр. мат. журн., 1990, т. 42, №1, с. 132-135.

5.Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, 2004, т.40, №7, с. 887-892.

6.Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифф. урав., 2000, № 2, с. 279-280.

7.Пулькина Л.С., Кечина О.М. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. 2009, №2(68), с. 80-88.

8.Голубева Н.Д., Пулькина Л.С. Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями // Мат. заметки, 1996, т.59, №3,с. 456-458.

9.Pulkina L.S. A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations, Electron. J. Differential Equations 1999 (1999), № 45, 1-6.

10. Beilin S.A. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with non-local conditions, Electron. J. Differential Equations 2001 (2001), №76, 1-8.

11. Mesloub S., Bouziani A. On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, Int. J. Math. Math. Sci. 22 (1999), №3, 511-519.

12. Bouziani A. Initial-boundary value problem with a nonlocal condition for a viscosity equation, Int. J. Math. Math. Sci. 30 (2002), № 6, 327-338.

13. Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition, Int. J. Math. Sci. 31(2002), № 4, 202-213.

14. Ибиев Ф.Т., Шарифов Я.А. Об одной задаче оптимального управления для систем Гурса с интегральными условиями // «Известия» НАН Азербайджана, серия физико-математических и технических наук, т. XXIV, №2, 2005, с. 83-85.

15. Ибиев Ф.Т., Шарифов Я.А. Необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления системами Гурса с интегральными условиями // Вестник Бакинского Университета №3, 2004, с. 13-20.

16. Ibiev F.T., Sharifov Ya.A. Necessary conditions for optimality in problems of optimal

control by the Goursat systems with multipoint boundary conditions //Transactions issue, Mathematics and Mechanics, series of physical-technical and mathematical sciences, 2004, V. XXIV, №7, pp.227-234.
17. Шарифов Я.А., Ширинов Т.В. Градиент в задаче оптимального управления для гиперболических систем с нелокальными условиями // «Известия» НАН Азербайджана, серия физико-математических и технических наук, т. XXV, №2, 2005, с. 111-116.
18. Ширинов Т.В., Мехтиев М.Ф., Шарифов Я.А. Об условиях оптимальности в задаче оптимального управления для гиперболических систем с нелокальными условиями // Доклады НАН Азербайджана, т. LXI, №2, 2005, с. 22-29.
19. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002, 823 с.
20. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложении. Часть 2. Оптимальное управление. Новосибирск: Наука, 1990, с.287.
21. Ширинов Т.В., Шарифов Я.А. Численный метод решения систем гиперболических уравнений с интегральными условиями. // Вестник Бакинского Университета №1, 2006, с. 33-40.

İNTEQRAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİNİN OPTİMAL İDARƏEDİLMƏSİ MƏSƏLƏSİNİN ƏDƏDİ HƏLL ALQORİTMİ

M.F.MEHDİYEV, Ə.R.SƏFƏRİ, Y.Ə.ŞƏRİFOV

XÜLASƏ

İşdə inteqral sərhəd şərtli Qursa-Darbu sistemlərinin optimal idarəedilməsi məsələsinə baxılmışdır. Funksionalın artımı əsasında onun qradienti üçün aşkar formula tapılmışdır və bu formula əsasında şərti qradient üsulunun alqoritmi verilmişdir.

Açar sözlər: Qursa-Darbu sistemləri, inteqral sərhəd şərtləri, optimal idarəetmə, funksionalın qradienti.

ALGORITHM TO THE NUMERICAL SOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR GOURSAT-DARBOUX SYSTEM WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS

M.F.MEHDIYEV, A.R.SAFARI, Y.A.SHARIFOV

SUMMARY

The paper studies optimal control problems for the Goursat-Darboux systems with integral boundary conditions. An explicit formula is obtained for the gradient of the functional, using its increment. An algorithm is developed similarly to the conditional method on the base of this formula.

Key words: Goursat-Darboux systems, integral boundary conditions, optimal control, gradient of functional.

Принято в редакцию: 05.12.2012 г.
Подписано к печати: 12.12.2012 г.