УДК 517.956

НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА СЛАБОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С.Т.ГУСЕЙНОВ
ИММ НАН Азербайджана,
Бакинский Государственный Университет
sarvanhuseynov@rambler.ru

В работе рассматривается класс квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. Доказывается неравенство Харнака для неотрицательных решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка.

Ключевые слова: пространства Соболева W, H, принцип максимума, теорема вложения.

Рассмотрим в ограниченной области D евклидова пространства $R^n, \ n \geq 2$, уравнение

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \qquad (1)$$

с измеримой в D функцией $p(x)$, удовлетворяющей условиям

$$1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \infty.$$

В предположении, что $\|a_{ij}(x)\|$ - действительная симметрическая матрица с измеримыми в D элементами, причём для $x \in D, \xi \in R^n$ выполнено условие

$$\mu |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu^{-1} |\xi|^2, \qquad (2)$$

где $\mu \in (0,1]$. Если $p(x) = const$, то квазилинейное уравнение (1) и его естественные обобщения детально изучены. Обзор литературы по таким уравнениям содержится в монографии [1].

Введём классы функций, связанных с уравнением (1). Для этого введём класс функций

$$W(D) = \left\{ u : u \in W_1^1(D), \left| \nabla u \right|^{p(x)} \in L_1(D) \right\},$$

с нормой

$$\|u\|_W = \int_D \left| \nabla u \right|^{p(x)} dx,$$

где $W_1^1(D)$ - соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщёнными производными первого порядка.

Следовательно, последовательность функций $u_j \in W(D)$ сходится в $W(D)$ к функции $u \in W(D)$, если $u_j \to u$ в $L_1(D)$ и

$$\lim_{j \to \infty} \int_D \left| \nabla u(x) - \nabla u_j(x) \right|^{p(x)} dx = 0.$$

Замыкание множества функций из $W(D)$, с компактным носителем в D, будем обозначать как $W_0(D)$.

Функция $u \in W(D)$ называется W-решением уравнения (1), если интегральное тождество

$$\int_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \left| \nabla u(x) \right|^{p(x)-2} \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} dx = 0 \qquad (3)$$

выполнено для пробных функций $\psi(x) \in W_0(D)$. Здесь предполагается, что $p(x)$ удовлетворяют ещё условию

$$\left| p(x) - p(y) \right| \le \frac{c}{\ln \left| \frac{1}{x - y} \right|}, \; x, y \in D, \left| x - y \right| < \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Рассмотрим неотрицательное решение задачи Дирихле

$$Lu(x) = 0 \text{ в } D, \; u(x) \in W(D), \; u(x) - f(x) \in W_0(D) \qquad (5)$$

с граничной функцией $f(x) \in C^\infty(\overline{D}), \; f(x) \ge 0$ при $x \in \overline{D}$. Нашей целью является доказательство интегральных оценок для $u(x)$ в шарах

B_R достаточно малого радиуса $R<\frac{1}{16}$ с центром в граничной точке $x_0\in\partial D$. Ниже

$$s=\sup_{B_{4R}} p(x),\ \ \bar{s}=\inf_{B_{4R}} p(x),\ \ p_o=p(x_o), \tag{6}$$

$$m=\inf_{\partial D\cap B_{4R}} f\,,\ \ M=\max_{\partial D} f\,, \tag{7}$$

$$u_m(x)=\begin{cases}\min(u(x),m), & x\in D\cap B_{4R}\,,\\ m, \quad x\in B_{4R}/D, & v_m(x)=u_m(x)+R\end{cases}\quad , \tag{8}$$

а $\eta(x)$–функция из $C_0^\infty(B_{4R})$, удовлетворяющая неравенствам $0\le\eta(x)\le 1$.

Отметим, что по принципу максимума точная верхняя грань решения $u(x)$ не превосходит постоянной M.

Будем применять теорему вложения Соболева в виде

$$\left(\int_{B_R}|\varphi|^{kq}dx\right)^{1/k}\le CR^q\int_{B_R}|\nabla\varphi|^q dx \tag{9}$$

Лемма 1. Для любых $\eta\le 4R$ и $\gamma\le\gamma_o<0$ справедливо неравенство

$$\int_{B_r} v_m^{\gamma-1}|\nabla v_m|^{\sigma}\eta^s dx\le c(\mu,p,\gamma_o)\int_{B_{4R}}\left(v_m^{\gamma-1}+v_m^{\gamma+p(x)-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\right)dx\,, \tag{10}$$

где $\sigma=\inf_{B_r} p(x)$.

Доказательство. Выбирая в интегральном тождестве (3) пробную функцию

$$\psi(x)=\left\lfloor v_m^{\gamma}(x)-(m+R)^{\gamma}\right\rfloor\eta^s(x)\,,$$

которая, как нетрудно видеть, принадлежит классу $W_o(D)$, получим оценку

$$|\gamma_o|\int_{B_{4R}} v_m^{\gamma-1}|\nabla v_m|^{p(x)}\eta^s dx\le s\int_{B_{4R}} v_m^{\gamma}|\nabla v_m|^{p(x)-1}|\nabla\eta|\eta^{s-1}dx\,.$$

Отсюда, по неравенству Юнга, применённого к подынтегральному выражению в правой части, имеем:

$$\int\limits_{B_{4R}} v_m^{\gamma-1}\left|\nabla v_m\right|^{p(x)}\eta^s dx \le c(\mu, p, \gamma_o) \int\limits_{B_{4R}} v_m^{\gamma+p(x)-1}\left|\nabla\eta\right|^{p(x)} dx. \qquad (11)$$

Тогда неравенство (10) следует из оценки

$$v_m^{\gamma-1}\left|\nabla v_m\right|^{\sigma}\eta^s \le v_m^{\gamma-1}\left|\nabla v_m\right|^{p(x)}\eta^s + v_m^{\gamma-1}\cdot\eta^s,$$

выполненной почти всюду в B_r. Лемма доказана.

Лемма 2([2]). Существуют положительные постоянные q_o и C, зависящие только от μ, n, p и M, такие, что

$$\Phi(q_o, B_{3R}, v_m) \le C\,\Phi(-q_o, B_{3R}, v_m), \qquad (12)$$

где $\Phi(q, B_r, w) = \left(\oint\limits_{B_r} w^q dx\right)^{1/q}$.

Лемма 3([2]). Для любого $q<0$ справедливо неравенство

$$\Phi(q, B_{3R}, v_m) \le C(\mu, n, p, q, M)\inf_{B_R} v_m. \qquad (13)$$

Теорема. Для любого q, удовлетворяющего условию $0 < q < n(p_o-1)/(n-1)$, имеет место неравенство

$$\left(\oint\limits_{B_{5R/2}} v_m^q dx\right)^{1/q} \le C(\mu, n, p, q, M)\inf_{B_R} v_m. \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть q_o - постоянная из леммы 1. Выбирая в неравенстве (12) $q=-q_o$ и пользуясь (10), получим

$$\Phi(q_o, B_{3R}, v_m) \le C(\mu, n, p, q, M)\inf_{B_R} v_m. \qquad (15)$$

Если $q \le q_o$, то (14) следует из (15) и неравенства Гёльдера, а в случае $q > q_o$ нужно дополнительно пользоваться оценкой (13) с постоянными $q_1 = q_o$, $q_2 = q$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973, 576 с.
2. Алхутов Ю.А., Крашенинникова О.В. Непрерывность в граничных точках решений с нестандартным условием роста// Известия Российской Академии Наук, сер. матем., 2007, т.68, №6, с.3-60.

İKİNCİ TƏRTİB KVAZİXƏTTİ ELLİPTİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİ ÜÇÜN ZƏİF TİPLİ HARNAK BƏRABƏRSİZLİYİ

S.T.HÜSEYNOV

XÜLASƏ

İşdə ikinci tərtib kvazixətti elliptik tənliklər sinfinə baxılır. Bu tənliklərin mənfi olmayan həlləri üçün Harnak bərabərsizliyi isbat olunur.

Açar sözlər: W, H -Sobolev fəzaları, maksimum prinsipi, daxilolma teoremi.

WEAK TYPE HARNACK'S INEQUALITY FOR THE SOLUTION OF SECOND ORDER QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

S.T.HUSEYNOV

SUMMARY

In the paper we consider a class of second order quasilinear elliptic equations. The Harnack's inequality for the nonnegative solutions of second order quasilinear elliptic equations is proved.

Key words: W, H Sobolev spaces, maximum principle, imbending theorems.

Поступила в редакцию: 10.08.2012 г.
Подписано к печати: 20.10.2012 г.