УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ш.Ш.ЮСУБОВ, Дж.Дж.МАМЕДОВА
Бакинский Государственный Университет
yusubov_sh@mail.ru

В работе для гиперболического уравнения высокого порядка с доминирующей смешанной производной, с негладкими коэффициентами, исследуется разрешимость задачи с интегральными граничными условиями.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, корректная разрешимость, интегральные условия.

В области $G = \{(t,x): t_0 < t < t_1,\ x_0 < x < x_1\}$ рассмотрим уравнение

$$(l_{nm}u)(t,x) \equiv D_t^n D_x^m u + \sum_{\substack{i+j<n+m \\ 0\le i\le n \\ 0\le j\le m}} a_{ij}(t,x) D_t^i D_x^j u = \varphi_{nm}(t,x). \qquad (1)$$

Уравнение (1) содержит в себе уравнение Буссинеска-Лява [1], [2], описывающее продольные волны в тонком, упругом стержне с учётом эффектов поперечной инерции, уравнение Аллера описывающее процесс фильтрации при поглощении влаги корнями растений, некоторые уравнения математической биологии ([3], с. 261), а также уравнения, описывающие другие процессы.

Заметим, что уравнение (1) и его частные случаи с достаточно гладкими коэффициентами при различных локальных и нелокальных краевых условиях исследованы, например, в работах [2], [5]-[10].

Данная работа посвящена исследованию уравнения(1) с интегральными краевыми условиями в случае негладких коэффициентов без условий согласования. Для этой краевой задачи получены некоторые априорные оценки и с их помощью доказана её разрешимость.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями

$$(l_{i0}u)(x) \equiv D_t^i u(t_0,x) = \varphi_{i0}(x),\ x\in(x_0,x_1),\ i=\overline{0,n-1}, \qquad (2)$$

и интегральными условиями

$$(l_{nj}u)(t) \equiv \sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_0}^{x_1} \alpha_{jk}(x) D_t^n D_x^k u(t,x)dx = \varphi_{nj}(t),\ t \in (t_0,t_1),\ j = \overline{0,m-1}, \qquad (3)$$

здесь $u(t,x)$ искомая функция; $a_{ij}(t,x)$ заданные измеримые на G функции, удовлетворяющие условиям: $a_{ij}(t,x) \in L_p(G)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $i+j<n+m$ и существуют функции $a_{nj}^0(x) \in L_p(x_0,x_1)$ и $a_{im}^0(t) \in L_p(t_0,t_1)$ такие, что выполняются условия

$$|a_{nj}(t,x)| \le a_{nj}^0(x),\ \ j=\overline{0,m-1} \text{ и } |a_{im}(t,x)| \le a_{im}^0(t),\ i=\overline{0,n-1}$$

почти всюду на G; $\alpha_{ik}(x) \in L_1(x_0,x_1), \varphi_{i0}(x) \in W_p^{(m)}(x_0,x_1)$, $\varphi_{nj}(t) \in L_p(t_0,t_1)$ заданные функции, где $W_p^{(m)}(x_0,x_1)$ пространство функций $\varphi(x)$, имеющих в смысле С.Л.Соболева производные $\varphi'(x),...,\varphi^{(m)}(x) \in L_p(x_0,x_1)$. Решение задачи (1)-(3) будем искать в пространстве

$$W_p^{(n,m)}(G) = \{u \in L_p(G) \mid D_t^i D_x^j u \in L_p(G),\ i=\overline{0,n},\ \ j=\overline{0,m}\}$$

с доминирующей смешанной производной $D_t^n D_x^m u$. Норму в нём определим равенством

$$\| u \|_{W_p^{(n,m)}(G)} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \left\| D_t^i D_x^j u \right\|_{L_p(G)}.$$

2. Корректная разрешимость задачи (1)-(3). Введя оператор

$$l = (l_{nm}, l_{i0},\ i=\overline{0,n-1},\ l_{nj},\ j=\overline{0,m-1}),$$

задачу (1)-(3) запишем в виде

$$l\,u = \varphi, \qquad (4)$$

где

$$\varphi = (\varphi_{nm}(t,x), \varphi_{i0}(x),\ i=\overline{0,n-1},\ \varphi_{nj}(t),\ \ j=\overline{0,m-1}) \in H_p^{(n,m)},$$

$$H_p^{(n,m)} = L_p(G) \times \prod_{i=0}^{n-1} W_p^{(m)}(x_0,x_1) \times \prod_{j=0}^{m-1} L_p(t_0,t_1).$$

Норму в пространстве $H_p^{(n,m)}$ определим равенством

$$\| \varphi \|_{H_p^{(n,m)}} = \| \varphi_{nm} \|_{L_p(G)} + \sum_{i=0}^{n-1} \| \varphi_{i0} \|_{W_p^{(m)}(x_0,x_1)} + \sum_{j=0}^{m-1} \| \varphi_{nj} \|_{L_p(t_0,t_1)}.$$

Отметим, что при наложенных условиях на коэффициенты задачи (1)-(3), оператор $l : W_p^{(n,m)}(G) \to H_p^{(n,m)}$ линеен и ограничен.

Исследование задачи (1)-(3) проводится на основе специального интегрального представления функции $u \in W_p^{(n,m)}(G)$ (см. [11]):

$$u(t,x)=(Qb)(t,x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}b_{i0}(x)+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}b_{nj}(\tau)\,d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}b_{nm}(\tau,s)d\tau ds, \tag{5}$$
где $b=(b_{nm}(t,x),b_{io}(x),i=\overline{0,n-1},b_{nj}(t),\ j=\overline{0,m-1})\in H_p^{(n,m)}$.

Из представления (5) следует, что любая функция $u\in W_p^{(n,m)}(G)$ имеет следы $D_t^i u(t_0,x),\ i=\overline{0,n-1},\ D_t^n D_x^j u(t,x_0),\ j=\overline{0,m-1}$ и операции взятия этих следов непрерывны из $W_p^{(n,m)}(G)$ в $W_p^{(m)}(x_0,x_1)$, $L_p(t_0,t_1)$, соответственно. Для этих следов справедливы также равенства:
$D_t^i u(t_0,x)=b_{io}(x),\ i=\overline{0,n-1},\ D_t^n D_x^j u(t,x_0)=b_{nj}(t),\ j=\overline{0,m-1}$.

Легко показать, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что для любого элемента $b\in H_p^{(n,m)}$ справедлива оценка
$$c_1\|b\|_{H_p^{(n,m)}}\le\|Qb\|_{W_p^{(n,m)}(G)}\le c_2\|b\|_{H_p^{(n,m)}}.$$

Из этих неравенств следует, что оператор Q осуществляет изоморфизм между пространствами $H_p^{(n,m)}$ и $W_p^{(n,m)}(G)$. Поэтому, пространства $W_p^{(n,m)}(G)$ и $H_p^{(n,m)}$ можно отождествить в смысле изоморфизма.

Введём обозначения
$$\gamma_{jk}=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{(x-x_0)^k}{k!}\alpha_{j0}(x)+\frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha_{j1}(x)+\ldots+\alpha_{jk}(x)\right)dx,$$
$$\gamma=(\gamma_{jk})\ j=\overline{0,m-1},k=\overline{0,m-1},$$
$$a_j(x)=\int_{x}^{x_1}\left(\alpha_{j0}(s)\frac{(s-x)^{m-1}}{(m-1)!}+\alpha_{j1}(s)\frac{(s-x)^{m-2}}{(m-2)!}+\ldots+\alpha_{jm-1}(s)\right)ds, \tag{6}$$
$$j,k=\overline{0,m-1}.$$

Доказана

Теорема 1. Если $\det\gamma\neq 0$, то любая функция $u\in W_p^{(n,m)}(G)$, удовлетворяющая условиям (2) и (3) представима в виде
$$u(t,x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\varphi_{i0}(x)+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{nk}(\tau)d_{kj}\,d\tau+$$
$$+\iint_G b_{nm}(\tau,s)\left[\theta(t-\tau)\theta(x-s)\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}-\right.$$

$$-\theta(t-\tau)\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}a_k(s)d_{kj}\Bigg]d\tau ds\,, \qquad (7)$$

где $\theta(t)$ функция Хевисайда, $b_{nm}(t,x)$ произвольная функция из $L_p(G)$, а d_{kj} элементы обратной матрицы γ^{-1}.

Учитывая (7) в уравнении (1), для нахождения $b_{nm}(t,x)$ получаем двумерное интегральное уравнение

$$(Ab_{nm})(t,x)\equiv b_{nm}(t,x)+\int_{t_0}^{t_1}K_1(\tau;t,x)b_{nm}(\tau,x)d\tau+\int_{x_0}^{x_1}K_2(s;t,x)b_{nm}(t,s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}K(\tau,s;t,x)b_{nm}(\tau,s)d\tau ds=\psi(t,x),\ (t,x)\in G\,, \qquad (8)$$

где

$$K_1(\tau;t,x)=\theta(t-\tau)\sum_{i=0}^{n-1}a_{im}(t,x)\frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!},$$

$$K_2(s;t,x)=\sum_{j=0}^{m-1}a_{nj}(t,x)\left(\theta(x-s)\frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=j}^{m-1}a_l(s)d_{lk}\frac{(x-x_0)^{k-j}}{(k-j)!}\right),$$

$$K(\tau,s;t,x)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}a_{ij}(t,x)\left(\theta(t-\tau)\theta(x-s)\frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}-\right.$$

$$\left.-\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=j}^{m-1}\theta(t-\tau)a_l(s)d_{lk}\frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\frac{(x-x_0)^{k-j}}{(k-j)!}\right),$$

$$\psi(t,x)=\varphi_{nm}(t,x)-\left(l_{nm}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\varphi_{i0}(x)+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{nk}(\tau)d_{kj}d\tau\right)\right)(t,x)\,.$$

Имеет место

Теорема 2. Пусть $\det\gamma\neq 0$. Для того, чтобы оператор $l=(l_{nm},l_{io},$ $i=\overline{0,n-1},\ l_{nj},\ j=\overline{0,m-1})$ задачи (1)-(3) осуществлял гомеоморфизм между пространствами $W_p^{(n,m)}(G)$ и $H_p^{(n,m)}$, необходимо и достаточно, чтобы интегральное уравнение (8) для любого $\psi\in L_p(G)$ имело единственное решение $b_{nm}\in L_p(G)$.

Интегральное уравнение (8) запишем в операторной форме

$$(I + A_1 + A_2)b_{nm} = \psi , \tag{9}$$

где I - единичный оператор в пространстве $L_p(G)$,

$$(A_1 b_{nm})(t,x) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} a_{im}(t,x) \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} b_{nm}(\tau,x)d\tau +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} a_{nj}(t,x) \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} b_{nm}(t,s)ds +$$

$$+ \sum_{\substack{0\le i<n \\ 0\le j<m}} a_{ij}(t,x) \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} b_{nm}(\tau,s)d\tau ds ,$$

$$(A_2 b_{nm})(t,x) \equiv -\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=j}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} a_{nj}(t,x) d_{lk} \frac{(x-x_0)^{k-j}}{(k-j)!} \int_{x_0}^{x_1} a_l(s) b_{nm}(t,s)ds -$$

$$- \sum_{\substack{0\le i<n \\ 0\le j<m}} \sum_{k=j}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} a_{ij}(t,x) d_{lk} \frac{(x-x_0)^{k-j}}{(k-j)!} \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x_1} \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} a_l(s) b_{nm}(\tau,s)d\tau ds .$$

Теорема 3. Если $\det\gamma \neq 0$ и $c_1 < 1$, то уравнение (9) для любого $\psi \in L_p(G)$ имеет единственное решение $b_{nm} \in L_p(G)$ и для этого решения справедлива оценка

$$\| b_{nm} \|_{L_p(G)} \le \frac{1}{1-c_1} \| B \| \, \|\psi\|_{L_p(G)} ,$$

где $B = (I + A_1)^{-1}$, $c_1 = \| B \| c$,

$$c = \sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=j}^{m-1} \frac{(x_1-x_0)^{k-j}}{(k-j)!} \left\| a_{nj}^0 \right\|_{L_p(x_0,x_1)} |d_{lk}| M_l +$$

$$+ \sum_{\substack{0\le i<n \\ 0\le j<m}} \sum_{k=j}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(t_1-t_0)^{n-i-\frac{1}{p}}}{(n-i-1)!((n-i-1)q+1)^{\frac{1}{q}}} \frac{(x_1-x_0)^{k-j}}{(k-j)!} \left\| a_{ij} \right\|_{L_p(G)} |d_{lk}| M_l ,$$

$$M_l = \frac{(x_1-x_0)^{m-1+\frac{1}{q}}}{(m-1)!} \|\alpha_{l0}\|_{L(x_0,x_1)} + \frac{(x_1-x_0)^{m-2+\frac{1}{q}}}{(m-2)!} \|\alpha_{l1}\|_{L(x_0,x_1)} + \ldots +$$

$$+ (x_1-x_0)^{\frac{1}{q}} \|\alpha_{l,m-1}\|_{L(x_0,x_1)} .$$

Из теорем 2, 3 следует

Теорема 4. Если $\det\gamma \neq 0$ и $c_1 < 1$, то задача (1)-(3) везде корректно разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солитоны / под ред. Р.Руллафа, Ф.Кодри. М.: Мир, 1983, 408 с.
2. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А.Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР, 1987, т.297, №3, с.547-552.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш.школа, 1995, 301 с.
4. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. equations, 1972, v.12, №3, p.559-565.
5. Шхануков М.Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка / ДАН СССР, 1982, т.265, №6, с.1327-1330.
6. Джохадзе О.М. Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами // Дифференц. уравнения, 1996, т.32, №4, с.523-535.
7. Жегалов В.И., Миронов А.Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика, 2002, №5, с.23-30.
8. Пулькина Л.С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения // Труды матем. института им. В.А.Стеклова, 2002, т.236, с.298-303.
9. Кожанов А.И. Об одной нелокальной задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения, 2004, т.40, №6, с.763-774.
10. Уткина Е.А. Задача Дирихле для одного уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения, 2011, т.47, №4, с.600-604.
11. Никольский С.М. Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных // Матем. сб., 1963, т.(61) 103, №2, с.224-252.

İNTEQRAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ DOMİNANT QARIŞIQ TÖRƏMƏLİ TƏNLİKLƏRİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

Ş.Ş.YUSUBOV , C.C.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

İşdə əmsalları hamar olmayan dominant qarışıq törəməli yüksək tərtibli hiperbolik tənlik üçün inteqral sərhəd şərtli məsələnin həll olunması araşdırılır.

Açar sözlər: hiperbolik tənlik, korrekt həll olunma, inteqral şərtlər.

ON SOLVABILITY OF AN EQUATION WITH DOMINATING MIXED DERIVATIVE WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS

Sh.Sh.YUSUBOV, J.J.MAMMADOVA

SUMMARY

The paper studies solvability of a problem with integral boundary conditions for a hyperbolic equation of higher order, with dominating mixed derivative.

Key words: hyperbolic equation, correct solvability, integral equation.

Поступила в редакцию: 12.08.2012 г.
Подписано к печати: 20.10.2012 г.