BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2012

УДК 519.622

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Г.Ю.МЕХТИЕВА, З.Б.СЕИДОВ

Бакинский Государственный Университет

hesablamariyaziyyati50@mail.ru

В работе исследуются некоторые краевые задачи для системы функционально-дифференциальных уравнений. Одним из уравнений является дифференциальное уравнение II порядка, а второе уравнение есть интегро-дифференциальное уравнение II порядка. Существование единственного решения рассматриваемых краевых задач предполагается.

Ключевые слова: двухточечная краевая задача, система уравнений II порядка, существование и единственность

I. Рассмотрим двухточечную краевую задачу вида

$$
\begin{aligned}
& y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)z' + d(x)z + f(x),\ 0 \le x \le T,\\
& z'' = \int_0^x e(x)\big(\theta(s)z'(s) + g(s)z(s) + \tau(s)y(s) + \varphi(s)\big)ds,\\
& \alpha_0 y(0) + \alpha_1 y'(0) = \gamma_1,\ \ \alpha_0^1 z(0) + \alpha_1^1 z'(0) = \gamma_3,\\
& \beta_0 y(T) + \beta_1 y'(T) = \gamma_2,\ \ \beta_0^1 z(T) + \beta_1^1 z'(T) = \gamma_4.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь $\beta_0 \ne 0,\ \beta_0^1 \ne 0,\ e(x) \ne 0$ и непрерывно дифференцируема на $[0, T]$.

Введём функции

$$y' = v,\ z' = u,\ u' = w.$$

Тогда краевая задача (1) сводится к краевой задаче для системы уравнений I порядка

$$
\begin{aligned}
& y' = v,\ z' = u,\ u' = w,\\
& v' = a(x)v + b(x)y + c(x)u + d(x)z + f(x),\\
& w' = \frac{e'(x)}{e(x)}w + e(x)\big(\theta(x)u(x) + g(x)z(x) + \tau(x)y(x) + \varphi(x)\big),\ 0 \le x \le T,\\
& \alpha_0 y(0) + \alpha_1 v(0) = \gamma_1,\ \ \alpha_0^1 z(0) + \alpha_1^1 u(0) = \gamma_3,\\
& \beta_0 y(T) + \beta_1 v(T) = \gamma_2,\ \ \beta_0^1 z(T) + \beta_1^1 u(T) = \gamma_4,\ w(0) = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

[1] Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики № EIF-2011-1(3)-82/27/1

Разобьём отрезок $[0, T]$ на N равных частей шагом $h = \dfrac{T}{N}$ с узловыми точками $x_0 = 0, x_1 = h, ..., x_N = T$.

Явная разностная схема [1] для краевой задачи имеет вид

$$
\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + hv_i,\ z_{i+1} = z_i + hu_i,\ u_{i+1} = u_i + hw_i,\\
&v_{i+1} = (1 + ha_i)v_i + hb_i y_i + hc_i u_i + hd_i z_i + hf_i,\\
&w_{i+1} = \left(1 + h\frac{e_i'}{e_i}\right)w_i + he_i(\theta_i u_i + g_i z_i + \tau_i y_i + \varphi_i),\ (i = 0,1,...,N-1),\\
&\alpha_0 y_0 + \alpha_1 v_0 = \gamma_1,\ \alpha_0^1 z_0 + \alpha_1^1 u_0 = \gamma_3,\\
&\beta_0 y_N + \beta_1 v_N = \gamma_2,\ \beta_0^1 z_N + \beta_1^1 u_N = \gamma_4,\ w_0 = 0.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Первоначальными неизвестными в этой разностной задаче являются y_0, v_0, z_0, u_0. Для определения этих неизвестных сначала рассмотрим разложение вида [2],[3]

$$y_i = R_i v_i + P_i z_i + Q_i u_i + E_i w_i + S_i. \tag{4}$$

Заменяя здесь i на $i+1$ и учитывая равенства (3), имеем

$$
\begin{aligned}
&(R_i + h - R_{i+1}(1 + ha_i) - hR_{i+1}b_i R_i - hE_{i+1}e_i\tau_i R_i)v_i +\\
&+(P_i - hR_{i+1}b_i R_i P_i - hR_{i+1}d_i - hE_{i+1}e_i g_i - hE_{i+1}e_i\tau_i P_i)z_i +\\
&+\left(Q_i - hR_{i+1}e_i E_i - hQ_{i+1} - E_{i+1}\left(1 + h\frac{e_i'}{e_i}\right) - hE_{i+1}e_i E_i\right)u_i +\\
&+\left(E_i - hb_i R_{i+1}E_i - hQ_{i+1} - E_{i+1}\left(1 + h\frac{e_i'}{e_i}\right) - hE_{i+1}\tau_i E_i\right)w_i +\\
&+S_i = hR_{i+1}b_i S_i + hR_{i+1}f_i + hE_{i+1}e_i\tau_i S_i + hE_{i+1}e_i\varphi_i + S_{i+1}.
\end{aligned}
$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при v_i, z_i, u_i, w_i обращались в нуль. Тогда будем иметь

$$
\begin{aligned}
&R_i = \delta_i^{-1}(R_{i+1}(1 + ha_i) - h),\\
&P_i = \delta_i^{-1}(hR_{i+1}d_i + hE_{i+1}e_i g_i + P_{i+1}),\\
&Q_i = \delta_i^{-1}(hR_{i+1} + hP_{i+1} + hE_{i+1}e_i\theta_i),\\
&E_i = \delta_i^{-1}\left(hQ_{i+1} + E_{i+1}\left(1 + h\frac{e_i'}{e_i}\right)\right),\\
&S_i = \delta_i^{-1}(hR_{i+1}f_i + hE_{i+1}e_i\varphi_i + S_{i+1}),\\
&\delta_i = 1 - hR_{i+1}b_i - hE_{i+1}e_i\tau_i.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Если при некотором значении i, $\delta_i = 0$, то следует изменить шаг разбиения h.

Так как по граничному условию

$$y_N = \beta_0^{-1}(\gamma_2 - \beta_1 v_N),$$

то имеем

$$P_N = Q_N = E_N = 0,\ R_N = -\beta_0^{-1}\beta_1,\ S_N = \beta_0^{-1}\gamma_2.$$

Поэтому из равенств определяются $R_{N-1}, P_{N-1}, Q_{N-1}, E_{N-1}, \quad S_{N-1},..., R_0, P_0, Q_0, E_0, S_0$ и составляется уравнение относительно неизвестных y_0, v_0, z_0, u_0

$$R_0 v_0 - y_0 + Q_0 u_0 + S_0 = 0. \qquad (6)$$

Далее рассматривая разложение вида

$$z_i = R_i' y_i + P_i' v_i + Q_i' u_i + E_i' w_i + S_i',$$

аналогичным способом получается ещё уравнение относительно неизвестных y_0, z_0, v_0, u_0

$$R_0' y_0 + P_0' v_0 + Q_0' u_0 - z_0 + S_0' = 0. \qquad (7)$$

Решая совместно уравнения (6), (7) и уравнения в граничных условиях

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 v_0 = \gamma_1,\ \alpha_0^1 z_0 + \alpha_1^1 u_0 = \gamma_3$$

находятся первоначальные неизвестные y_0, v_0, z_0, u_0. Значения решения и её производные в узловых точках находятся по разностной схеме (3).

II. Теперь рассмотрим краевую задачу с интегральными условиями

$$\alpha_0 y(0) + \alpha_1 y'(0) = \gamma_1, \quad \alpha_0^1 z(0) + \alpha_1^1 z'(0) = \gamma_3,$$

$$\int_0^T \psi(s)\big(y(s) + y'(s)\big)ds = \gamma_2, \quad \int_0^T \Phi(s)\big(z(s) + z'(s)\big)ds = \gamma_4.$$

Сохраняя прежние обозначения, введём функции

$$\xi(x) = \int_0^x \psi(s)\big(y(s) + y'(s)\big)ds, \quad \eta(x) = \int_0^x \Phi(s)\big(z(s) + z'(s)\big)ds.$$

Отсюда следует

$$\xi(0) = \eta(0) = 0,\ \xi(T) = \gamma_2,\ \eta(T) = \gamma_4.$$

Для рассматриваемой краевой задачи получается разностная схема

$$\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + hv_i,\ z_{i+1} = z_i + hu_i,\ u_{i+1} = u_i + hw_i,\\
&v_{i+1} = (1 + ha_i)v_i + hb_i y_i + hc_i u_i + hd_i z_i + hf_i,\\
&w_{i+1} = \left(1 + h\frac{e_i'}{e_i}\right)w_i + he_i(\theta_i u_i + g_i z_i + \tau_i y_i + \varphi_i),\ (i = 0,1,..., N-1),\\
&\xi_{i+1} = \xi_i + h\psi_i(y_i + v_i),\ \eta_{i+1} = \eta_i + h\Phi_i(z_i + u_i),\\
&\alpha_0 y_0 + \alpha_1 v_0 = \gamma_1,\ \alpha_0^1 z_0 + \alpha_1^1 u_0 = \gamma_3,\\
&\xi_0 = \eta_0 = 0,\ \xi_N = \gamma_2,\ \eta_N = \gamma_4,\ w_0 = 0.
\end{aligned} \qquad (8)$$

Для решения разностной задачи (8) исследуются разложения вида

$$\xi_i = R_i y_i + P_i v_i + Q_i z_i + E_i u_i + F_i w_i + S_i,$$
$$\eta_i = R_i' y_i + P_i' v_i + Q_i' z_i + E_i' u_i + F_i' w_i + S_i'.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989, 425 с.
2. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974, 186 с.
3. Сеидов З.Б. Численное решение краевой задачи с интегральными условиями. B.: «Bilgi dərgisi», 2006, с.1-2.

FUNKSİONAL-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ

Q.Y.MEHDİYEVA, Z.B.SEYİDOV

XÜLASƏ

Məqalədə funksional-diferensial tənliklər sistemi üçün ikinöqtəli və inteqral şərtli sərhəd məsələlərinin fərq sxemləri qurulur və ayırma üsulu ilə fərq sxemi həll edilir.

Açar sözlər: ikinöqtəli sərhəd məsələsi, II tərtib tənliklər sistemi, varlıq və yeganəlik.

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE SYSTEMS OF FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

G.Y.MEHDIYEVA, Z.B.SEYIDOV

SUMMARY

In this paper, some boundary value problems for the system of functional-differential equations are investigated.

For these problems the difference scheme is constructed. Then, by means of the decomposition method approximate solution of the considered problems is found.

Keywords: two-point boundary value problem, system of equations of the second order, the existence and uniqueness.

Поступила в редакцию: 05.08.2012 г.
Подписано к печати: 20.10.2012 г.