BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2012

УДК 519.62/.642

ПРИМЕНЕНИЕ ГИБРИДНОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Г.Ю.МЕХТИЕВА, Т.М.АСКЕРОВ, В.Д.АЛИЕВА

Бакинский Государственный Университет

ibvag47@mail.ru

Учитывая широкое применение интегральных уравнений, под руководством проф. Я.Д.Мамедова, сотрудники кафедры Вычислительной математики занимались нахождением их решений. С этой целью использовали как аналитические, так и численные методы.

Здесь рассматривается применение гибридных методов с высокой точностью к решению интегральных уравнений Вольтерры второго рода. Построен конкретный гибридный метод шестого порядка для k=2 и предложен способ для его использования.

Ключевые слова: гибридные методы**,** интегральное уравнение с переменной границей, степень и устойчивость метода

На кафедре Вычислительной математики исследованием приближённых решений интегральных уравнений занимались под руководством основателя одного из основных направлений современной вычислительной математики Азербайджана проф. Я.Д.Мамедова. Учениками проф. Я.Д.Мамедова построены разные итерационные методы для решения как интегральных уравнений Вольтерра, так и уравнений Фредьгольма, а также ими исследованы интегральные уравнения смешанного типа. Для получения более точных информаций о решении интегральных уравнений, проф. Я.Д.Мамедов предложил использовать метод Тонелли. Работы проф. Я.Д.Мамедова и его учеников среди математиков разных стран пользуются большим авторитетом. Последнее время группы учёных кафедры Вычислительной математики под руководством проф. Г.Ю.Мехтиевой для решения интегральных уравнений Вольтерра построили численные методы, обладающие разными свойствами (отметим, что обширная информация о работах проф. Я.Д.Мамедова, посвященная исследованию интегральных уравнений, имеется в диссертации доктора физ.-мат. наук проф. Г.Ю.Мехтиевой). В этой работе, продолжая эти исследования рассматривается численное решение нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, имеющего следующий вид:

$$y(x)=g(x)+\int_{x_0}^{x}K(x,s,y(s))ds, \quad x_0 \le s \le x \le X. \tag{1}$$

В качестве метода исследования уравнения (1) предложен гибридный метод. Уравнение (1) иногда называют уравнением Вольтерра-Урысона. Предполагаем, что уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение, определенная на отрезке $[x_0, X]$. Для определения численного решения уравнения (1), отрезок $[x_0, X]$ с помощью постоянного шага $h>0$ разбиваем на N равных частей, а узловые точки определяем в виде: $x_i = x_0 + ih \ \ (i=0,1,...,N)$. Обозначим через y_i - приближенные, а через $y(x_i)$ - точные значения решения задачи (1) в узловых точках $x_i \ \ (i=0,1,2,...,N)$. А также предполагаем, что ядро интеграла функции $K(x,z,y)$ определено в области $G=\{x_0 \le s \le x \le X, |y| \le b\}$.

Нахождением численного решения уравнения (1) учёные занимаются, начиная с работы Абеля. Как известно, основательное исследование уравнения (1) в линейном случае проводились Вольтеррой, который рассмотрел исследование в области применения интегральных уравнений типа (1) к решению разных практических и научных задач. Неслучайно уравнение с переменными границами называют уравнением Вольтерра (см. [1, стр. 12]). Он к численному решению уравнения (1) применил метод квадратур, который используется по сей день (см. [2]). Идея Вольтерра развивалась и модифицирована многими авторами. Как известно, идея метода квадратур заключается в замене интеграла интегральной суммой, например, замена интеграла в следующей форме:

$$y(x_n)=g(x_n)+h\sum_{i=0}^{n}a_i K(x_n,x_i,y(x_i))+R_n, \tag{2}$$

здесь a_i-коэффициенты квадратурной формулы, а R_n-остаточный член метода квадратур, с помощью которого обычно определяют точности метода. Отметим, что существует много работ, посвященных исследованию приближённых решений интегральных уравнений Вольтерра (см. напр. [3]-[7]). В отличие от известных работ, посвященные исследованию численных решений уравнения (1), здесь, для нахождения численных решений уравнения (1), предлагается использовать гибридные методы, являющиеся обобщением метода Макроглоу. Макроглоу, для решения интегрального уравнения (1), применил следующий гибридный метод (см. [8]):

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i z_{n+i} = h\sum_{i=0}^{k}\beta_i z'_{n+i} + h\beta_m z'_{n+i+m} \quad (|m|<1), \tag{3}$$

где функция $z(x)$ – достаточно гладкая.

Этот метод в более общей форме исследован в [9]. В отличие от этих работ, здесь для нахождения численного решения интегрального уравнения (1), предлагается примененить следующий гибридный метод:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i z_{n+i} = h\sum_{i=0}^{k}\beta_i z'_{n+i} + h\sum_{i=0}^{k}\gamma_i z'_{n+i+\nu_i} \quad (|\nu_i| < 1,\ i = 0,1,\dots,k). \tag{4}$$

Сначала исследуем метод (4), а затем рассмотрим его применение к решению интегрального уравнения Вольтерра.

1. Построения гибридного метода.

Как известно в начале XX века, когда речь шла о численном методе для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, обычно подразумевали методы Рунге-Кутты или Адамса, которые представляют одно и многошаговых методы, соответственно. Понятно, что каждый из этих методов имеет своё преимущество и недостатки. Поэтому в середине XX века учёные предложили построить методы, которые обладали бы лучшим свойством методов Рунге-Кутты и Адамса. Построенные, таким образом, методы на пересечение одно и многошаговых методов назвали гибридным методами (см. напр. [10]-[15]). Первый такой метод построен в [12] на базе метода трапеции, но он входил в класс неявных методов Рунге-Кутты, поэтому некоторые авторы назвали его неявным методом Рунге-Кутты.

Однако гибридные методы типа многошаговых, построены в работах [10], [11], а также в работах [13], [14]. Обычно при исследовании многошаговых методов налагают некоторые ограничения на его коэффициенты (см. [16]). С этой целью предположим, что коэффициенты метода (4) удовлетворяют следующим условиям (см. напр. [16]):

A: Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, l_i \quad (i = 0,1,2,\dots,k)$ - некоторые действительные числа, причём $\alpha_k \neq 0$.

B: Характеристические многочлены

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k}\alpha_i\lambda^i, \quad \sigma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k}\beta_i\lambda^i, \quad \gamma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k}\gamma_i\lambda^{i+l_i}.$$

не имеют общих множителей, отличных от константы.

C: $\sigma(1) + \gamma(1) \neq 0$ и $p \geq 1$.

Как известно, основные свойства методов определяют по значениям их коэффициентов. Обычно, для определения коэффициентов метода (4) используется метод неопределенных коэффициентов. А применение метода неопределенных коэффициентов проводится с использованием тейлеровского разложения следующих функций:

$$y(x+ih) = y(x) + ihy'(x) + \frac{(ih)^2}{2!}y''(x) + \dots + \frac{(ih)^p}{p!}y^{(p)}(x) + O(h^{p+1}). \tag{5}$$

$$y'(x+ih) = y'(x) + ihy''(x) + \frac{(ih)^2}{2!}y'''(x) + \dots + \frac{(ih)^{p-1}}{(p-1)!}y^{(p)}(x) + O(h^p). \tag{6}$$

Отметим, что определение значений указанных величин связано с определением связи между порядком и степенью метода (4). С этой целью рассмотрим следующую лемму.

Лемма. Допустим, что $y(x)$ достаточно гладкая функция и выполняются условия A, B, C. Для того, чтобы метод (9) имел степень p, необходимым и достаточным является выполнение следующих условий:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i = 0,\ \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{k}(\beta_i + \gamma_i),$$

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{i^l}{l!}\alpha_i = \sum_{i=0}^{k}\frac{i^{l-1}}{(l-1)!}\beta_i + \sum_{i=0}^{k}\frac{(i+l_i)^{l-1}}{(l-1)!}\gamma_i\ ,\ \ (l = 2,3,\ldots,p). \tag{7}$$

Легко определить, что система (7) при значениях $l_i = 0\ (i = 0,1,\ldots,k)$, является линейной и совпадает с известными системами, использованными для определения коэффициентов многошагового метода с постоянными коэффициентами. А при выполнении условий $|l_0| + |l_1| + \ldots + |l_k| \neq 0$ система (7) является нелинейной. Решая систему (7) определяем коэффициенты методов типа (4). В этой системе количество неизвестных равно $4k+4$, а количество уравнений $p+1$. Поскольку система (7) является однородной, естественно, она всегда имеет нулевое решение, а для того, чтобы система (7) имела решение, отличное от нуля между величинами p и k должно выполняться условие $4k+4 > p+1$. Отсюда получаем, что $p \le 4k+2$.

Отметим, что если возьмем $\beta_i = 0\ (i = 0,1,2,\ldots,k)$, то связь между степенью и порядком метода (4) будет иметь следующий вид:

$$p \le 3k+1. \tag{8}$$

Известно, что если рассмотрим случай $\gamma_i = 0\ (i = 0,1,2,\ldots,k)$, то степень устойчивого метода (4) удовлетворяет условию (см. [16]):

$$p \le 2[k/2] + 2. \tag{9}$$

Для решения интегрального уравнения (1) рассмотрим построение многошагового метода с постоянными коэффициентами с помощью методов с забеганием вперёд. Обычно, при использовании методов типа с забеганием вперёд налагают некоторые ограничения на область определения ядра $K(x,s,y)$. Поэтому можно предложить, что функция $K(x,z,y)$ определена на ε - расширении области G.

Легко можно показать, что конечно-разностный метод типа с забеганием вперёд можно написать в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^{k-m}\alpha_i z_{n+i} = h\sum_{i=0}^{k}\beta_i z'_{n+i+\nu_i} \qquad (m > 0,\ \alpha_{k-m} \neq 0). \tag{10}$$

Отметим, что между степенью и порядком для устойчивого метода типа (10) имеется следующая связь:

$$p \le k+m+1. \tag{11}$$

Если мы сравним соотношение (8), (9) и (11), то получаем, что гибридные методы являются более точными. Однако использование гибридных методов сложнее, чем методов, полученных из формулы (10) при $m = 0$. Следовательно, дать преимущество одному из методов невозможно. Отметим, что с применением методов с забеганием вперёд для решения уравнения (1) можно ознакомиться в работе [7].

Теперь рассмотрим применение гибридных методов типа (4) для решения уравнения (1).

2. Применение гибридного метода для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Рассмотрим построение гибридных методов для решения уравнения (1) с использованием метода (4). Следуя по схеме из работ [17], гибридный метод можно построить в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i g_{n+i} + h\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}\beta_i^{(j)} K(x_{n+j}, x_{n+i}, y_{n+i}) +$$
$$+ h\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}\gamma_i^{(j)} K(x_{n+j}, x_{n+i+\nu_i}, y_{n+i+\nu_i}), \qquad (12)$$

где коэффициенты $\beta_i^{(j)}, \gamma_i^{(j)}$ $(i, j = 0,1,...,k)$ определяются из следующих систем алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=0}^{k}\beta_i^{(j)} = \beta_i; \ \sum_{j=0}^{k}\gamma_i^{(j)} = \gamma_i \quad (i = 0,1,...,k). \qquad (13)$$

Легко понять, что решение системы (13) больше одного. Поэтому одному методу типа (4) соответствуют несколько методов типа (12).

Отметим, что обычно при построении методов типа (12), предполагают определение ядра интеграла функции $K(x,s,y)$ на ε-расширенной области G. Если такое предположение отсутствует, то надо наложить некоторые ограничения на коэффициенты $\beta_i^{(j)}, \gamma_i^{(j)}$ $(i, \ j = 0,1,...,k)$, а именно

$$\beta_i^{(j)} = \gamma_i^{(j)} = 0 \quad \text{при} \ \ i > j.$$

Можно показать, что при $k = 1$ гибридный метод типа (4) будет иметь следующий вид:

$$y_{n+1} = y_n + h(f_n + f_{n+1})/12 + 5h(f_{n+1/2-\alpha} + f_{n+1/2+\alpha})/12, \qquad (14)$$

где $\alpha = \sqrt{5}/10$.

Этот метод устойчив и имеет степень $p = 6$. Отметим, что следующий метод

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h(5 f_{n+3/2+\sqrt{15}/10} + 10 f_{n+3/2} + 5 f_{n+3/2-\sqrt{15}/10})/18, \qquad (15)$$

также устойчив и имеет степень $p = 6$.

Если метод (15) применим к решению уравнению (1), то получаем несколько методов типа (12), один из которых имеет следующий вид:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + g_{n+2} - g_{n+1} + h(3K(x_{n+3/2+\beta}, x_{n+3/2+\beta}, y_{n+3/2+\beta}) +$$
$$+ 2K(x_{n+1}, x_{n+3/2+\beta}, y_{n+3/2+\beta}) + 5K(x_{n+1}, x_{n+3/2}, y_{n+3/2}) +$$
$$+ 5K(x_{n+3/2}, x_{n+3/2}, y_{n+3/2}) + 7K(x_{n+1}, x_{n+3/2-\beta}, y_{n+3/2-\beta}) -$$
$$- 2K(x_{n+3/2-\beta}, x_{n+3/2-\beta}, y_{n+3/2-\beta}))/18, \ \ \beta = \sqrt{15}/10. \qquad (16)$$

Для использования метода (16) должны быть известны значения величин $y_{n+3/2\pm\beta}$. С этой целью можно использовать алгоритм, предложенный в работе [18].

Вывод. Мы здесь рассмотрели применение гибридных методов к решению интегральных уравнений типа Вольтерра. Показали, что устойчивые гибридные методы являются более точными, чем известные методы. А также, определяя основные недостатки гибридных методов, предложили блочные методы для исправления этих недостатков. Построили конкретные устойчивые гибридные методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. E.M. Polishuk.Vito Volterra. L.: Nauka, 1977, 114 p.
2. V.Volterra. Theory of functionals and integral and integro-differential equations. M.: Nauka, 1982, 304 p.
3. A.F. Verlan, V.S. Sizikov. Integral equations: methods, algorithms, programs. Kiev: Naukovo Dumka, 1986.
4. H.Brunner. Imlicit Runge-Kutta Methods of Optimal order for Volterra integro-differential equation. Mathematics of computation, v. 42, № 165, January 1984, p.95-109.
5. Ch. Lubich. Runqe-Kutta theory for Volterra and Abel Inteqral Equations of the Second Kind. Mathematics of computation, v. 41, № 163, July 1983, p. 87-102.
6. A.A. Makroglou. Block - by-block method for the numerical solution of Volterra delay integro-differential equations, Computing 3, 1983, 30, №1, p.49-62.
7. G.Yu.Mehdiyeva, M.N. Imanova, V.R. Ibrahimov. Application of a Second Derivative Multi-Step Method to Numerical Solution of Volterra Integral Equation of Second Kind. Pak. j. stat. oper. res., v.VIII, № 2, 2012, p. 245-258.
8. A.A. Makroglou. Hybrid methods in the numerical solution of Volterra integro-differential equations. Journal of Numerical Analysis 2, 1982, p.21-35.
9. G.Yu. Mehdiyeva, V.R. Ibrahimov, M.N. Imanova. Some research on numerical solution of second order differential equations. ICM 2012, 11-14 March, Al-Ain,
10. C.S. Gear. Hybrid methods for initial value problems in ordinary differential equations. SIAM, J. Numer. Anal. v. 2, 1965, p. 69-86.
11. J.C. Butcher. A modified multistep method for the numerical integration of ordinary differential equations. J. Assoc. Comput. Math., v.12, 1965, p.124-135.
12. P.C.Hammer, J.W.Hollingswoth. Trapezoidal methods of approximating solution of differential equations, MTAC v. 9, 1955, p.92-96.
13. Скворцов Л.М. Явные двухшаговые методы Рунге-Кутты. Матем. моделирование, 21:9 (2009), 54-65.
14. Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R. Построение гибридных методов с помощью методов Рунге-Кутты, Вестник БГУ, 2006, № 3, с.17-22.
15 E.Hairer, S.P.Norsett, G.Wanner. Solving ordinary differential equations. (Russian) M.: Mir, 1990, 512p.
16. G.Dahlquist. Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations. Math. Scand. 1956, № 4, p.33-53.N.S.

17. M.N.Imanova. One the multistep method of numerical solution for Volterra integral equation. Transactions issue mathematics and mechanics series of physical-technical and mathematical sciences, XXVI, 2006, № 1, p.95-104.

DƏYİŞƏN SƏRHƏDLİ İNTEQRAL TƏNLİYİN HƏLLİNƏ HİBRİD ÜSULUN TƏTBİQİ

Q.Y.MEHDİYEVA , T.M.ƏSGƏROV , V.D.ƏLİYEVA

XÜLASƏ

İnteqral tənliklərin geniş tətbiqini nəzərə alaraq, prof. Y.C.Məmmədovun rəhbərliyi altında Hesablama riyaziyyatı kafedrasının əməkdaşları onların həllərinin tapılması ilə məşğul olmuşlar. Bu məqsədlə həm analitik, həm də ədədi üsullardan istifadə etmişlər.

Burada yüksək dəqiqliyə malik hibrid üsulların, ikinci növ Volter tipli inteqral tənliklərin həllinə tətbiqi araşdırılır. k=2 üçün altıncı tərtib konkret hibrid üsul qurulmuş və ondan istifadə qaydası verilmişdir.

Açar sözlər: hibrid üsullar, dəyişən sərhədli inteqral tənlik, üsulun dəqiqlik dərəcəsi və dayanıqlığı.

APPLICATION OF THE HYBRID METHOD TO THE SOLUTION OF THE INTEGRAL EQUATION WITH VARIABLE BOUNDARY

G.Y.MEHDIYEVA , T.M.ASGAROV, V.D.ALIYEVA

SUMMARY

By using the wide aplication of integral equations, colloborates of the Department of Computational Mathematics investigated the solution of these equations under guidance of prof. Y.J.Mammadov.

Here, we consider the use of hybrid methods with high accuracy to the solution of Volterra integral equations of the second kind. A concrete hybrid method of the sixth order for $k=2$ was constructed and a way for its use is offered.

Key words: hybrid methods, integral equation with variable boundaries, order of accuracy and stability.

Поступила в редакцию: 20.09.2012 г.
Подписано к печати: 20.10.2012 г.