BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2012*

УДК 519.63

ДЕВЯТИТОЧЕЧНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ*

Г.Ю.МЕХТИЕВА, А.Ю.АЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет
imn_bsu@mail.ru, aydin_aliyev66@mail.ru

Рассматривается нелокальная задача Дирихле для уравнения Лапласа. Для численного решения нелокальной задачи строится девятиточечная разностная схема, применяется дискретный аналог метода Фурье. Оценена погрешность метода, получена эффективная оценка погрешности порядка $O(h^4)$. *В этой оценке погрешности участвуют только известные данные задачи.*

Ключевые слова: численное решение, нелокальная задача Дирихле, дискретный аналог метода Фурье.

Различные прикладные задачи (задачи теплопроводности, физики полупроводников, гидромеханики, теории упругости и оболочек и др.) приводятся к нелокальным краевым задачам. Впервые задача с нелокальными краевыми условиями была исследована в основополагающей работе Бицадзе А.В. и Самарского А.А. [1].

При применении метода сеток оценки погрешности приближенного решения уравнения Лапласа обычно содержат максимумы модулей производных искомого решения. Это естественно затрудняет пользование оценками на практике. В литературе известны оценки погрешности некоторых методов, выраженных через исходные данные задачи. Так, Вазов [2] оценил погрешность дискретного метода Фурье для задачи Дирихле для уравнения Лапласа через известные данные. Дальнейшее развитие этой работы получены в работах [3], [4]. Е.А.Волков [5], в отличие от этих работ, применяя мажорантный метод Гершгорина [6] и метод суммирования по слоям [7] оценил погрешность, также лишь с известными данными.

* Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики № EIF-2011-1(3)-82/27/1

Представление решения разностной задачи (пятиточечной схемы) для уравнения Лапласа на прямоугольнике с помощью дискретного аналога метода Фурье, предложенный и обоснованный в [2], является основным инструментом для создания новых экономичных методов для нахождения ее решения как на всей сеточной области [8], [9], так и на сеточных отрезках [10], причем не только прямоугольной, но и на многоступенчатой области. Кроме того, оценки погрешности (второго порядка относительно шага сетки h), выведенные в [2], являются эффективными, т.е. зависят только от известных величин.

В работах [8], [9] хоть и используется представление решений девятиточечной схемы, но не обосновывается ее сходимость к решению дифференциальной задачи.

В настоящей работе получена эффективная оценка порядка $O(h^4)$ для погрешности между решениями девятиточечной разностной задачи, представленный аналогом метода Фурье и точного решения нелокальной задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Через Π обозначим прямоугольник с вершинами $(0,0),(1,0),(1,b),(0,b)$, где b -рациональное число. Пусть Γ - граница этого прямоугольника.

Введем квадратную сетку прямыми $x = x_i = ih,\ y = y_j = jh\ \ (i = 0,1,...,1/h,\ j = 0,1,...,b/h)$, где $1/h$ и b/h-целые числа. Пусть

$$\Pi_h = \{(x,y): x = x_i = ih, i = 0,1,...,1/h, y = y_j = jh,\ j = 0,1,...,b/h\},$$

а Γ_h - множество узлов сетки, лежащих на Γ.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u = 0 \quad в \quad \Pi,\\ &u(x,0) = u(x,b) = 0,\ \ (0 < x < 1),\\ &u(1,y) = 0,\\ &u(0,y) = \alpha u(c,y) + f(y),\ (0 < y < b), \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где $f(y)$ пять раз непрерывно дифференцируемая функция, причем $f(0) = f(b) = 0$.

Соответствующую разностную схему для задачи (1) построим следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_h u_h = 0 \quad в \quad \Pi_h,\\ &u_h(x,0) = u_h(x,b) = 0,\ \ (0 < x < 1),\\ &u_h(1,y) = 0,\\ &u_h(0,y) = \alpha u_h(c,y) + f(y),\ (0 < y < b). \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что точка $x = c$ совпадает с одной из точек x_i.

Доказано [11], что решение задачи (1) определяется формулой

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n g(x,n\pi)\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Докажем, что решение задачи (2) имеет вид

$$u_h(x,y)=\sum_{n=1}^{1/h} \gamma_n g(x,\beta_n/h)\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$c_n=\frac{2}{b}\int_0^b f(t)\sin\frac{n\pi t}{b}dt,$$

$$\gamma_n=\frac{2h}{b}\sum_{r=1}^{1/h} f(rh)\sin\frac{n\pi rh}{b},$$

$$g(x,z)=\frac{sh(1-x)\frac{z}{b}}{sh\frac{z}{b}-\alpha sh(1-c)\frac{z}{b}}$$

β_n определяется из

$$sh\frac{\beta_n}{2b}=\frac{\sin\frac{nh\pi}{2b}}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{nh\pi}{2b}}}.$$

Легко заметить, что $u_h(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям. Докажем, что она удовлетворяет и разностной схеме.

Имеем

$$u_h(x-h,y\pm h)=\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n\frac{sh(1-x)\frac{\beta_n/h}{b}ch\beta_n/b}{sh\frac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\frac{\beta_n/h}{b}}\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{n\pi h}{b}\pm\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n\frac{ch(1-x)\frac{\beta_n/h}{b}sh\beta_n/b}{sh\frac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\frac{\beta_n/h}{b}}\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}\pm\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n\frac{sh(1-x)\frac{\beta_n/h}{b}ch\beta_n/b}{sh\frac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\frac{\beta_n/h}{b}}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi h}{b}\pm$$

$$\pm\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n \frac{ch(1-x)\dfrac{\beta_n/h}{b}sh\beta_n/b}{sh\dfrac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\dfrac{\beta_n/h}{b}}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi h}{b},$$

$$u_h(x+h,y+h)+u_h(x-h,y-h)=2\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n \frac{sh(1-x)\dfrac{\beta_n/h}{b}ch\beta_n/b}{sh\dfrac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\dfrac{\beta_n/h}{b}}\times$$

$$\times\cos\frac{n\pi h}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}+2\sum_{n=1}^{1/h}\left[\gamma_n \frac{ch(1-x)\dfrac{\beta_n/h}{b}sh\beta_n/b}{sh\dfrac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\dfrac{\beta_n/h}{b}}\times\sin\frac{n\pi h}{b}\right]\cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$u_h(x+h,y)+u_h(x,y+h)+u_h(x-h,y)+u_h(x,y-h)-4u_h(x,y)=$$

$$=2\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n g(x,\beta_n/h)\left[\cos\frac{n\pi h}{b}+ch\beta_n/b-2\right]\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$u_h(x-h,y+h)=\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n \frac{sh(1-x)\dfrac{\beta_n/h}{b}ch\beta_n/b}{sh\dfrac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\dfrac{\beta_n/h}{b}}\cos\frac{n\pi h}{b}\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi y}{b}+\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n \frac{sh(1-x)\dfrac{\beta_n/h}{b}ch\beta_n/b}{sh\dfrac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\dfrac{\beta_n/h}{b}}\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}-$$

$$-\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n \frac{ch(1-x)\dfrac{\beta_n/h}{b}sh\beta_n/b}{sh\dfrac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\dfrac{\beta_n/h}{b}}\cos\frac{n\pi h}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}-$$

$$-\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n \frac{ch(1-x)\dfrac{\beta_n/h}{b}sh\beta_n/b}{sh\dfrac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\dfrac{\beta_n/h}{b}}\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$u_h(x+h,y-h)=\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n \frac{sh(1-x)\dfrac{\beta_n/h}{b}ch\beta_n/b}{sh\dfrac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\dfrac{\beta_n/h}{b}}\cos\frac{n\pi h}{b}\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi y}{b}-\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n\frac{sh(1-x)\frac{\beta_n/h}{b}ch\beta_n/b}{sh\frac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\frac{\beta_n/h}{b}}\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}+$$

$$+\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n\frac{ch(1-x)\frac{\beta_n/h}{b}sh\beta_n/b}{sh\frac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\frac{\beta_n/h}{b}}\cos\frac{n\pi h}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}-$$

$$-\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n\frac{ch(1-x)\frac{\beta_n/h}{b}sh\beta_n/b}{sh\frac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\frac{\beta_n/h}{b}}\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$u_h(x+h,y-h)+u_h(x-h,y+h)=$$

$$=2\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n\frac{sh(1-x)\frac{\beta_n/h}{b}ch\beta_n/b}{sh\frac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\frac{\beta_n/h}{b}}\cos\frac{n\pi h}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}-$$

$$-2\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n\frac{ch(1-x)\frac{\beta_n/h}{b}sh\beta_n/b}{sh\frac{\beta_n/h}{b}-\alpha sh(1-c)\frac{\beta_n/h}{b}}\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b},$$

$$\Delta_h u_h=4\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n g(x,\beta_n/h)\left[ch\beta_n/b\cos\frac{n\pi h}{b}+2\cos\frac{n\pi h}{b}+2\frac{ch\beta_n}{b}-5\right]\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Докажем, что

$$(ch\frac{\beta_n}{b}+2)\cos\frac{n\pi h}{b}+2\frac{ch\beta_n}{b}-5=0. \qquad (3)$$

Имеем

$$(ch\frac{\beta_n}{b}+2)\cos\frac{n\pi h}{b}+2ch\frac{\beta_n}{b}-5=3ch\frac{\beta_n}{b}-3-2\sin^2\frac{n\pi h}{2b}(ch\frac{\beta_n}{b}+2)=$$

$$=3sh^2\frac{\beta_n}{2b}-\sin^2\frac{n\pi h}{2b}(2sh^2\frac{\beta_n}{2b}+3)=3sh^2\frac{\beta_n}{2b}-2\sin^2\frac{n\pi h}{2b}sh^2\frac{\beta_n}{2b}-3\sin^2\frac{n\pi h}{2b}=$$

$$=\left[3-2\sin^2\frac{n\pi h}{2b}\right]sh^2\frac{\beta_n}{2b}-3\sin^2\frac{n\pi h}{2b}.$$

Учитывая

$$sh\frac{\beta_n}{2b} = \frac{\sin\frac{n\pi h}{2b}}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{n\pi h}{2b}}},$$

получим справедливость (3).

Приступим к оценке погрешности метода. Как известно

$$|c_n| \le Kn^{-5}, \tag{4}$$

где

$$K = \frac{2b^4}{\pi^5}\left[\left|f^{IV}(b)\right| + \left|f^{IV}(0)\right|\right] + \frac{4b^5}{\pi^6}\max\left|f^{V}(t)\right|.$$

Также

$$|\beta_n - nh\pi| \le \frac{(nh\pi)^5}{480b^4} \ . \tag{5}$$

Известно, что [11]

$$\left|\frac{\partial g(x,z)}{\partial z}\right| \le \frac{1}{16b}\left(1-\exp\left(-\frac{8}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4}{3b}\right)\right)^{-2} \times$$

$$\times\left[x\exp\left(-\frac{x}{b}z\right)+\alpha(x+c)\exp\left(-\frac{x+c}{b}z\right)\right],\ 1\le n\le 1/h,\ 0\le y\le b,\ \sqrt{3}n\pi \ge z \ge \frac{\beta_n}{h}.$$

Тогда учитывая (5) имеем

$$|g(x,\beta_n/h)-g(x,n\pi)| \le \frac{1}{16b}\left(1-\exp\left(-\frac{8}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4}{3b}\right)\right)^{-2} \times$$

$$\times\left[x\exp\left(-\frac{x}{b}z\right)+\alpha(x+c)\exp\left(-\frac{(x+c)}{b}z\right)\right]\frac{(n\pi)^5}{480b^4}h^4 \le$$

$$\le \frac{\pi^5}{7680b^5}\left(1-\exp\left(-\frac{8}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4}{3b}\right)\right)^{-2} \times$$

$$\times\left[x\exp\left(-\frac{4x}{3b}n\right)+\alpha(x+c)\exp\left(-\frac{4(x+c)}{3b}n\right)\right]n^5h^4. \tag{6}$$

Наконец заметим, что

$$0 \le g(x,z) \le \frac{1}{1-\alpha},\ (0\le x\le 1,\ z \ge \frac{4b}{3}). \tag{7}$$

Теперь оценим $|u-u_h|$. Имеем

$$|u-u_h| \le R_1 + R_2,$$

где

$$R_1 = \sum_{n=1}^{1/h} |c_n| \left| g(x, \beta_n / h) - g(x, n\pi) \right|,$$

$$R_2 = \sum_{n=1+1/h}^{\infty} |c_n| g(x, n\pi).$$

Из (4) и (7) следует

$$R_2 \le K \sum_{n=1+1/h}^{\infty} n^{-5} \le K \frac{h^4}{2}.$$

Используя (4) и (6) получим

$$|R_1| \le K \sum_{n=1}^{1/h} n^{-5} \left[x \exp\left(-\frac{4nx}{3b}\right) + \alpha (x+c) \exp\left(-\frac{4n(x+c)}{3b}\right) \right] \times$$

$$\times \left(1 - \exp\left(-\frac{8}{3b}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2} \frac{\pi^5}{7680 b^5} n^5 h^4 =$$

$$= K \frac{\pi^5}{7680 b^5} h^4 \left(1 - \exp\left(-\frac{8}{3b}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{1/h} \left[x \exp\left(-\frac{4nx}{3b}\right) + \alpha (x+c) \exp\left(-\frac{4n(x+c)}{3b}\right) \right] \le$$

$$\le \frac{1}{7680 b^5} K \pi^5 h^4 \left(1 - \exp\left(-\frac{8}{3b}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2} \times$$

$$\times \left[x \sum_{n=1}^{1/h} \left(\exp\left(-\frac{4x}{3b}\right)\right)^n + \alpha (x+c) \sum_{n=1}^{1/h} \left(\exp\left(-\frac{4(x+c)}{3b}\right)\right)^n \right] \le$$

$$\le \frac{1}{7680 b^5} K \pi^5 h^4 \left(1 - \exp\left(-\frac{8}{3b}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2} \times$$

$$\times \left[\frac{x}{\exp\left(\frac{4x}{3b}\right) - 1} + \alpha \frac{x+c}{\exp\left(\frac{4(x+c)}{3b}\right) - 1} \right] \le$$

$$\le \frac{K \pi^5 h^4}{10240 b^4} \left(1 - \exp\left(-\frac{8}{3b}\right) - \alpha \exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2} (1+\alpha).$$

Таким образом,

$$\left|u-u_h\right| \le K\frac{h^4}{2}+\frac{K\pi^5}{10240b^4}(1+\alpha)\left(1-\exp\left(-\frac{8}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2}h^4,$$

$$\left|u-u_h\right| \le K\left[0{,}5+\frac{\pi^5}{10240b^4}(1+\alpha)\left(1-\exp\left(-\frac{8}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2}\right]h^4.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач. Докл. АН СССР, 1969, т.185, №4, с.739-740.
2. Wasow W. On the truncation error in the solution of Laplace’s equation by finite differences. Jour. Res. Nat. Bur. Standarts, 1952, v.48, p.345-348.
3. Giese J.H. On the truncation error in a numerical solution of the Neuman problem for a rectangle. Jour. Math. and Phys., 1958, v.37, №2, p.169-177.
4. Walsh J.L. and Young D. On the accurary of the numerical solution of the Dirichlet problem by finite differences. Jour. Res. Nat. Bur. Standarts, 1953, v.51, №6, p.343-369.
5. Волков Е.А. Эффективные оценки погрешности решений методом сеток краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике и в некоторых треугольниках. Труды Матем. Инс-та им. В.А.Стеклова, 1966, т.74, с.55-85.
6. Gerschgorin S.A. Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lözung partieller Differentialgleichungen. Z. angew. Math. und Mech., 1930, v.10, p.373-382.
7. Волков Е.А. К вопросу о решении методом сеток внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В сб. «Вычислительная математика», М.: АН СССР, 1957, т.1, с. 33-61.
8. Романова С.Е. Экономичный метод решения разностного уравнения Лапласа на прямоугольных областях. Докл. АН СССР, 1980, т.252, №1, с.48-51.
9. Романова С.Е. Экономичный метод приближенного решения разностного уравнения Лапласа на прямоугольных областях. Ж. вычисл.матем.и матем.физики, 1983, т.23, №3, с.660-673.
10. Волков Е.А. Об асимптотически быстром приближенном методе получения на сеточных отрезках решения разностного уравнения Лапласа. Докл. АН СССР, 1984, т.279, №2, с.285-290.
11. Алиев А.Ю. О численном решении нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений. Диссертация на соискания уч. степени к.ф.м.н., Баку, 1992.
12. Алиев А.Ю. Об эффективной оценке погрешности нелокальной задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Препринт №5 Инс-та Физики АН Азерб. Респуб., 1993, 34 с.
13. Aliev A.Y., Mamedov Y.C. Effective truncation error of discrete Fourier method for nonlocal Dirichlet problem. Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of physical-technical and mathematical sciences, 1999, v.XIX, №1-2, p.3-13.
14. Алиев А.Ю. Эффективная оценка погрешности для нелокальной задачи Дирихле. Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2002, №1, с.99-105.

QEYRİ-LOKAL DİRİXLE MƏSƏLƏSİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ ÜÇÜN DOQQUZNÖQTƏLİ FƏRQ SXEMİ

Q.Y.MEHDİYEVA, A.Y.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Laplas tənliyi üçün qeyri-lokal Dirixle məsələsi nəzərdən keçirilir. Qeyri-lokal məsələnin ədədi həlli üçün doqquznöqtəli fərq sxemi qurulur, Furye üsulunun diskret analoqu tətbiq olunur. Üsulun xətası $O(h^4)$ tərtibdən qiymətləndirilmişdir. Bu xəta qiymətləndirməsində məsələnin yalnız məlum verilənləri iştirak edirlər.

Açar sözlər: ədədi həll, qeyri-lokal Dirixle məsələsi, Furye üsulunun diskret analoqu.

NINE-POINT DIFFERENCE SCHEME FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF A NON-LOCAL DIRICHLET PROBLEM

G.Y.MEHDIYEVA, A.Y.ALIYEV

SUMMARY

A non-local Dirichlet problem for Laplace equation is considered. For numerical solution of a non-local problem, nine-point difference scheme is constructed and the discrete analogue of the Fourier's method is applied. The error of the method is estimated, an effective estimation of the error of $O(h^4)$ order is obtained. The estimation of the error involves only the known data of the problem.

Key words: numerical solution, non-local Dirichlet problem, a discrete analogue of the Fourier's method.

Поступила в редакцию: 02.08.2012 г.
Подписано к печати: 20.10.2012 г.