BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2012*

УДК 517.93

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

М.Ф.ИСМАИЛОВА
Мингечаурский Политехнический Институт
mila_72@mail.ru

В работе получены достаточные условия о регулярной разрешимости операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка эллиптического типа в частных производных, зависящих от двух переменных, главная часть которого содержит нормальный оператор. Эти условия выражены свойствами коэффициента операторно-дифференциального уравнения. При этом получены оценки норм промежуточных производных в абстрактных пространствах типа Соболева через главную часть операторно-дифференциального уравнения.

Ключевые слова: операторно-дифференциальное уравнение, гильбертово пространство, вектор-функция, самосопряженный оператор, промежуточные производные, регулярное решение, обратный оператор.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, C-положительно определенный самосопряженный оператор. Пусть $R^2 = R \times R$ и $L_2(R^2; H)$ есть гильбертово пространство вектор-функций $f(x, y)$, определенные почти всюду в R^2, со значениями в H, измеримые и квадратично интегрируемые, для которых

$$\| f \|_{L_2(R^2;H)} = \left(\int_{R^2} \| f(x, y) \|^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Введем линейное множество $D(R^2; H_4)$- бесконечно дифференцируемых в H вектор-функции $u(x, y)$, со значениями $H_4 = D(C^4)$ $\left((x, y)_{H_4} = (C^4 x, C^4 y)\right)$, имеющие компактные носители в R^2. В линейном множестве $D(R^2; H_4)$ определим норму

$$\|u\|_{W_2^4\left(R^2;H\right)}=\left(\sum_{\substack{k,j=0\\0\le k+j\le 4}}^{4}\left\|C^{4-(k+j)}\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j}\right\|^2_{L_2\left(R^2;H\right)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пополнению линеала $D\left(R^2;H_4\right)$ по норме $\|u\|_{W_2^4\left(R^2;H\right)}$ обозначим через $W_2^4(R^2;H)$.

Рассмотрим в пространстве H операторно-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+A^4u+\sum_{\substack{k,j=0\\0\le k+j\le 4}}^{4}A_{k,j}\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j}=f(x,y),\ (x,y)\in R^2\ , \qquad (1)$$

где $f(x,y)$, $u(x,y)$ вектор-функции со значениями в H, а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) A- нормальный обратимый оператор, спектр которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon=\left\{\lambda:\left|arq\lambda\right|\le\varepsilon,\ \ 0\le\varepsilon<\frac{\pi}{4}\right\}$$

2) Операторы $B_{k,j}=A_{k,j}\ \ A^{(k+j)-4}$ $(k,j=\overline{0,4},k+j\le 4)$ ограничены в H.

Отметим, что при выполнение условия 1) оператор A представим в виде $A=\bigcup C$, где C- положительно определенный самосопряженный оператор в H, а C-унитарный оператор в H.

Определение 1. Если при $f(x,y)\in L_2\left(R^2;H\right)$ существует вектор-функция $u(x,y)\in W_2^4\left(R^2;H\right)$, которое удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R^2, то ее будем называть регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(x,y)\in L_2\left(R^2;H\right)$ существует регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1), которое имеет оценку

$$\|u\|_{W_2^4\left(R^2;H\right)}\le const\|f\|_{L_2\left(R^2;H\right)},$$

то уравнение (1) называется регулярно разрешимым.

В данной работе мы найдем условия на коэффициенты уравнения (1), при выполнении которых уравнение (1) является регулярно разрешимой. Отметим, что уравнение второго порядка эллиптического типа в частных производных исследована в работах [1,2,3,5]. Когда A- самосопряженный оператор, условия регулярной разрешимости для уравнения (1) получены в работах[4,6].

Обозначим через

$$P_0 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + A^4 u, \ u(x,y) \in W_2^4(R^2; H)$$

$$P_1 u = \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \le k+j \le 4}}^{4} A_{k,j} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j}, \ u(x,y) \in W_2^4(R^2; H)$$

и

$$Pu = P_0 u + P_1 u, \ u(x,y) \in W_2^4(R^2; H).$$

Имеет место.

Теорема 1. Пусть выполняется условие 1). Тогда оператор P_0 изоморфно отображает пространство $W_2^4(R^2;H)$ на $L_2(R^2;H)$ и имеет место оценки

$$\left\| A^{4-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j} \right\|_{L_2(R^2;H)} \le C_{k,j}(\varepsilon) \| P_0 u \|_{L_2(R^2;H)} \tag{2}$$

$(k, j = \overline{0,4}, 0 \le k + j \le 4)$, где

$$C_{0,0}(\varepsilon) = C_{0,4}(\varepsilon) = C_{4,0}(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \le \varepsilon \le \frac{\pi}{8} \\ \frac{1}{\sqrt{2}\cos 2\varepsilon}, & \frac{\pi}{8} \le \varepsilon < \frac{\pi}{4} \end{cases} \tag{3}$$

$$C_{k,0} = \left(\frac{k}{4}\right)^{\frac{k}{4}} \left(\frac{4-k}{4}\right)^{\frac{4-k}{4}}, \text{ при } k = 1,2,3; \ j = 0 \tag{4}$$

$$C_{0,j}(\varepsilon) = \left(\frac{j}{4}\right)^{\frac{j}{4}} \left(\frac{4-j}{4}\right)^{\frac{4-j}{4}} \frac{1}{cos\, 2\varepsilon}, \text{ при } k = 0; \ j = 1,2,3 \tag{5}$$

$$C_{k,j} = \left(\frac{k}{4}\right)^{\frac{k}{4}} \left(\frac{j}{4}\right)^{\frac{j}{4}} \frac{1}{cos\, 2\varepsilon}, \text{ при } k \ne 0, \ j \ne 0, \ k \ne 4, \ j \ne 4, \ k + j = 4 \tag{6}$$

$$C_{k,j} = \left(\frac{4-(k+j)}{4}\right)^{\frac{4-(k+j)}{4}} \left(\frac{k}{4}\right)^{\frac{k}{4}} \left(\frac{j}{4}\right)^{\frac{j}{4}} \frac{1}{cos\, 2\varepsilon}, \text{ при } 2 \le k + j \le 3 \tag{7}$$

Доказательство: Пусть $\hat{f}(\xi,\eta)$ преобразование Фурье вектор-функции $f(x,y) \in L_2(R^2;H)$. Тогда легко видеть, что вектор-функция

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \left((\xi^4 + \eta^4) E + A^4 \right)^{-1} \hat{f}(\xi,\eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \tag{8}$$

удовлетворяет уравнению $P_0 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + A^4 u = f(x, y)$ почти всюду в R^2. Покажем, что $u(x, y) \in W_2^4(R^2; H)$. Для этого достаточно доказать неравенство (5)-(7).

Пусть $k = 0$, $j = 0$. Тогда по теореме Планшареля находим:

$$\left\| A^4 u \right\|_{L_2(R^2;H)} = \left\| A^4 \hat{u}(\xi, \eta) \right\|^2_{L_2(R^2;H)} =$$

$$= \left\| A^4 \left(\xi^4 E + \eta^4 E + A^4 \right)^{-1} \hat{f}(\xi, \eta) \right\|^2_{L_2(R^2;H)} \le$$

$$\le \sup_{(\xi,\eta)\in R^2} \left\| A^4 \left(\xi^4 E + \eta^4 E + A^4 \right)^{-1} \right\| \cdot \left\| \hat{f}(\xi, \eta) \right\|_{L_2(R^2;H)}.$$

$$= \sup_{(\xi,\eta)\in R^2} \left\| A^4 \left(\xi^4 E + \eta^4 E + A^4 \right)^{-1} \right\| \cdot \left\| f(x, y) \right\|_{L_2(R^2;H)}. \qquad (9)$$

При любом $(\xi, \eta) \in R^2$

$$\left\| A^4 \left(\xi^4 E + \eta^4 E + A^4 \right)^{-1} \right\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \left| \lambda^4 (\xi^4 + \eta^4 + \lambda^4)^{-1} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{\mu > \mu_0 > 0 \\ |\varphi| < \varepsilon}} \left| \mu \left(\xi^4 + \eta^4 + \mu^4 e^{i\varphi} \right)^{-1} \right| \le$$

$$\le \sup_{\mu > 0} \left| \mu^4 \left(\left(\xi^4 + \eta^4 \right)^2 + \mu^8 + 2\left(\xi^4 + \eta^4 \right) \mu^4 \cos 4\varepsilon \right)^{-1} \right|. \qquad (10)$$

При $0 \le \varepsilon \le \frac{\pi}{8}$, число $\cos 4\varepsilon > 0$, поэтому из (10) получаем, что

$$\left\| A^4 \left(\left(\xi^4 + \eta^4 \right) E + A^4 \right)^{-1} \right\| \le \sup_{\mu > 0} \left| \mu^4 \left(\left(\xi^4 + \eta^4 \right)^2 + \mu^8 \right)^{-1} \right| \le 1. \qquad (11)$$

При $\frac{\pi}{8} \le \varepsilon \le \frac{\pi}{4}$ используя неравенства Коши из (10) получаем:

$$\left\| A^4 \left(\left(\xi^4 + \eta^4 \right) E + A^4 \right)^{-1} \right\| \le$$

$$\le \sup_{\mu > 0} \left| \mu^4 \left(\left(\xi^4 + \eta^4 \right)^2 + \mu^8 + \left(\left(\xi^4 + \eta^4 \right)^2 + \mu^4 \right) \cos 4\varepsilon \right)^{-\frac{1}{2}} \right| \le$$

$$\le \mu^4 \left(\left(\left(\xi^4 + \eta^4 \right) + \mu^8 \right) \cdot \frac{1}{2\cos^2 2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}\cos 2\varepsilon} \qquad (12)$$

Принимая во внимание неравенства (11) и (12) в (10) получаем, что

$$\left\|A^4 u\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} = \left\|A^4 \hat{u}(\xi,\eta)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} \le C_0(\varepsilon)\|f\|_{L_2\left(R^2;H\right)} = C_0(\varepsilon)\|P_0 u\|_{L_2(R^2;H)}$$

Аналогично доказывается неравенств (2) при $k=0$, $j=0$; $k=4$, $j=0$.

Теперь предположим, что $k=1,2,3$; $j=0$. Тогда

$$\left\|A^{4-k}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} = \left\|A^{4-k}\xi^k \hat{u}(\xi,\eta)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} =$$

$$= \left\|A^{4-k}\xi^k\left(\xi^4 E + \eta^4 E + A^4\right)^{-1}\hat{f}(\xi,\eta)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} \le$$

$$\le \sup_{(\xi,\eta)\in R^2}\left\|A^{4-k}\xi^k\left(\xi^4 E + \eta^4 E + A^4\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|\hat{f}(\xi,\eta)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} =$$

$$= \sup_{(\xi,\eta)\in R^2}\left\|A^{4-k}\xi^k\left(\xi^4 E + \eta^4 E + A^4\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|f(x,y)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}. \tag{13}$$

Так как при $(\xi,\eta)\in R$

$$\left\|A^{4-k}\xi^k\left(\xi^4 E + \eta^4 E + A^4\right)^{-1}\right\| \le \sup_{\lambda\in\sigma(A)}\left|\lambda^{4-k}\xi^k\left(\xi^4+\eta^4+\lambda^4\right)^{-1}\right| \le$$

$$\le \sup_{\mu>0}\left|\mu^{4-k}\xi^k\left(\left(\xi^4+\eta^4\right)^2+\mu^8+2\left(\xi^4+\eta^4\right)\mu^4\cos 4\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right| \le$$

$$\le \sup_{\mu>0}\frac{\mu^{4-k}|\xi|^k}{\xi^4+\eta^4+\mu^4}\left(\frac{\left(\xi^4+\eta^4+\mu^4\right)^2}{\left(\xi^4+\eta^4\right)^2+\mu^8+2\left(\xi^4+\eta^4+\mu^4\cos 4\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Очевидно, что

$$\frac{\left(\xi^4+\eta^4+\mu^4\right)^2}{(\xi^4+\eta^4)^2+\mu^8+2\left(\xi^4+\eta^4\right)\mu^8\cos 4\varepsilon} =$$

$$= \frac{(\xi^4+\eta^4)^2+\mu^8+2\left(\xi^4+\eta^4\right)\mu^8}{(\xi^4+\eta^4)^2+\mu^8+2\left(\xi^4+\eta^4\right)\mu^8\cos 4\varepsilon} =$$

$$= 1+\frac{2\left(\xi^4+\eta^4\right)\mu^4(1-\cos 4\varepsilon)}{(\xi^4+\eta^4)^2+\mu^8+2\left(\xi^4+\eta^4\right)\mu^8\cos 4\varepsilon} \le$$

$$\le 1+\frac{4(\xi^4+\eta^4)\mu^4 sin^2 2\varepsilon}{2\left(\xi^4+\eta^4\right)\mu^4(1+cos\,4\varepsilon)}=1+\frac{sin^2 2\varepsilon}{cos^2 2\varepsilon}=\frac{1}{cos\,2\varepsilon}. \qquad (15)$$

Тогда из (14) с учетом (15) получаем

$$\left\|A^{4-k}\xi^k\left(\xi^4E+\eta^4E+A^4\right)^{-1}\right\|\le \sup_{\mu>0}\frac{\mu^{4-k}|\xi|^k}{\xi^4+\eta^4+\mu^4}\cdot\frac{1}{cos\,2\varepsilon}\ . \qquad (16)$$

С другой стороны, имеем (см [5]):

$$\sup_{\mu>0}\frac{\mu^{4-k}|\xi|^k}{\xi^4+\eta^4+\mu^4}\le \sup_{\mu>0}\frac{\mu^{4-k}|\xi|^k}{\xi^4+\mu^4}=\sup_{\tau>0}\frac{\tau^k}{\tau^4+1}=\left(\frac{k}{4}\right)^{\frac{k}{4}}\left(\frac{4-k}{4}\right)^{\frac{4-k}{4}}. \qquad (17)$$

Следовательно, из неравенства (16) и (17) с учетом неравенства (13) получается верность неравенство (4).

Неравенство (5) доказывается аналогично неравенства (3).

Теперь докажем неравенство (5). В этом случае

$$\left\|\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j}\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}=\left\|\xi^k\eta^j\hat{u}(\xi,\eta)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}=$$

$$=\left\|\xi^k\eta^j\left(\xi^4E+\eta^4E+A^4\right)^{-1}\hat{f}(\xi,\eta)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}\le$$

$$\le \sup_{(\xi,\eta)\in R}\left|\xi^k\eta^j\left(\xi^4E+\eta^4E+A^4\right)^{-1}\right|\cdot\left\|f(x,y)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}. \qquad (18)$$

Но при $(\xi,\eta)\in R$ и $\delta>0$

$$\left\|\xi^k\eta^j\left(\xi^4E+\eta^4E+A^4\right)^{-1}\right\|\le \sup_{\lambda\in\sigma(A)}\left|\xi^k\eta^j\left(\xi^4+\eta^4+\lambda^4\right)^{-1}\right|\le$$

$$\le \sup_{\mu>0}\left|\xi^k\eta^j\left(\left(\xi^4+\eta^4\right)^2+\mu^8+2\left(\xi^4+\eta^4\right)\mu^4\cos 4\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right|\le$$

$$\le \sup_{\mu>0}\frac{\mu^{4-k}|\xi|^k}{\xi^4+\eta^4+\mu^4}\left(\frac{\left(\xi^4+\eta^4+\mu^4\right)^2}{\left(\xi^4+\eta^4\right)^2+\mu^8+2\left((\xi^4+\eta^4)\mu^4\cos 4\varepsilon\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le \sup_{\mu>0}\frac{|\xi|^k\cdot|\eta|^{4-k}}{\xi^4+\eta^4+\mu^4}\cdot(1+tg^2\varepsilon)\le\frac{\left(\delta|\xi|^4\right)^{\frac{k}{4}}\left(\delta^{-\frac{k}{4-k}}\left|\eta^4\right|\right)^{\frac{4-k}{4}}}{\xi^4+\eta^4+\mu_0^4}\le$$

$$\leq \frac{\frac{k}{4}\delta|\xi|^4 + \frac{4-k}{4}\cdot\delta^{-\frac{k}{4-k}}}{\xi^4+\eta^4+\mu_0^4} \tag{19}$$

Полагая $\delta = \left(\frac{4-k}{k}\right)^{\frac{4-k}{k}}$, получаем, что

$$\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4 \partial y^4}\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} \leq \left(\frac{k}{4}\right)^{\frac{k}{4}}\left(\frac{j}{4}\right)^{\frac{j}{4}}\frac{1}{cos\,2\varepsilon}.$$

Неравенство (5) доказано. Докажем неравенство (6). Очевидно, что

$$\left\|A^{4-(k+j)}\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k \partial y^j}\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} = \left\|A^{4-(k+j)}\xi^k\eta^j\hat{u}(\xi,\eta)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} \leq$$

$$\leq \sup_{(\xi,\eta)\in R^2}\left\|A^{4-(k+j)}\xi^k\eta^j\left(\xi^4E+\eta^4E+A^4\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|\hat{f}(\xi,\eta)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} =$$

$$= \sup_{(\xi,\eta)\in R^2}\left\|A^{4-(k+j)}\xi^k\eta^j\left(\xi^4E+\eta^4E+A^4\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|f(x,y)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}. \tag{20}$$

С другой стороны,

$$\left\|A^{4-(k+j)}\xi^k\eta^j\left(\xi^4E+\eta^4E+A^4\right)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \sup_{\mu>0}\left|\mu^{4-(k+j)}\left(\left(\xi^4+\eta^4\right)^2+\mu^8+2\left(\xi^4+\eta^4\right)\mu^4\cos 4\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\mu>0}\frac{\left|\mu^{4-(k+j)}\xi^k\eta^j\right|}{\xi^4+\eta^4+\mu^4}\frac{1}{cos\,2\varepsilon}. \tag{21}$$

Очевидно, что при $(\xi_0,\eta_0)\in R^2$, $(\xi_0,\eta_0)\neq(0,0)$ и при $\mu>0$

$$\frac{|\xi_0|^k|\eta_0|^j\mu^{4-(k+j)}}{\xi_0^4+\eta_0^4+\mu^4} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{4-(k+j)}{k+j}\right)^{\frac{4-(k+j)}{4}}(k+j)\cdot\frac{|\xi_0|^k|\eta_0|^j}{4(\xi_0^4+\eta_0^4)}.$$

Тогда

$$\sup_{(\xi,\eta)\in R}\frac{|\xi|^k|\eta|^j\mu^{4-(k+j)}}{\xi^4+\eta^4+\mu^4} \leq \left(\frac{4-(k+j)}{k+j}\right)^{\frac{4-(k+j)}{4}}\left(\frac{k}{4}\right)^{\frac{k}{4}}\left(\frac{j}{4}\right)^{\frac{j}{4}}.$$

Следовательно,

$$\left\| A^{4-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j} \right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} \le C_{k,j}(\varepsilon)\|f\|_{L_2\left(R^2;H\right)} = C_{k,j}(\varepsilon)\|P_0 u\|_{L_2(R^2;H)}.$$

Таким образом, оценка (2) доказана. Из этих оценок следует, что $u(x,y) \in W_2^4\left(R^2;H\right)$. С другой стороны,

$$\left(P_0 u\right)_{W_2^4\left(R^2;H\right)} \le \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|^2_{L_2\left(R^2;H\right)} + \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\|^2_{L_2\left(R^2;H\right)} + \left\| A^4 u \right\|^2_{L_2\left(R^2;H\right)} \le \|u\|^2_{W_2^4\left(R^2;H\right)},$$

т.е. оператор $P_0 : W_2^4\left(R^2;H\right) \to L_2\left(R^2;H\right)$ ограничен. Тогда утверждение теоремы вытекает из теоремы Банаха, об обратном операторе, поскольку $\operatorname{Re} P_0 = \{0\}$ и $JmP_0 = L_2(R^2;H)$.

Теорема доказана.

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1), 2), тогда $P = P_0 + P_1$ ограниченный оператор из пространство $W_2^4\left(R^2;H\right)$ в $L_2\left(R^2;H\right)$.

Доказательство. Очевидно, что по теореме 1 достаточно доказать ограниченность оператора $P_1 : W_2^4\left(R^2;H\right) \to L_2\left(R^2;H\right)$.

По определению, при $u(x,y) \in W_2^4\left(R^2;H\right)$

$$\|P_1 u\|^2_{L_2(R^2;H)} \le \sum_{\substack{k,j=0\\0\le k+j\le 4}}^{4} \left\| A_{k,j} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j} \right\|^2_{L_2(R^2;H)} \le$$

$$\le \sum_{\substack{k,j=0\\0\le k+j\le 4}}^{4} \left\| B_{k,j} \right\|^2 \cdot \left\| A^{4-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j} \right\|^2_{L_2(R^2;H)} \le \sum_{\substack{k,j=0\\0\le k+j\le 4}}^{4} \left\| B_{k,j} \right\|^2 \cdot \left\| C^{k-j} \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j} \right\|^2_{L_2(R^2;H)} \le$$

$$\le \max_{k,j} \left\| B_{k,j} \right\|^2 \|U\|^2_{W_2^4(R^2;H)}.$$

Лемма доказана.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1), 2) и неравенство

$$q(\varepsilon) = \sum_{\substack{k+j=0\\0\le k+j\le 4}}^{4} C_{k.j}(\varepsilon) \cdot \left\| B_{k,j} \right\| < 1 \quad \left(0 \le \varepsilon < 1\right),$$

где числа $C_{k,j}(\varepsilon)$ определены из теоремы 1, равенствами (3)-(6). Тогда уравнение (1) регулярно разрешимо.

Доказательство. Напишем уравнение (1) в виде: $Pu = P_0 u + P_1 u = f$, где $f \in L_2\left(R^2;H\right)$, $u \in W_2^4\left(R^2;H\right)$. Тогда после замены $P_0 u = \omega$ получаем уравнение $\omega + P_1 P_0^{-1} \omega = f$ в $L_2\left(R^2;H\right)$. Так как при любом $\omega \in L_2\left(R^2;H\right)$ ($P_0 : W_2^4\left(R^2;H\right) \to L_2\left(R^2;H\right)$ изоморфный оператор)

$$\left\|P_1P_0^{-1}\omega\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}=\left\|P_1u\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}=\sum_{\substack{k,j=0\\0\le k+j\le 4}}^{4}\left\|A_{k,j}\,\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j}\right\|_{L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)}\le$$

$$\le\sum_{\substack{k,j=0\\0\le k+j\le 4}}^{4}\left\|B_{k,j}\right\|\cdot\left\|A^{4-(k+j)}\,\frac{\partial^{k+j}u}{\partial x^k\partial y^j}\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}\le\sum_{\substack{k,j=0\\0\le k+j\le 4}}^{4}C_{k,j}(\varepsilon)\cdot\left\|B_{k,j}\right\|\cdot\left\|P_0u\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}=$$

$$=\sum_{\substack{k,j=0\\0\le k+j\le 4}}^{4}C_{k,j}(\varepsilon)\cdot\left\|B_{k,j}\right\|\cdot\left\|\omega\right\|_{L_2(R^2;H)}=q(\varepsilon)\cdot\left\|\omega\right\|_{L_2(R^2;H)},$$

а $q(\varepsilon)<1$, то $\omega=\left(E+P_1P_0^{-1}\right)^{-1}f$, а $u=P_0^{-1}\left(E+P_1P_0^{-1}\right)^{-1}f$, отсюда следует, что $\left\|u\right\|_{W_2^4\left(R^2;H\right)}\le const\left\|f\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)}$.

Теорема доказана.

В частном случае из теоремы 1 следует

Следствие 1. Пусть A- самосопряженный оператор и выполняются условия теоремы 2 при $\varepsilon=0$. Тогда уравнение (1) регулярно разрешимо.

Этот результат получен в работе [4].

Автор благодарит проф. С.С.Мирзоева за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзоев С.С. Об одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Труды АН.Азерб., 1998, т.7(16), с.154-161.
2. Ягубова Х.В. Об условиях разрешимости операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка на всей плоскости // Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-матем.наук, 1998, № 3, с.94-101.
3. Мирзоев С.С., Джафаров И.Дж. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных // Математи. заметки, 2012, т.91:3, с. 470-472.
4. Мирзоев С.С., Исмаилова М.Ф. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка в гильбертовом пространстве // Вестник Бакинского Университета, сер.физ.-матем.наук, 2006, № 4, с.5-11.
5. Jafarov I.J. On solubility of one class of partial operator-differential equation // Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, 2004, №1, p.136-146.
6. Ismailova M.F. On the solvability of one class of fourth order elliptic type operator–differential equations // Proceedings IMM of NAS of Azerbaijan, 2005, v.23, p.53 – 58.

DÖRD TƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN BIR SİNFİ ÜÇÜN HƏLL OLUNMA ŞƏRTLƏRİ

M.F.İSMAYILOVA

XÜLASƏ

İşdə dörd tərtibli elliptik tip iki dəyişəndən asılı xüsusi törəməli baş hissəsi normal operator saxlayan operator diferensial tənliyin requlyar həll olunması haqqında kafi şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər operator-diferensial tənliyə daxil olan əmsalların xassələri vasitəsilə ifadə olunmuşdur. İşdə, həmçinin abstrakt Sobolev tipli fəzalarda aralıq törəmə operatorlarının norması tənliyin baş hissəsi ilə qiymətləndirilmişdir.

Açar sözlər: operator diferensial tənlik, hilbert fəzası, vektor-funksiya, aralıq törəmə, requlyar həll

CONDITIONS OF SOLVABILITY OF ONE CLASS FOURTH ORDER OPERATOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARTIAL DERIVATIVES

M.F.ISMAYILOVA

SUMMARY

In the paper sufficient conditions on regular solvability of fourth order elliptic type operator – differential equations with partial derivatives depending on two variables, the main part of which contain a normal operator are obtained. These conditions are expressed by the coefficient characteristics of operator-differential equations. The estimations of the norms of intermediate derivatives in Sobolev type abstract spaces over the main part of operator-differential equations are obtained.

Key words: operator differential equations, Hylbert space, vector-function, regular solution, partial derivatives

Поступила в редакцию: 15.08.2012 г.
Подписано к печати: 20.10.2012 г.