BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2012

İNFORMATİKA

УДК 519.8

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Р.Г.ГАМИДОВ, Н.К.АЛЛАХВЕРДИЕВА, А.Р.ГАМИДОВ
Бакинский Государственный Университет
kafedra.emeliyyatlartedqiqi@mail.ru

В предлагаемой работе излагается современный математический подход к описанию распределения ресурсов, адекватных реалиям и потребностям социально-экономической жизни современного общества. Изучается возможность численной реализации построения множества векторов коллективной полезности (МВКП) для одного класса задач. С этой целью разработан эффективный, удобный с точки зрения применения алгоритм. Эти свойства алгоритма обеспечиваются за счет использования специфики рассматриваемого класса задач.

Ключевые слова: коллективное принятие решения, вектор коллективной полезности, равновесная ситуация, оптимизация, множество Парето, оптимальное решение по Лоренцу.

1. Постановка задачи

Допустим, что имеется коллектив N= (1,2,…,n,n+1) из (n+1) – числа участников и рассматривается множество U, состоящее из векторов коллективной полезности $u=(u_1, u_2, ...,u_n, u_{n+1})$, где u_i означает индивидуальную полезность i -го участника.

Множество U формируется в результате совместной деятельности участников, интересы которых не полностью совпадают. В данной работе мы рассматриваем следующий вариант формирования U:
(n+1)-й участник имеет в своем распоряжении различные виды ресурсов, объемы которых образуют координаты вектора v. Эти ресурсы предназначены для распределения между участниками i, i= 1,2,....,n, коллектива N. Пусть i-й участник получает ресурсы, объемы которых выражаются в виде вектора v^i и

$$v^1 + v^2 + ... + v^n = v,\quad v^1 \geq 0, v^2 \geq 0, ...,v^n \geq 0 .$$

Полезность u_i, предназначенная i-му участнику от использования ресурса v^i определяется из решения собственной задачи оптимизации

$$u_i(v^i) = \max f_i(x^i, v^i) , \qquad x^i \in X^i(v^i),$$

(1)

где $X^i(v^i)$ -множество допустимых вариантов i-го участника, $f_i(x^i,v^i)$ – функция, с помощью которой он оценивает свой индивидуальный выбор.

Полезность u_{n+1} для (n+1) -ого участника определяется с помощью вектора полезности $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ по формуле

$$u_{n+1} = f_{n+1}(u_1, u_2, \ldots, u_n), \tag{2}$$

где $f_{n+1}(\cdot)$ - заранее заданная функция.

Таким образом, формируется вектор полезности $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ коллектива N. Обозначим через U множество всех таких векторов u.

Задача состоит в выборе обоснованного решения $u^0 \in U$, которое максимально учитывает интересы каждого участника и коллектива в целом.

Существует (см.напр.[1]) следующий вариант выбора $u^0 \in U$. Требуется, чтобы u^0 максимально отвечало на интерес (n+1)-го участника, игнорируя интересы остальных участников i, i = 1,2,…,n. Таким образом , $u^0 \in U$ определяется как равновесная ситуация некооперативной игры (n+1) – лиц. Из (1) и (2) непосредственно видно, что определение полезности u_{n+1} участника (n+1) связано с некоторыми трудностями. Эти трудности возникают из того, что аргументы функции $f_{n+1}(\cdot)$ задаются алгоритмическим образом, т.е. мы не имеем стандартную форму представления множества допустимых значений функции $f_{n+1}(\cdot)$.

В работе [2] эти трудности преодолены для следующего класса задач:

$$\begin{aligned} & v^1 + v^2 + \ldots + v^n = v, \quad v^1 \geq 0, \ \ldots, \ v^n \geq 0, \\ & x^i - A^i x^i \leq b^i + v^i, \qquad x^i \geq 0 \\ & c^i x^i \Rightarrow \max, \end{aligned} \tag{3}$$

где элементы матрицы A^i не отрицательны и множество

$$X^i = \{x^i \mid x^i - A^i x^i \leq b^i + v^i, \ x^i \geq 0\}$$

ограничено.

Следуя [3], $\max c^i x^i$ при $x^i \in X^i$ определяется следующим образом: Сначала определяем предел Ψ^* последовательности

$$\psi^0 = 0, \ \psi^{(r)} = \max(0, c^i + \psi^{(r-1)} A^i), \ r = 1,2,\ldots \tag{4}$$

и полагаем $\max c^i x^i = \Psi^*(b^i + v^i)$ при $x^i \in X^i$.

Обозначим $\Psi^*(b^i + v^i) = u_i(v^i)$. После этого определяется полезность u_{n+1} по формуле

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(v^i), \tag{5}$$

где $\alpha_i \geq 0$, i= 1,…, n, заранее заданные числа.

В (5) α_i означает долю дохода i -го участника, которая передается (n+1)-ому участнику взамен предоставленного ему ресурса v^i со стороны (n+1)-го участника.

Если дать предпочтение(n+1)–ому участнику, то принимается решение $u^* = (u_1^*, u_2^*, ..., u_{n+1}^*)$,
где

$$u_{n+1}^* = \max(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(v^i)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^* \ ,$$

$$\sum v^i = v \ , \quad v_i \geq 0, \ \ i = 1,...,n \, .$$

Нетрудно заметить, что u^* представляет равновесную ситуацию для полученной некооперативной игры (n+1) –лиц. Однако, несмотря на это, нельзя сказать, что u* считается "хорошим" решением для каждого игрока i ($1 \leq i \leq n$), поскольку при выборе вектора (v^1, v^2 ,…, v^n), а следовательно и вектора $u \in U$, игнорируются интересы остальных участников. Это особенно важно в том случае, когда ресурсы, которые предназначены для распределения между участниками i ($1 \leq i \leq n$), формируются усилием самих этих участников. Тогда возникает естественная задача: найти такое решение $u^0 \in U$, которое было бы "хорошим" с точки зрения каждого участника и с точки зрения команды (коллектива) в целом, т.е. надо произвести обоснованный коллективный выбор на множестве U.

Указанный вопрос служит предметом обсуждения для случая, когда рассматриваемая игра (n+1) –лиц соответствует классу задач, определяемых условием (3).

2. Метод решения задачи

В данном разделе также изучается вопрос о выборе вектора коллективного решения (ВКР) из множества векторов коллективной полезности (МВКП) или сужения этого множества при наличии дополнительной информации, не теряя при этом качества окончательного решения.

Предлагается следующий двухэтапный процесс принятия решения во множестве U, состоящем из векторов коллективной полезности.

Рассматривается функция

$$F_\beta(u) = F_\beta(u_1, u_2, ...u_n, u_{n+1}) = \beta u_{n+1} + (1-\beta)\sum_{i=1}^{n} u_i, \ 0 < \beta < 1, \ u_i = \eta_i u_i(v^i) \, ,$$

где β и $\eta_i \geq 0, i = 1,...,n$, заранее заданные числа.

Функция $F_\beta(u)$ удовлетворяет следующим свойствам:

a) $F_\beta(u)$ симметрична по переменным $u_1, u_2, \ldots, u_n$,

b) Если $u, v \in E^{n+1}$, $u \neq v$ и $u \geq v$, то $F_\beta(u) > F_\beta(v)$ при $0<\beta<1$.

Отметим, что $u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(v^i)$. Поэтому $F_\beta(u)$ фактически является функцией от переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$,. При $\eta_1 = \eta_2 = ... = \eta_n$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$,

$F_\beta(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i$,т.е. $F_\beta(u)$ становится функцией коллективной полезности (ФКП) для коллектива (1,2,…,n). В этом случае свойство a) представляет собой свойство анонимности (симметричности) для функции коллективной полезности. Свойство b) означает свойство солидарности ФКП $F_\beta(u)$ [4].

Однако, в общем случае, условие a) не представляет свойства анонимности. Это означает, что с помощью функции $F_\beta(u)$ мы не можем определить коллективный порядок R в смысле [1] по схеме: uRv <=> $F_\beta(u) \geq F_\beta(v)$.

Несмотря на этот недостаток, $F_\beta(u)$ может быть полезным при построении окончательного решения при дополнительных предположениях, которые являются реальными во многих практических ситуациях .

Предположение 1 . Пусть u, v∈U и $\sum_{i=1}^{n} u_i > \sum_{i=1}^{n} v_i$. Тогда коллектив (1,2,…,n) отдает предпочтение u по сравнению с v .

Замечание. Если u лучше, чем v с точки зрения коллектива (1,2,…,n), это не означает, что (n+1) –й участник предпочитает u по сравнению с v.

Предположение 2. Если $\sum_{i=1}^{n} u_i^0 > \sum_{i=1}^{n} v_i^0$, то среди всех векторов коллективной полезности существует вектор u∈U такой, что имеет место $\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i^0$ и u максимально удовлетворяет интересам каждого участника i (1≤ i≤ n). Будем называть такой вектор удачно выбранным решением.

Удачно выбранное решение составляется в результате перераспределения ресурсов между участниками i, 1≤ i ≤ n. Однако, при этом полезность участника (n+1) оставляем в объеме u^0_{n+1}, где u^0_{n+1} (n+1)-ая координата выбора коллективной полезности $(u_1^0,...,u_n^0,u_{n+1}^0) \in U$. Пусть (u_1, u_2, …,u_n, u_{n+1})∈U и $f_1 = \sum_{i=1}^{n} u_i$, $f_2 = u_{n+1}$

Рассмотрим множество

$$\Phi = \left\{ (f_1 , f_2) \middle| f_1 = \sum_{i=1}^{n} u_i ,\, f_2 = u_{n+1}, (u_1,...,u_n,u_{n+1}) \in U \right\}$$

Предположение 3. Φ -ограниченное замкнутое множество. Обозначим $f = (f_1 , f_2)$ и рассмотрим Парето порядок во множестве Ф для задачи $f \to \max, f \in \Phi$. Множество Парето эффективных точек множества Φ обозначим через $\Phi(p)$ и пусть $U(p)=\{u\in U|f(u)\in \Phi(p)\}$.

Из предположения 3 следует, что $\Phi(p)\neq \phi$ и справедлива

Теорема. Множество U(p) содержит наилучшее коллективное решение $u^0\in U$.

Построение множества $\Phi(p)$ можно осуществлять с помощью простого и эффективного алгоритма, разработанного в работе [5]. Можно использовать и диалоговый вариант этого алгоритма, который получается, как частный случай из [5].

В работе [5] одновременно показан способ построения множеств $\overline{\Phi}(p)\subset\Phi(p)$, которое состоит из Лоренц эффективных точек. Это множество представляет важность, если мы хотим соблюдать принцип равенства для нового коллектива из двух участников (1,2), где первый участник это – коллектив (1,2,…n) и второй участник – (n+1)-й участник коллектива N.

3. Числовой пример

На примере с конкретными данными покажем реализацию отдельных этапов процесса принятия решения, где коллектив состоит из трех участников A_0, B_1 и B_2. A_0 - это участник, который выполняет роль распределителя ресурсов, а участники B_1 и B_2 используют эти ресурсы по сценарии которые представляются в виде индивидуальной задачи принятия решения.

Агент A_0 распределяет свои ресурсы в обьеме 50, 100, 30 условной единицы по правилу

$$u_1+v_1\le 50,\ u_2+v_2\le 100,\ u_3+v_3\le 30,\ u_i,\ v_i\ge 0,\quad i=1,2,3$$

между агентами B_1 и B_2, которые реализуют эти ресурсы следующим образом:

Индивидуальная задача для B_1:

$$5x_1-x_2-x_3\le u_1, -x_1+5x_2-x_3\le u_2, -x_1-x_2-5x_3\le u_3,\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0,$$

$$f_1(x^1)=2x_1+2x_2-x_3\Rightarrow \max. \tag{6}$$

Индивидуальная задача для B_2:

$$6x_4-3x_5-x_6\le v_1,\ -3x_4+6x_5-x_6\le v_2,\ -x_4-3x_5+6x_6\le v_3,$$

$$x_4\ge 0,\ x_5\ge 0, x_6\ge 0,$$

$$f_2(x^2)=-x_4+2x_5+4x_6\Rightarrow \max. \tag{7}$$

Решаем задачу (6) симплекс методом или методом из [5], находим ее оптимальное решение:

$$x_1^0=\frac{1}{18}(4u_1+u_2+u_3), x_2^0=\frac{1}{18}(u_1+4u_2+u_3), x_3^0=\frac{1}{18}(4u_1+u_2+4u_3).$$

Вычисляем оптимальное значение $f_1^{\max}(u)$ целевой функции

$$f_1\left(x^1\right): f_1^{\max}(u) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \ .$$

Решение задачи (7) дает следующие выражения оптимального решения x_4^0 , x_5^0 , x_6^0 через используемых обьем ресурсов v_1, v_2, v_3:

$$x_4^0 = \frac{1}{42}(11v_1 + 7v_2 + 3v_3), x_4^0 = \frac{1}{126}(19v_1 + 35v_2 + 9v_3), x_4^0 = \frac{1}{42}(5v_1 + 7v_2 + 9v_3).$$

Выражение оптимального значения $f_2^{\max}(v)$ целевой функции $f_2(x^2)$ через v_1, v_2, v_3 будет

$$f_2^{\max} = \frac{1}{126}(65v_1 + 133v_2 + 117v_3).$$

Теперь формируем глобальную полезность для коллектива с двумя участниками B_1 и B_2:

$$F(u,v) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{126}(65v_1 + 133v_2 + 117v_3) \ .$$

Предполагаем, что агент A_0 берет 50% от дохода участника A_1 и 10% от дохода участника A_2 в замен представления им свои ресурсы и формирует свою полезность

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{4}(u_1 + u_2) + \frac{1}{1260}(65v_1 + 133v_2 + 117v_3).$$

Решаем следующую двухкритериальную задачу с целью определения компромиссного варианта (u^k, v^k) распределения ресурсов между A_0 и коллектива (B_1, B_2)

$$F(u,v) \to \max \quad , \quad \Phi(u,v) \to \max ,$$

$$u_1 + v_1 \le 50, u_2 + v_2 \le 100, u_3 + v_3 \le 30, u_i, v_i \ge 0, \ i = 1, 2, 3. \qquad (8)$$

Сначала по схеме, предложенной в [5], построим множество эффективных оценок задачи (8). Решается задача:

$$\frac{1}{4}(u_1 + u_2) + \frac{1}{1260}(65v_1 + 133v_2 + 117v_3) \to \max ,$$

$$u_1 + v_1 \le 50, u_2 + v_2 \le 100, u_3 + v_3 \le 30, u_i, v_i \ge 0, i = 1, 2, 3$$

и находим ее оптимальное решение: $(u^1, v^1) = (50 , 100 , 0 , 0 , 0 , 30)$.

Затем решаем задачу

$$\frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{126}(65v_1 + 133v_2 + 117v_3) \to \max ,$$

$$u_1 + v_1 \le 50, u_2 + v_2 \le 100, u_3 + v_3 \le 30, u_i, v_i \ge 0, i = 1, 2, 3,$$

и находим ее оптимальное решение: $(u^2, v^2) = (0 , 0 , 0 , 50 , 100 , 30)$.

Далее определяем крайные точки $A(\Phi^1, F^1)$ и $B(\Phi^2, F^2)$ паретовой границы (рис.1).

$\Phi^1 = \Phi(u^1,v^1) = 1/4\ (50+100) + 117\cdot 30/1260 = 75/2+117/41 \approx 40,$
$F^1 = F\ (u^1,v^1) = 1/2(50+100) + 117\cdot 30/126 = 75 + 28 = 103\ ,$
$\Phi^2 = \Phi(u^2,v^2) = 1/1260\ (65\cdot 50 + 133\cdot 100 + 117\cdot 30) = 15{,}1,$
$F^2 = F\ (u^2,v^2) = 1/126\ (65\cdot 50 + 133\cdot 100 + 117\cdot 30) \approx 161\ .$

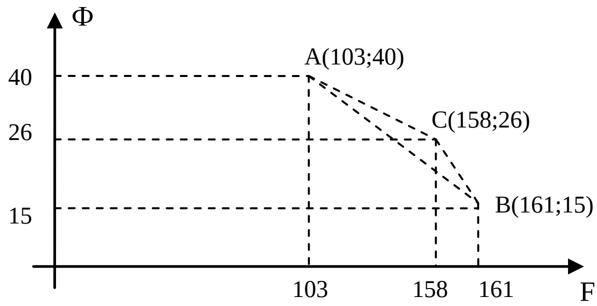

Рис. 1

Согласно алгоритму из [5] находим уравнение прямой аФ+вF = с , которая проходит через точки А и В. Берем значение а ≈2 , в≈1 и составляем задачу
$2\Phi(u,v)+1\cdot F(u,v) \to \max, u_1+ v_1 \le 50, u_1+ v_1 \le 50, u_2+ v_2 \le 100, u_3 + v_3 \le 30,$
(9) с целью нахождения точки излома паретовой границы в критериальном пространстве (F,Ф).Решая задачу (9) находим ее оптимальное решение (u^3,v^3): $(u^3,v^3) = (50, 0, 0, 0, 100, 30)$ и определим новую оценку С (Φ^3, F^3):
$\Phi^3 = \Phi(u^3,v^3) \approx 26$, $F^3 = F(u^3,v^3) \approx 158$ и отмечаем точку С(158;26) на координатной плоскости (F,Ф).

Применение указанной процедуры не выявливает новые точки излома и тем самым завершается построение множества Парето границы задачи (5). Эта граница состоит из отрезков АС и СВ. Искомое компромиссное решение следует принимать или на отрезке АС, или на АВ. Эту миссию выполняет агент A_0 и коллектив (B_1, B_2) по договоренности между собой. С построением паретовой границы мы старались облегчить процесс принятия решения.

Пусть в коллективе (A_0, B_1, B_2) агент A_0 согласен получить доход от распределения своего ресурса в размере 26. Тогда суммарный доход коллектива будет 158.

На втором этапе процесса принятия решения участники коллектива (B_1, B_2) заново перераспределяют ресурсы, таким образом, чтобы после передачи агенту A_0 на 26 единиц от этого дохода они сами стали довольными между собой, т. е. они решают двухкритериальную задачу:
$f_1(u)=(\ u_1+u_2\ )\ /2 \to \max,\ f_2(v) = (\ 65v_1+ 133v_2+117v_3\ )\ /126 \to \max,$
(10)

$u_1 + v_1 \le 50,\ u_2 + v_2 \le 100,\ u_3 + v_3 \le 30$

и на паретовой границе задачи (10) агент B_1 и агент B_2 находят «наилучшее» решение с точки зрения каждого из них.

Построение паретовой границы задачи (10) :

Снова используем алгоритм из [5] и строим паретовую границу задачу (7) . Находим $f_{1,max}(u^0,v^0) = (50 + 100)/2 = 75$
и выбираем оптимальное решение (u^0, v^0) таким образом, чтобы (u^0,v^0) одновременно было эффективным. Тогда нетрудно заметить, что

$$(u^0,v^0) = (50;100;0;0;0;30) .$$

Вычисляем $f_2(u^0,v^0) = 1/126 \cdot 117 \cdot 30 \approx 28$
и определяем точку В (75;28), которая означает правый конец паретовой границы задачи (9) (рис.2).

Теперь находим $f_{2,max}= f_2(u^1, u^1) =1/126\cdot(65\cdot 50+133\cdot 100 +117 \cdot 30) \approx 160$.
Точка А (0;160) означает левый конец паретовой границы.

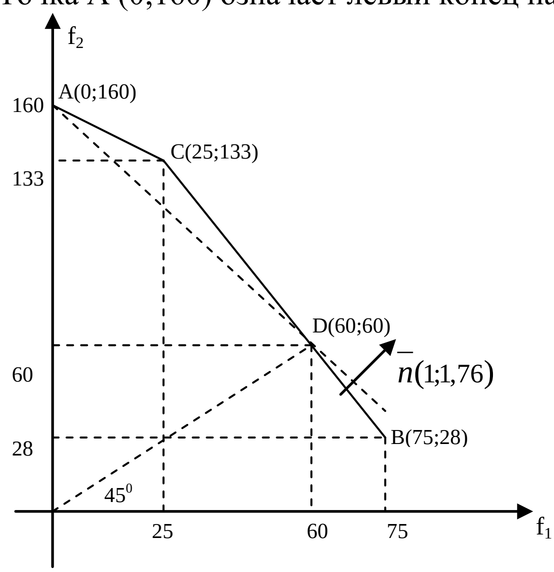

Рис.2

Решаем задачу

$$1,76 \cdot 1/2 \cdot (u_1 + u_2) + 1/126 \cdot (65u_1 + 133v_2 + 117v_3) \rightarrow \max ,$$

$$u_1+ v_1 \le 50,\ u_2 + v_2 \le 100,\ u_3 + v_3 \le 30,\ u_i , v_i \ge 0.$$

Находим ее оптимальное решение $(u^2, v^2) = (50, 0, 0, 0, 100, 30)$ и определяем точку С с координатами:

$$f_1 (u^2, v^2) = 1/2\cdot 50 = 25,\ f_2 (u^2,v^2) =1/126 \cdot(133 \cdot 100 +117\cdot 30) \approx 133$$

на плоскости (f_1 , f_2) .

Дальнейшие итерации алгоритма [5] не выявляют новые точки излома паретовой границы задачи (10). Поэтому ломаная линия (АСВ) представляет паретовую границу задачи (10).

Таким образом, нам остается найти наилучшее коллективное решение на границе (АВС). Если участники коллектива $(В_1,В_2)$ придерживают принципа равенства, то решения (u, v), которые определяют оценку D(60, 60) следует выбирать как коллективное решение. Если каждый участник отдает поровну агенту A_0, которое ему положен, то каждому из них остается 60 -13=47 единиц. Тогда (26;47;47) будет оптимальным коллективным решением для коллектива (A_0, B_1,B_2). Если коллектив (B_1, B_2) не принимает решение (60; 60), но хочет принять другое решение без ущерба на коллективный доход, то ему придется принять решение на границе (ACD), которая состоит из оптимальных решений по Лоренцу [4]. Среди таких решений C (25; 133) обладает особое свойство. Если от точки C выполнить шаг вдоль CD на сторону D, то агент B_2 проигрывает в два раза меньше чем выигрывает агент B_1 и, тем самым общая полезность уменьшается. Если от C перейти в сторону A, то выигрыш агента B_2 почти равно проигрышу агента B_1. Поэтому решение (25; 133) обладает наибольший реальный шанс, чтобы оно было принято как коллективное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981, 334 с.
2. Hamidov R.H. An algoritm for equlibrium point of one N-person noncooperative game. // The 38th annual İranian Mathematical Conference, Tehran, 2007, p.10-14.
3. Мееров М.В., Берщанский Я.М. Решение динамических задач оптимизации для линейных многосвязных систем. Препринт. М.: Институт проблем управления, 1975, 160 с.
4. Мулен Э. Кооперативное принятие решений. Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991, 464 с.
5. Hamidov R.H. One bicriterian dinamic linear program and its solution. // The International Conference on Problems of Cybernetics and Informatics, Baku, 2006, p.7-11.

EHTİYATLARIN PAYLANMASININ BİR MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

R.H.HƏMİDOV, N.K.ALLAHVERDİYEVA, A.R.HƏMİDOV

XÜLASƏ

Təqdim olunan işdə müasir cəmiyyətin sosial-iqtisadi həyatının reallıqları və tələbatlarına adekvat olan ehtiyatların paylanmasının təsvirinə müasir riyazi yanaşma şərh edilir. Bir sinif məsələlər üçün kollektiv mənfəət vektorları çoxluğunun qurulmasının ədədi reallaşdırılması imkanı öyrənilir. Bu məqsədlə tətbiq olunma nöqteyi-nəzərindən effektiv, əlverişli bir alqoritm işlənib hazırlanmışdır. Alqoritmin bu xüsusiyyətləri baxılan məsələlər sinfinin spesifik xüsusiyyətlərindən istifadə olunması hesabına təmin olunur.

Açar sözlər: kollektiv qərar qəbuletmə, kollektiv faydalılıq funksiyası, optimallaşdırma, Pareto optimal, Lorents optimal.

ON ONE RESOURCE ALLOCATION PROBLEM

R.H.HAMIDOV, N.K.ALLAHVERDIYEVA, A.R.HAMIDOV

SUMMARY

Resourse allocation problem is traditional and urgent in the social and economic life of a modern society. In this paper we consider the problem as a collective decision problem. We try to solve the problem from this point of view, taking a special class of problems and using its specificity in order to have additional possibility in developing decision making procedure.

Key words: collective choice, collective decision, egalitarion solution choice set, collective utility function, Pareto optimal, Lorenz optimal.

Поступила в редакцию: 12.02.2012 г.
Подписано к печати: 08.05.2012 г.