

## МЕХАΝІКА

УДК 05.19.23

ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОГО КОЛЬЦА  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕРАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО  
ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА

*Бакинский Государственный Университет*  
*laura\_fat@rambler.ru*

*В работе исследована потеря устойчивости многослойного линейно вязко-упругого кольца, составленного из различных материалов и находящегося под действием неравномерно распределенного внешнего давления заданной интенсивности. Решение задачи осуществлено посредством вариационного метода смешанного типа в сочетании с методом Рэлея-Ритца. Численно выявлено влияние числа слоев в пакете и параметра неравномерности внешнего давления на критическое время выпучивания.*

**Ключевые слова:** многослойное кольцо, вязко-упругое кольцо, пакет, критическое время, параметр неравномерности, гидростатичность.

1. Зададим полярную систему координат  $(z, \varphi)$  и введем в рассмотрение кольцо радиуса  $R$  и толщины  $2h$ . Предположим, что оно составлено из  $s$  чередующихся, соединенных между собой по всем окружностям, разных по толщине концентрических слоев с разными значениями модуля упругости  $E_{k+1}$  и функциями ползучести  $D_{k+1}\{(t-\tau)\sigma(\tau)\}$  ( $k = 0, 1, \dots, (s-1)$ ). Далее, будем их считать линейными относительно напряжения  $\sigma$ :

$$D_{k+1}\{(t-\tau)\sigma(\tau)\} = F'_{k+1}(t-\tau)\sigma(\tau),$$

где  $F'_{k+1}(t-\tau)$ - разностное ядро ползучести, а штрих означает дифференцирование по параметру  $(t-\tau)$ . Толщину каждого слоя обозначим через  $\delta_k$ . Таким образом,  $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_s = 2h$  есть полная толщина кольца.

Выпишем физическое соотношение для пакета, в целом, в виде одного равенства [1]:

$$\varepsilon^\Phi = \frac{\sigma}{E_{k+1}} + \int_0^t F'_{k+1}(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad a_k \leq z \leq a_{k+1}, \quad (1.1)$$

где

$$a_k = -h + \sum_{i=0}^s \delta_j \quad (\delta_0 = 0). \quad (1.2)$$

Рассмотрим теперь выпучивание выбранного кольца под действием неравномерно распределенной по поверхности сжимающей нагрузки вида

$$q = q_0 f(\varphi), \quad (1.3)$$

где  $f(\varphi)$  - заданная достаточно гладкая функция, а  $q_0$  - управляющий параметр нагружения.

Вследствие гипотезы плоских сечений запишем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + kz.$$

Величину  $\varepsilon_0$  и кривизну  $k$  определим по формулам нелинейной теории тонких оболочек [2]:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{R} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2R^2} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right)^2 \right\}, \quad (1.4)$$

$$k = -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right). \quad (1.5)$$

В дальнейших рассуждениях примем

$$\sigma = -\frac{Rq_0 f(\varphi)}{2h} + \frac{3z}{2h^3} M \quad \text{или} \quad \dot{\sigma} = \frac{3z}{2h^3} \dot{M}. \quad (1.6)$$

Учитывая формулы (1.1)-(1.6) в выражении функционала (1.6) из [5], после интегрирования по  $z$  находим:

$$\begin{aligned} K(\varphi) = & -\frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} \right) \dot{M} - \frac{q_0 f(\varphi)}{2} \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} - \dot{v} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} + \dot{w} \right)^2 \right] d\varphi - \\ & - \frac{9R}{8h^6} \int_0^{2\pi} \dot{M}^2 \eta_2 d\varphi + \frac{3R^2 q_0}{4h^4} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \dot{M} \gamma_1 d\varphi - \frac{9R}{4h^6} \int_0^{2\pi} \dot{M} \gamma_2 d\varphi + \\ & + \frac{3R^2 q_0}{4h^4} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \dot{M} \beta_1 d\varphi - \frac{9R}{4h^6} \int_0^{2\pi} M \dot{M} \beta_2 d\varphi, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\eta_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^2 dz, \quad \gamma_1 = \sum_{k=0}^{s-1} \int_0^t F'_{k+1}(t-\tau) d\tau \int_{a_k}^{a_{k+1}} z dz,$$

$$\gamma_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \int_0^t F''_{k+1}(t-\tau) M(\tau) d\tau \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^2 dz, \quad \beta_1 = \sum_{k=0}^{s-1} F'_{k+1}(0) \int_{a_k}^{a_{k+1}} z dz,$$

$$\beta_2 = \sum_{k=0}^{s-1} F'_{k+1}(0) \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^2 dz,$$

причем под точкой здесь и далее будем понимать дифференцирование по физическому времени  $t$ .

2. При использовании вариационного метода решения, с целью последующего применения метода Рэлея-Ритца, одним из центральных вопросов является выбор интерполяционных функций для задания форм прогиба, момента и касательного перемещения. В дальнейшем ограничимся двухчленной аппроксимацией:

$$w = w_0(t) + w_1(t) \cos 2\varphi. \quad (2.1)$$

Это существенное упрощение накладывает определенные условия на вид функции  $f(\varphi)$ . Такой выбор представляет ограниченный практический интерес. Однако при таком рассмотрении, как это будет установлено ниже, соответствующие вычисления оказываются довольно простыми. Окончательный результат дает возможность выявить суть явления как качественно, так и количественно и, тем самым, установить ряд новых эффектов. Тогда для  $M$  и  $v$  имеем:

$$M = m(t) \cos 2\varphi, \quad v = v_0(t) \sin 2\varphi. \quad (2.2)$$

Для дальнейших целей конкретизируем функцию  $F'_{k+1}(t-\tau)$ , задав её в экспоненциальном виде:

$$F'_{k+1}(t-\tau) = \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad F''(t-\tau) = -\alpha \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad (2.3)$$

где  $A_{k+1}$  – коэффициенты ползучести материалов слоев, а показатель  $\alpha$  принимается одинаковым для всего пакета.

В качестве  $f(\varphi)$  примем функцию

$$f(\varphi) = 1 + \mu \sin^2 \varphi, \quad (2.4)$$

в которой параметр  $\mu > 0$ ,  $\mu \in (0, 1]$  и характеризует не гидростатичность сжимаемого давления.

Последующий ход вычислений заключается в том, что соотношения (2.1)-(2.4) подставляются в выражение функционала (1.7) и после интегрирования по  $\varphi$  находим его как функцию  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $v_0$ ,  $m$  и их производных по  $t$ . Далее,  $K$  варьируется по  $\dot{w}_0$ ,  $\dot{w}_1$ ,  $\dot{v}_0$  и  $\dot{m}$ , в результате чего получается система четырех уравнений. После ряда элементарных выкладок приходим к одному линейному уравнению первого порядка отно-

сительно  $w_1$ . Введем следующие безразмерные соотношения, позволяющие значительно сократить последующие записи:

$$y = \frac{w_1}{h}, \quad \omega = \frac{q_0}{q_{0кр}^0},$$

где  $q_{0кр}^0$  - значение критической силы при  $\mu = 0$  и согласно [5]

$$q_{0кр}^0 = \frac{16h^6}{9R^3} \eta_2^{-1}.$$

Такое обезразмеривание  $\omega$  преследует цель записать далее задачу в виде, явным образом зависящим от  $\mu$ . После обезразмеривания, окончательно получаем уравнение

$$\dot{y} - \frac{\omega(1+0,75\mu)}{1-\omega(1+0,75\mu)} \frac{\beta_2}{\eta_2} \left\{ y - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau) d\tau \right\} = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) необходимо дополнить начальным условием [5]

$$y_0 = y^\vee \frac{1}{1-\omega(1+0,75\mu)}, \quad (2.6)$$

где

$$y^\vee = \frac{w_1^\vee}{h},$$

а  $w_1^\vee$  - задаваемая амплитуда начального несовершенства.

Согласно [5], можно сразу написать решение уравнения (2.5):

$$y(t) = y_0 \left\{ \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} + \frac{\alpha}{\lambda} \right\}, \quad (2.7)$$

здесь  $\beta = \frac{\omega(1+0,75\mu)}{1-\omega(1+0,75\mu)} \frac{\beta_2}{\eta_2}$  и  $-\lambda = \beta - \alpha$ .

**3.** Полученное выше решение (2.7) в принципе применимо для любых значений  $t$ . Однако очень большие прогибы в кольцах, являющихся элементами конструкций, недопустимы сами по себе. Поэтому весьма разумно ограничить время эксплуатации кольца условием достижения прогибом некоторой величины, фиксированной из тех или иных физически обоснованных соображений и, тем самым, определить критическое время устойчивости  $t_{кр}$ . Примем  $\tilde{y} = 1$ , что соответствует безразмерному прогибу, равному половине толщины. Согласно отмеченному, запишем

$$1 = y_0 \left\{ \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) e^{-\lambda t_{кр}} + \frac{\alpha}{\lambda} \right\},$$

откуда находим

$$t_{кр} = -\frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\lambda - \alpha y_0}{\lambda y_0 \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)} \right|. \quad (3.1)$$

Далее, ограничимся случаем  $\lambda < 0$  и приведем некоторые результаты вычислений, соответствующих различным значениям физических и геометрических параметров, характеризующих кольцо. Примем

$$A_1 = 0,8 \text{ сек}^{-1}; \quad y_0^\vee = 10^{-1}; \quad \alpha = 0,005.$$

Введем дополнительные безразмерные обозначения

$$E = \frac{E_1}{E_2}, \quad A = \frac{A_2}{A_1} \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

Для двухслойного ( $s = 2$ ) и трехслойного ( $s = 3$ ) кольца можно определить отношение  $\beta_2/\eta_2$ , которое, соответственно, записывается в видах

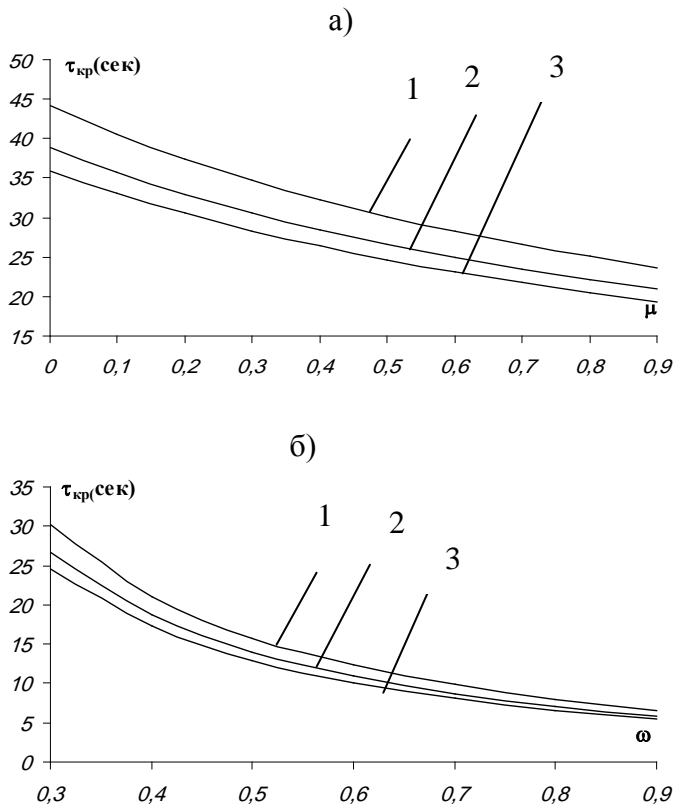
$$\frac{\beta_2}{\eta_2} = A_1 \frac{1 + 3\kappa^2 + EA\kappa^3 + 3E\kappa}{1 + 3\kappa^2 + E\kappa^3 + 3E\kappa}, \quad \frac{\beta_2}{\eta_2} = A_1 \frac{1 + 1,5\kappa + 0,75\kappa^2 + 0,125EA\kappa^3}{1 + 1,5\kappa + 0,75\kappa^2 + 0,125E\kappa^3}.$$

На рисунке 1 приведены зависимости критического времени  $t_{кр}$  от величин  $\mu$  и  $\omega$ , которые вычислялись для  $s = 2$ ,  $s = 3$  и для однородного случая.

Таким образом, численный эксперимент позволяет сделать следующие выводы:

- увеличение параметра неравномерности  $\mu$  приводит к уменьшению величины критического времени  $t_{кр}$ ;
- при увеличении  $\omega$  наблюдается уменьшение  $t_{кр}$ ;
- критическое время для двухслойного кольца больше, чем для трехслойного кольца и для однородного случая, откуда следует, что при прочих равных условиях это приводит к возможности более рационально использовать несущую способность кольца.

В заключение отметим, что конструированием неоднородности можно увеличить (уменьшить) критическое время устойчивости и, тем самым, в определенном смысле оптимизировать конструкцию.



**Рис. 1.** Зависимости критического времени устойчивости  $t_{кр}$  от параметров  $\mu$  (а,  $E = 0,25; \kappa = 4; A = 0,25; \omega = 0,3$ ) и  $\omega$  (б,  $E = 0,25; \kappa = 4; A = 0,25; \mu = 0,5$ ). Цифры у кривых соответствуют разным числам слоя: (1)-  $s = 2$ , (2) –  $s = 3$ , (3) – однородный случай.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бугаков Н.Н. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973, 287 с.
2. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: КГУ, 1975, 325 с.
3. Амензаде Р.Ю., Ахундов М.Б. Вариационный метод механики гетерогенных нелинейно вязко-упругих твердых тел // Докл. РАН. 2006, т. 410, № 1, с. 45-48.
4. Амензаде, Р.Ю., Гурбанов Р.А., Гусиев Х.Т. Применение вариационного принципа к задаче выпучивания неоднородного по толщине нелинейно-упругого кольца // Журнал «Механика композитных материалов». 1995, № 2, с. 262-268.
5. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т., Фатуллаева Л.Ф. Предельное время сжатого многослойного вязко-упругого кольца // Вестник Чувашского Государственного Педагогического Университета им. И.Я.Яковлева. Серия «Механика предельного состояния». 2008, № 2, с. 5-15.

**QEYRİ-MÜNTƏZƏM PAYLANMIŞ XARİCİ TƏZYİQİN TƏSİRİ ALTINDA  
OLAN ÖZLÜ-ELASTİKİ HALQANIN  
SON HƏDD VƏZİYYƏTİ**

**L.F. FƏTULLAYEVA**

**XÜLASƏ**

İşdə müxtəlif materiallardan hazırlanan və verilmiş intensivliyə malik qeyri-müntəzəm paylanmış xarici təzyiqin təsiri altında olan çoxlaylı, xətti özlü-elastiki halqanın dayanıqlığının itirilməsi məsələsi tədqiq olunmuşdur. Qoyulmuş məsələ Rele-Rits üsulu ilə birlikdə qarışıq tipli variasiya üsulu ilə həll olunur. Ədədi olaraq paketdəki layların sayının və xarici təzyiqin qeyri-müntəzəmlik parametrinin qabarmanın böhran zamanına təsiri öyrənilmişdir.

**Açar sözlər:** çoxlaylı halqa, özlü-elastiki halqa, paket, böhran zaman, qeyri-müntəzəmlik parametri, hidrostatiklik.

**LIMITING CONDITION OF THE VISCOUS-ELASTIC RING  
UNDER THE INFLUENCE OF NON-UNIFORMLY DISTRIBUTED  
EXTERNAL PRESSURE**

**L.F. FATULLAYEVA**

**SUMMARY**

The work researches the loss of stability of the multilayered linearly viscous-elastic ring that is made of various materials and is under the influence of non-uniformly distributed external pressure of set intensity. The problem decision is carried out by means of a variation method of the mixed type in combination to Rayleigh-Ritz method. The influence of the number of layers in a package and parameter of non-uniformity of external pressure upon critical time of the buckling is numerically revealed.

**Keywords:** a multilayer ring, a viscous-elastic ring, a package, critical time, non-uniformity parameter, hydrostatic character.

*Поступила в редакцию: 16.01.2012 г.*

*Подписано к печати: 08.05.2012 г.*