УДК: 517.988.8

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ b-БАЗИСА И b-ФРЕЙМА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.И.ИСМАЙЛОВ
Бакинский Государственный Университет
miqdadismailov1@rambler.ru

Работа посвящена изучению вопроса устойчивости b-базиса и b-фрейма в банаховых пространствах. В работе даны критерии об эквивалентных системах, а также найдены условия устойчивости b-базиса и b-фрейма в банаховых пространствах. Полученные результаты являются соответствующими обобщениями известных результатов об устойчивости базиса и фрейма в банаховых пространствах.

Ключевые слова: b-базис, b-полнота, b-эквивалентность, b-фрейм.

Иногда для изучения базисных свойств системы в том или ином пространстве достаточно установить близость, в определенном смысле, этой системы к системе с хорошо изученными базисными свойствами и воспользоваться известными теоремами о близких системах. К таким теоремам относятся теорема Пэли-Винера, Крейна-Рутмана-Мильмана, Бари, Birkhoff-Rota, теорема-$1/4$ Кадеца и др. Вопросы эквивалентности систем и устойчивости базиса в гильбертовых и банаховых пространствах изучались М.Г.Крейном, Д.П.Мильманом, М.А.Рутманом, А.С.Маркусом, И.Ц.Гохбергом, Н.К.Бари и др. В [1,2] устойчивость базиса в банаховых пространствах изучается при малых возмущениях. Эквивалентность систем и устойчивость базиса в гильбертовых пространствах исследовалась в [3], где вводится понятие квадратично близких систем, доказывается, что минимальная система, квадратично близкая к базису Рисса, есть базис Рисса. Этими и другими фактами, относительно устойчивости базиса в гильбертовых пространствах можно ознакомиться в [4]. Вводя понятие q-устойчивости, а также слабой q-устойчивости, в [5] исследовалась устойчивость базиса Бесселя в банаховых пространствах. Определив точную границу возмущений, в [6] получены результаты по устойчивости базиса в банаховых пространствах, а также в локально выпуклых пространствах. По поводу результатов относительно эквивалентности систем и устойчивости базиса в банаховых пространствах можно обратиться [7, 8]. В [8] приводятся обобщения на банаховый случай, результаты об устойчивости базиса из подпространств в гильбертовых пространствах.

Устойчивость фрейма в гильбертовых и банаховых пространствах изучались R.Balan, O.Christensen, C.Heil, D.Stoeva и др. Заметим, что понятие фрейма было введено Р.Дж.Даффином и А.Шеффером при изучении негармонических рядов Фурье ([9]). Об устойчивости фрейма в гильбертовых и банаховых пространствах известны результаты, например, [10-12].

В настоящей работе рассматривается устойчивость b-базиса ([8, 13]) и b-фрейма ([14]) в банаховых пространствах, которые являются соответствующими обобщениями классических понятий базиса Шаудера и фрейма в банаховых пространствах. Введены понятия b-подчиненных, b-эквивалентных систем и установлены связи между этими понятиями, при возмущении b-базиса. Изучены условия устойчивости b-базиса и b-фрейма. Результаты, полученные в работе, являются обобщениями ряда результатов [1], [6], [10] и [12].

Некоторые предварительные сведения

Приведем некоторые понятия и факты, используемые в работе.

Всюду далее X, Z − B-пространства, Y − нормированное пространство, $b(x,y): X \times Y \to Z$ − билинейное отображение, обладающее свойством ограниченности: существует такое число $M > 0$, что

$$\|b(x,y)\|_Z \le M\|x\|_X \|y\|_Y \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in Y. \quad (1)$$

В целях упрощения записи мы используем следующее обозначение $xy \equiv b(x,y)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Для подмножества M в Y, через $L_b(M)$ обозначается совокупность всевозможных конечных сумм вида $\sum x_i m_i$, где $x_i \in X$, $m_i \in M$.

Определение 1. Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем b-полной в Z, если множество $L_b(\{y_n\}_{n\in N})$ всюду плотно в Z. Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем b-минимальной в Z, если при любых $x \in X$ и $k \in N$ элемент xy_k не принадлежит замыканию $L_b(\{y_n\}_{n\in N, n\ne k})$ в Z. Систему $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ назовем b-базисом в Z, если для любого $z \in Z$ имеет место единственное представление

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \ x_n \in X.$$

Определение 2. Системы $\{y_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$ назовем

b-биортогональными, если $y_n^*(xy_k) = \delta_{nk}\, x$ для любых $n,k \in N$ и $x \in X$, здесь δ_{nk} − символ Кронекера. Систему $\{y_n^*\}_{n\in N}$ назовем b-сопряженной к системе $\{y_n\}_{n\in N}$.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Теорема 1 ([6]). Пусть система $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k x_k$ сходится в X при любой монотонной последовательности чисел $\varepsilon_n \to 0$ тогда и только тогда, когда частичные суммы $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ограничены.

Теорема 2 ([10]). Пусть $G: X \to X$ линейный оператор. Предположим, что существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1)$ такие, что $\|x - G(x)\|_X \le \lambda_1 \|x\|_X + \lambda_2 \|G(x)\|_X$ для любого $x \in X$. Тогда G ограничен и ограниченно обратим в X.

Устойчивость b-базиса

Пусть Y_1 − нормированное пространство, а Z_1 − B-пространство, отображение $b_1 : X \times Y_1 \to Z_1$ $(b_1(x,y) \equiv x \cdot y)$ билинейно и существует число $M_1 > 0$ такое, что

$$\|x \cdot y\|_{Z_1} \le M_1 \|x\|_X \|y\|_{Y_1} \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in Y_1. \qquad (2)$$

По аналогии с понятием подчиненных последовательностей, приведем следующее определение.

Определение 3. Систему $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ назовем b-подчиненной к системе $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$, если из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ в Z следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n$ в Z_1 для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z и имеет b-сопряженную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ такая, что для любых $z \in Z$ и $n \in N$ имеет место соотношение: $\left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^*(z) \cdot \psi_k \right\|_{Z_1} \le M(z)$.

Тогда $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-подчинена к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, причем для любого $z \in Z$ справедливо

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^*(z) \cdot \psi_k \right\|_{Z_1} \le c\|z\|_Z. \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $T_n : Z \to Z_1 \quad (n \in N)$ по формуле $T_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^*(z) \cdot \psi_k$. Совершенно очевидно, что $T_n \in L(Z, Z_1)$. Так как, по условию, при всех $n \in N$ $\|T_n(z)\|_{Z_1} \le M(z)$, то по теореме о равномерной ограниченности имеет место (3).

Далее, определим линейный оператор $T : Z \to Z_1$ на $L_b\left(\{\varphi_n\}_{n\in N}\right)$ соотношением $T(\sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \psi_k$. Согласно (3) оператор T ограничен на $L_b\left(\{\varphi_n\}_{n\in N}\right)$. В силу b-полноты $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ в Z, оператор T продолжается на все Z по непрерывности. Итак, $T \in L(Z, Z_1)$, и значит, $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-подчинена к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Перед тем как, перейти к установлению обобщений результатов об эквивалентных системах, введем следующее понятие.

Определение 4. Системы $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ и $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y_1$ назовем b-эквивалентными, если существует ограниченно обратимый оператор $A : Z \to Z_1$ такой, что при любых $x \in X$ и при всех $n \in N$ справедливо равенство $A(x\varphi_n) = x \cdot \psi_n$.

Теперь при возмущении b-базиса, установим b-эквивалентность возмущенной системы к b-базису.

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z и имеет b-сопряженную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$. Для того чтобы существовало число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что система $\{\varphi_n + \varepsilon\psi_n\}_{n\in N}$ b-эквивалентна к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ при любом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\{\psi_n\}_{n\in N}$ была b-подчинена к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Предположим сначала, что существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ система $\{\varphi_n + \varepsilon\psi_n\}_{n\in N}$ b-эквивалентна к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Возьмем произвольное $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и обозначим через $A \in L(Z, Z_1)$ оператор такой, что $A(x\varphi_n) = x(\varphi_n + \varepsilon\psi_n)$ при любых $x \in X$ и $n \in N$. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ сходится в Z при некоторой последовательности $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$. Тогда для любых $n, m \in N$

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} x_k \psi_k\right\|_Z \le \frac{1}{\varepsilon}\left\|\sum_{k=n}^{m} x_k(\varphi_k + \varepsilon\psi_k)\right\|_Z + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\sum_{k=n}^{m} x_k \varphi_k\right\|_Z \le \frac{1}{\varepsilon}\left(\|A\| + 1\right)\left\|\sum_{k=n}^{m} x_k \varphi_k\right\|_Z .$$

Отсюда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n$ сходится, и, таким образом, $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-подчинена к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что система $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-подчинена к системе $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Тогда для любого $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ и при всех $n \in N$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \psi_k \right\|_Z \leq c \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k \right\|_Z , \tag{4}$$

где $c = \sup\limits_{\|z\|_Z =1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^*(z) \psi_n \right\|_Z$.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Определим на $L_b(\{\varphi_n\}_{n\in N})$ линейный оператор A по равенству $A(x\varphi_n) = x(\varphi_n + \varepsilon\psi_n)$ при любых $x \in X$ и $n \in N$. Тогда, ввиду (4), получаем

$$\left\| A\left(\sum_k x_k \varphi_k \right) \right\|_Z = \left\| \sum_k x_k (\varphi_k + \varepsilon\psi_k) \right\|_Z \leq (1+\varepsilon c) \left\| \sum_k x_k \varphi_k \right\|_Z .$$

Из последнего соотношения и b-полноты системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ следует, что

$$\|A(z)\|_Z \leq (1+\varepsilon c) \|z\|_Z \text{ при любых } z \in Z .$$

Покажем теперь, что для $\varepsilon < \frac{1}{c}$ оператор A ограниченно обратим. Для каждого $z \in Z$ учитывая (4) имеем

$$\|(I-A)(z)\|_Z = \varepsilon \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^*(z) \psi_k \right\|_Z \leq c\varepsilon \|z\|_Z < \|z\|_Z .$$

Поэтому, по теореме о существовании ограниченного обратного оператора, оператор A ограниченно обратим.

Таким образом, если $\varepsilon_0 = \left(\sup\limits_{\|z\|_Z =1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^*(z) \psi_n \right\|_Z \right)^{-1}$, то для любого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0$ существует ограниченно обратимый в Z оператор A такой, что при любых $x \in X$ и $n \in N$ имеет место $A(x\varphi_n) = x(\varphi_n + \varepsilon\psi_n)$, т.е. система $\{\varphi_n + \varepsilon\psi_n\}_{n\in N}$ b-эквивалентна к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Теорема доказана.

Применяя доказанную теорему мы получаем обобщение теоремы Крейна-Рутмана-Мильмана ([1]).

Следствие 1. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z и имеет b-сопряженную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$. Предположим, что существует последовательность чисел $\{\varepsilon_n > 0\}_{n\in N}$ такая, что $\|\varphi_n - \psi_n\|_Y \le \varepsilon_n$ и имеет место $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|\varphi_n^*\|_{L(Z,X)} < 1$. Тогда система $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-эквивалентна к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Обозначим через $\omega_n = \frac{1}{\varepsilon_n}(\psi_n - \varphi_n)$**.** Ясно, что $\|\omega_n\|_Y \le 1$. Так как $\psi_n = \varphi_n + \varepsilon_n \omega_n$ и

$$\sup_{\|z\|_Z=1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \varphi_n^*(z)\omega_n \right\|_Z \le \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|\varphi_n^*\|_{L(Z,X)} < 1,$$

то, по доказанной теореме, при $\varepsilon = 1$ система $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-эквивалентна к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Примем следующие обозначения:

$$< g, y > (x) = g(xy) \text{ для любых } g \in Z^*,\ y \in Y,\ x \in X;$$

$$(t, f)(z) = t(f(z)) \text{ для любых } t \in X^*,\ f \in L(Z,X),\ z \in Z.$$

Ясно, что при любых $g \in Z^*$, $y \in Y$, $t \in X^*$ и $f \in L(Z,X)$ $< g, y > \in X^*$, $(t, f) \in Z^*$. Легко показать, что элементы $< g, y >$ и (t, f) линейны по каждому аргументу, причем

$$\|< g, y >\|_{X^*} \le M \|g\|_{Z^*} \|y\|_Y \text{ для любых } g \in Z^*,\ y \in Y;$$

$$\|(t, f)\|_{Z^*} \le \|t\|_{X^*} \|f\|_{L(Z,X)} \text{ для любых } t \in X^*,\ f \in L(Z,X).$$

Следующее утверждение является обобщением теоремы Мильмана ([2]).

Теорема 4. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z и имеет b-сопряженную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, последовательность $\{\varepsilon_n > 0\}_{n\in N}$ чисел такая, что

$$q = \sup_{n, \|t_k\|_{X^*} \le M} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (t_k, \varphi_k^*) \right\|_Z < 1. \tag{5}$$

Тогда всякая система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$, с тем условием, что при всех $n \in N$ $\|\varphi_n - \psi_n\|_Y \le \varepsilon_n$, b-эквивалентна к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Рассмотрим на $L_b(\{\varphi_n\}_{n\in N})$ линейный оператор A соотношением $A(x\varphi_n) = x\psi_n$ при любых $x \in X$ и $n \in N$. Возьмем произвольный $g \in Z^*$ такой, что $\|g\|_{Z^*} = 1$ и для любого $z \in Z$ оценим

$$\left| g\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^*(z)(\varphi_k - \psi_k) \right) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} (< g, \varphi_k - \psi_k >, \varphi_k^*)(z) \right| \le \left\| \sum_{k=1}^{n} (< g, \varphi_k - \psi_k >, \varphi_k^*) \right\|_{Z^*} \|z\|_Z.$$

Поэтому для всех $z \in Z$, ввиду (5), получим:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^*(z)(\varphi_k - \psi_k) \right\|_Z \le \sup_{\|g\|_{Z^*}=1} \left\| \sum_{k=1}^{n} (< g, \varphi_k - \psi_k >, \varphi_k^*) \right\|_{Z^*} \|z\|_Z \le q \, \|z\|_Z . \quad (6)$$

Так как $(I - A)(\sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k (\varphi_k - \psi_k)$, то с учетом (5), из (6) в силу b-базисности в Z системы $\{\varphi_n\}_{n\in N}$, следует, что $\|(I - A)(z)\|_Z < \|z\|_Z$, $z \in Z$. Следовательно, A ограниченно обратим. Теорема доказана.

Следующее определение является аналогом понятия ω-линейно независимой системы.

Определение 5. Систему $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ ненулевых векторов назовем ω_b-линейно независимой в Z, если из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n = 0$$

следует, что $x_n = 0$ при любом $n \in N$.

Для получения очередного результата полезна следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z и имеет b-сопряженную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N} \subset Q(Z, X)$, $Q(Z, X)$ - пространство вполне непрерывных операторов, система $\{\psi_n\}_{n\in N} \subset Y$ имеет конечное число членов отличных от элементов $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

(a) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-полна в Z;

(b) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-минимальна в Z;

(c) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ ω_b-линейно независима в Z;

(d) $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-эквивалентна к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Обозначим через K множество тех индексов k, при которых $\psi_k \ne \varphi_k$. Пусть

$$\tilde{\psi}_n = \begin{cases} \varphi_n, & n \notin K \\ \psi_n - \varphi_n, & n \in K. \end{cases}$$

Определим оператор A по формуле $A(z) = \sum_{k\in K} \varphi_k^*(z) \tilde{\psi}_k$. Очевидно, что $A \in Q(Z)$. Поэтому оператор F такой, что $F = I + A$ является фредгольмовым оператором, причем $F(x\varphi_n) = x\psi_n$ при любых $x \in X$ и $n \in N$. Остается применить следующее утверждение ([13], лемма 1): если $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset Y$ образует b-базис в Z и имеет b-сопряженную систему

$\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, $F\in L(Z)$ - фредгольмовый оператор, система $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$ и $F(x\varphi_n)=x\psi_n$ при любых $x\in X$ и $n\in N$, тогда свойства (a) - (d) эквивалентны.

В следующей теореме находится условие b-эквивалентности к b-базису ω_b- линейно независимой системы.

Теорема 5. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N}\subset Y$ образует b-базис в Z и имеет b-сопряженную систему $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}$, система $\{\psi_n\}_{n\in N}\subset Y$. Для b-эквивалентности системы $\{\varphi_n+\varepsilon_n\psi_n\}_{n\in N}$ b-базису $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ при любой монотонной последовательности чисел $\varepsilon_n\to 0$, для которой $\{\varphi_n+\varepsilon_n\psi_n\}_{n\in N}$ ω_b-линейно независимая система необходимо, а в случае $\{\varphi_n^*\}_{n\in N}\subset Q(Z,X)$ и достаточно, чтобы $\{\psi_n\}_{n\in N}$ была b-подчинена к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Доказательство. Пусть сначала система $\{\varphi_n+\varepsilon_n\psi_n\}_{n\in N}$ ω_b-линейно независима и b-эквивалентна b-базису $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ при любой $\varepsilon_n\to 0$. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\varphi_n^*(z)\psi_n$ сходится для любого $z\in Z$. Очевидно, что существует число $c>0$ такое, что $\left\|\sum_n x_n(\varphi_n+\varepsilon_n\psi_n)\right\|_Z\le c\left\|\sum_n x_n\varphi_n\right\|_Z$. Поэтому

$$\left\|\sum_{k=n}^{m}\varepsilon_k\varphi_k^*(z)\psi_k\right\|_Z\le\left\|\sum_{k=n}^{m}\varphi_k^*(z)(\varphi_k+\varepsilon_k\psi_k)\right\|_Z+\left\|\sum_{k=n}^{m}\varphi_k^*(z)\varphi_k\right\|_Z\le(c+1)\left\|\sum_{k=n}^{m}\varphi_k^*(z)\varphi_k\right\|_Z.$$

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\varphi_n^*(z)\psi_n$ сходится при любом $z\in Z$ и, тем самым, по теореме 1, сумма $\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^*(z)\psi_k$ ограничена. Воспользовавшись леммой 1, заключаем, что система $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-подчинена к системе $\{\varphi_n\}_{n\in N}$.

Наоборот, предположим, что система $\{\psi_n\}_{n\in N}$ b-подчинена к $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ и система $\{\varphi_n+\varepsilon_n\psi_n\}_{n\in N}$ ω_b-линейно независима, где $\{\varepsilon_n\}_{n\in N}$ - произвольная последовательность монотонно $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. По лемме 1 существует число $c>0$ такое, что при всех $n\in N$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^*(z)\psi_k\right\|_Z\le c\left\|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^*(z)\varphi_k\right\|_Z\quad(z\in Z).$$

Воспользовавшись преобразованием Абеля при $m\ge n$ имеем оценку:

$$\left\|\sum_{k=n}^{m}\varepsilon_k\varphi_k^*(z)\psi_k\right\|_Z=\left\|\sum_{i=n}^{m-1}(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})\sum_{k=n}^{i}\varphi_k^*(z)\psi_k+\varepsilon_m\sum_{k=n}^{m}\varphi_k^*(z)\psi_k\right\|_Z\le\varepsilon_n\sup_{n\le i\le m}\left\|\sum_{k=n}^{i}\varphi_k^*(z)\psi_k\right\|_Z\le$$

$$\leq 2\varepsilon_n \sup_{i\leq m} \left\| \sum_{k=1}^{i} \varphi_k^*(z)\psi_k \right\|_Z \leq 2c\varepsilon_n \sup_{i\leq m} \left\| \sum_{k=1}^{i} \varphi_k^*(z)\varphi_k \right\|_Z \leq 2c\varepsilon_n \widetilde{M}\ \|z\|_Z .$$

Поскольку $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, то существует число n_0 такое, что $\varepsilon_{n_0} < \dfrac{1}{2c\widetilde{M}}$. Следовательно, оператор A, определенный по формуле $A(z) = \sum_{k=1}^{n_0-1} \varphi_k^*(z)\varphi_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} \varphi_k^*(z)(\varphi_k + \varepsilon_k \psi_k)$ ограниченно обратим. Легко видеть, что при всех $n \in N$ справедливо $A(x\varphi_n) = x\widetilde{\psi}_n$, где

$$\widetilde{\psi}_n = \begin{cases} \varphi_n, & n < n_0 \\ \varphi_n + \varepsilon_n \psi_n, & n \geq n_0 \end{cases} .$$

Значит $\{\widetilde{\psi}_n\}_{n\in N}$ b-эквивалентна b-базису $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Далее, так как система $\{\varphi_n + \varepsilon_n \psi_n\}_{n\in N}$ ω_b-линейно независима и содержит лишь конечное число членов, отличных от элементов системы $\{\widetilde{\psi}_n\}_{n\in N}$, то в силу леммы 2, b-эквивалентна b-базису $\{\varphi_n\}_{n\in N}$. Теорема доказана.

Устойчивость b-фрейма

Пусть $\widetilde{X}$ – B-пространство последовательностей $\widetilde{x} = \{x_n\}_{n\in N}$, $x_n \in X$, с покоординатными линейными операциями. $\widetilde{X}$ назовем BK-пространством, если непрерывны операторы $e_n : \widetilde{X} \to X$, определенные по формулам $e_n(\widetilde{x}) = x_n$, $\widetilde{x} = \{x_n\}_{n\in N}$.

Определение 6. Пусть $\widetilde{X}$ $-BK$-пространство, система $\{y_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z, X)$. Систему $\{y_n^*\}_{n\in N}$ назовем $b_{\widetilde{X}}$-фреймом в Z, если для любого $z \in Z$ $\{y_n^*(z)\}_{n\in N} \in \widetilde{X}$ и существуют постоянные $0 < A \leq B < +\infty$ такие, что

$$A\ \|z\|_Z \leq \left\| \{y_n^*(z)\}_{n\in N} \right\|_{\widetilde{X}} \leq B\ \|z\|_Z \text{ для любого } z \in Z . \qquad (7)$$

Постоянные A и B назовем, соответственно, нижней и верхней границами $b_{\widetilde{X}}$-фрейма.

Если, кроме того, существует оператор $S \in L(\widetilde{X}, Z)$, для которого имеет место $S\left(\{y_n^*(z)\}_{n\in N}\right) = z$ для любого $z \in Z$, то $\left(\{y_n^*\}_{n\in N}, S\right)$ назовем банаховым $b_{\widetilde{X}}$-фреймом в Z.

Теорема 6. Пусть $\widetilde{X}$ – BK-пространство, $\left(\{y_n^*\}_{n\in N}, S\right)$ банаховый $b_{\widetilde{X}}$-фрейм в Z, оператор $U : Z \to \widetilde{X}$ определен по равенству

$U(z)=\{y_n^*(z)\}_{n\in N}$, система $\{\psi_n^*\}_{n\in N}\subset L(Z,X)$ и $\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\in\tilde{X}$ для любого $z\in Z$. Предположим, что существуют числа $\lambda,\mu\ge 0$ и $\beta\in[0,1)$ удовлетворяющие условиям:

(a) $\lambda\|US\|+\beta\|I-US\|+\mu\|S\|<1$;

(b) $\left\|\{y_n^*(z)\}_{n\in N}-\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}}\le\lambda\left\|\{y_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}}+\beta\left\|\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}}+\mu\|z\|_Z$ для любого $z\in Z$.

Тогда существует $T\in L(\tilde{X},Z)$ такой, что $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N},T\right)$ является банаховым $b_{\tilde{X}}$-фреймом в Z, с границами

$$\frac{(1-(\lambda\|US\|+\beta\|I-US\|+\mu\|S\|))\|S\|^{-1}}{1+\beta},\ \frac{(1+\lambda)\|U\|+\mu}{1-\beta}.$$

Доказательство. Из неравенства (7) следует, что $A\,\|z\|_Z\le\|U(z)\|_{\tilde{X}}\le B\,\|z\|_Z$ для любого $z\in Z$. Пусть оператор $V:Z\to\tilde{X}$ задан по формуле $V(z)=\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}$. Ввиду условия (b) теоремы имеем

$\|V(z)\|_{\tilde{X}}\le\|(U-V)(z)\|_{\tilde{X}}+\|U(z)\|_{\tilde{X}}\le(1+\lambda)\|U(z)\|_{\tilde{X}}+\beta\|V(z)\|_{\tilde{X}}+\mu\|z\|_Z,\ z\in Z.$

Отсюда получаем

$$\|V(z)\|_{\tilde{X}}\le\frac{(1+\lambda)\|U\|+\mu}{1-\beta}\|z\|_Z,\ z\in Z.$$

Покажем ограниченную обратимость оператора $I+(V-U)S$. Для произвольного $\tilde{x}\in\tilde{X}$ оценим $\|(V-U)S(\tilde{x})\|_{\tilde{X}}$. Применяя условие (b) имеем

$$\begin{aligned}&\|(V-U)S(\tilde{x})\|_{\tilde{X}}\le\lambda\|US(\tilde{x})\|_{\tilde{X}}+\beta\|VS(\tilde{x})\|_{\tilde{X}}+\mu\|S(\tilde{x})\|_Z\le\\&\le\lambda\|US(\tilde{x})\|_{\tilde{X}}+\beta\|(I-US)(\tilde{x})\|_{\tilde{X}}+\mu\|S(\tilde{x})\|_Z+\beta\|(I+(V-U)S)(\tilde{x})\|_{\tilde{X}}\le\\&\le\left(\lambda\|US\|+\beta\|I-US\|+\mu\|S\|\right)\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}+\beta\|(I+(V-U)S)(\tilde{x})\|_{\tilde{X}}.\end{aligned}$$

По теореме 2, из последнего соотношения, заключаем, что оператор $I+(V-U)S$ ограниченно обратим, и имеет место соотношение:

$$\left\|(I+(V-U)S)^{-1}\right\|\le\frac{1+\beta}{1-(\lambda\|US\|+\beta\|I-US\|+\mu\|S\|)}.$$

Определим оператор $T=S(I+(V-U)S)^{-1}$. Тогда $TV=I$. Действительно,

$$TV=S(I+(V-U)S)^{-1}V=S(I+(V-U)S)^{-1}(I+(V-U)S)U=SU=I.$$

Далее, для любого $z\in Z$ имеем

$$\|z\|_Z=\|TV(z)\|_Z\le\|T\|\,\|V(z)\|_{\tilde{X}}=\left\|S(I+(V-U)S)^{-1}\right\|\,\|V(z)\|_{\tilde{X}}\le$$

$$\le\|S\|\,\left\|(I+(V-U)S)^{-1}\right\|\,\|V(z)\|_{\tilde{X}}\le\frac{(1+\beta)\|S\|}{1-(\lambda\|US\|+\beta\|I-US\|+\mu\|S\|)}\|V(z)\|_{\tilde{X}}.$$

Таким образом, $\{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}$ является $b_{\tilde{X}}$-фреймом в Z с $b_{\tilde{X}}$-фреймовым оператором T. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы получается обобщение, на банаховы $b_{\tilde{X}}$-фреймы, утверждения об устойчивости банахова фрейма в гильбертовых ([10]) и банаховых ([11]) пространствах.

Следствие 2. Пусть $\tilde{X}$ – BK-пространство, система $\left(\{y_n^*\}_{n\in N}, S\right)$ банаховый $b_{\tilde{X}}$-фрейм в Z, система $\{\psi_n^*\}_{n\in N} \subset L(Z,X)$. Предположим, что существуют числа $\lambda, \mu \geq 0$ удовлетворяющие условиям:

(a) $\lambda\|U\| + \mu < \|S\|^{-1}$;

(b) $\left\|\{y_n^*(z)\}_{n\in N} - \{\psi_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}} \leq \lambda\left\|\{y_n^*(z)\}_{n\in N}\right\|_{\tilde{X}} + \mu\|z\|_Z$ для любого $z \in Z$.

Тогда существует $T \in L(\tilde{X}, Z)$ такой, что $\left(\{\psi_n^*\}_{n\in N}, T\right)$ является банаховым $b_{\tilde{X}}$-фреймом в Z, с границами $\|S\|^{-1} - (\lambda\|U\| + \mu)$ и $\|U\| + \lambda\|U\| + \mu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М.Г., Мильман Д.П., Рутман М.А. Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха// Зап. Матем. 0-ва (5), 16, Харьков, 1940, с. 106-110.
2. Мильман В.Д. О возмущении последовательностей элементов пространства Банаха// Сиб. матем. жур., 6, № 2, 1965, с. 398-412.
3. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Ученые записки МГУ, 1951, 4:148, с. 69-107.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М.: Наука, 1965, 448 с.
5. Вейц Б.Е. Системы Бесселя и Гильберта в пространствах Банаха и вопросы устойчивости// Из. ВУЗ, Математика, 1965, 2:45, с. 7-23.
6. Тумаркин Ю.Б. Устойчивость базисов в *B*-пространствах и в других классах ЛВП// Вып. 14, теория фун., функ. анал., 1971, с. 26-35.
7. Young R. An introduction to nonharmonic Fourier series. New York, 1980, 246 p.
8. Билалов Б.Т., Велиев С.Г. Некоторые вопросы базисов, Баку: Элм, 2010, 304 с.
9. Duffin R. J., Schaeffer A. C. A class of nonharmonic Fourier series// Trans. Amer. Math. Soc., 72, 1952, p. 341–366.
10. Casazza P. G. The art of frame theory// Taiwanese J. Math., 4(2), 2000, p. 129–201.
11. Christensen O., Heil C. Perturbations of Banach frame and atomic decompositions// Math. Nachr., 185, 1997, p. 33–47.
12. Zhu Y.C., Wang S.Y. The stability of Banach Frames in Banach spaces// Acta Mathematica Sinica, English Series, v. 26, № 12, 2010, p. 1165–1170.
13. Исмайлов М.И. Об эквивалентных свойствах систем, близких к b-базису в банаховых пространствах // Вестник БГУ. Серия физико-математических наук, № 3, 2011, с. 46-54.
14. Исмайлов М.И. Об альтернативных дуальных b-фреймах в банаховом пространстве// Материалы Международной конференции, посвященной 100-летнему юбилею академика З.И.Халилова, 2011, с. 177-180.

BANAX FƏZALARINDA b-BAZİSİN VƏ b-FREYMİN DAYANIQLIĞI HAQQINDA

M.İ.İSMAYILOV

XÜLASƏ

İş Banax fəzalarında b-bazisin və b-freymin dayanıqlığının tədqiqinə həsr olunub. İşdə ekvivalent sistemlər haqqında kriteriyalar verilib və həmçinin Banax fəzalarında b-bazisin və b-freymin dayanıqlığı üçün şərtlər tapılıb. Alınmış nəticələr Banax fəzalarında bazisin və freymin dayanıqlığı haqqında məlum nəticələrin ümumiləşməsidir.

Açar sözlər: b-bazis, b-tamlıq, b-ekvivalentlik, b-freym.

ON STABILITY OF b-BASIS AND b-FRAME IN BANACH SPACES

M.I.ISMAYILOV

SUMMARY

The paper is devoted to the study of a question of stability of b-basis and b-frame in Banach spaces. The paper provides criteria about equivalent systems, and b-basis and b-frame stability conditions in Banach spaces are found. The received results are corresponding generalizations of known results about the stability of basis and the frame in Banach spaces.

Key words: b-basis, b-completeness, b- equivalence, b-frame.

Поступила в редакцию: 10.02.2012 г.
Подписано к печати: 08.05.2012 г.