УДК 517.927

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

З.С.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

z_aliyev@mail.ru

Рассматривается спектральная задача для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии. Исследуется вопрос о числе нулей собственных функций этой задачи.

Ключевые слова: собственное значение, собственная функция, обыкновенный дифференциальный оператор четвертого порядка, осцилляционные свойства собственных функций.

Рассмотрим следующую спектральную задачу

$$\left(p(x)y''(x)\right)'' - \left(q(x)y'(x)\right)' = \lambda r(x)y(x), 0 < x < l, \tag{1}$$

$$y'(0)\cos\alpha - (py'')(0)\sin\alpha = 0, \tag{2a}$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{2b}$$

$$y'(l)\cos\gamma + (py'')(l)\sin\gamma = 0, \tag{2c}$$

$$(a\lambda + b)y(l) - (c\lambda + d)Ty(l) = 0, \tag{2d}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $Ty \equiv (py'')' - qy'$, функций $p(x), r(x)$ строго положительны и непрерывны на $[0,l]$, $p(x)$ имеет абсолютно непрерывную производную на $[0,l]$, функция $q(x)$ неотрицательна и абсолютно непрерывна на $[0,l]$, $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, d$ – действительные постоянные, причем $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi/2$, $\sigma = bc - ad \ne 0.$

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса о числе нулей собственных функций задачи (1), (2) при $\sigma < 0$.

Отметим, что знак параметра σ играет существенную роль. В случае $\sigma > 0$ задачу (1), (2) можно интерпретировать как спектральную задачу самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $H = L_2((0,l),r) \oplus \mathrm{C}$. В случае $\sigma < 0$ эта задача реализуется как спектральная задача для самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина (см., например, [1,2]); при этом задача (1), (2) может иметь вещественное кратное либо невещественные собственные значения.

Задача (1), (2) в случае $\sigma > 0$ рассматривалась в [3] (см., также[4]) , где, в частности, доказана следующая осцилляционная

Теорема А. *Собственные значения задачи (1), (2) являются вещественными, простыми и образуют бесконечно возрастающую последовательность* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \; ..., \lambda_n, ...,$ *причем* $\lambda_n > 0$ *при* $n \geq 3$. *Соответствующие им собственные функции* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), ...$ *обладают следующими осцилляционными свойствами:*

a) если $c = 0$, *то* $y_n(x)$ *при* $n \geq 2$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$; *при* $\lambda_1 \geq 0,$ $y_1(x)$ *не имеет нулей в интервале* $(0,l)$, *а при* $\lambda_1 < 0$ *функция* $y_1(x)$ *может иметь произвольное число нулей в интервале* $(0,l)$, *которые также являются простыми;*

b) если $c \neq 0$, *то в случае* $\lambda_n \geq 0$ *функция* $y_n(x)$ *при* $n \leq N$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей, а при* $n > N$ *– в точности* $n-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$, *а в случае* $\lambda_n < 0$ *функция* $y_n(x)$, $n = 1$ *либо 2, может иметь произвольное число нулей в интервале* $(0,l)$, *которые также являются простыми, где натуральное число* N *определяется из неравенства* $\lambda_{N-1}(0) < d/c \leq \lambda_N(0)$.

Задача (1), (2) в случае $\sigma < 0$ рассмотрена в [2], где изучена общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси (комплексной плоскости) и структура корневых подпространств.

Введем следующие краевые условия:

$$y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0, \tag{2d'}$$

$$ay(l) - cTy(l) = 0. \tag{2d''}$$

Собственные значения задач (1), (2a)-(2c), (2d') и (1), (2a)-(2c), (2d'') являются вещественными, простыми и образуют бесконечно возрастающие последовательности $0 < \lambda_1(\delta) < \lambda_2(\delta) < ... < \lambda_n(\delta) < ...$ и $\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n < ...$ [5], причем

$$\lambda_1(\pi/2) < \mu_1 < \lambda_1(0) < \lambda_2(\pi/2) < \mu_2 < \lambda_2(0) < ... \tag{3}$$

в случае $a/c > 0$ и

$$\mu_1 < \lambda_1(\pi/2) < \lambda_1(0) < \mu_2 < \lambda_2(\pi/2) < \lambda_2(0) < \dots \qquad (4)$$

в случае $a/c < 0$.

Отметим, что собственными значениями (с учетом кратности) задачи (1), (2) являются корни уравнения

$$\frac{cy(l,\lambda)+aTy(l,\lambda)}{ay(l,\lambda)-cTy(l,\lambda)} = \frac{a^2+c^2}{-\sigma}\lambda + \frac{ab+cd}{-\sigma}.$$

Обозначим: $\mathrm{B}_n = (\mu_{n-1}, \mu_n)$, $n = 1,2,\dots,$ где $\mu_0 = -\infty$.

Заметим, что функция

$$G(\lambda) = \frac{cy(l,\lambda)+aTy(l,\lambda)}{ay(l,\lambda)-cTy(l,\lambda)}$$

определена для значений $\lambda \in \mathrm{B} \equiv \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n\right) \bigcup (\mathrm{C} \setminus \mathrm{R})$ и является мероморфной функцией конечного порядка, собственные значения μ_n краевой задачи (1), (2a)-(2c), (2d') являются полюсами этой функции.

В работе [2] доказана следующая

Теорема Б. *Пусть* $\sigma < 0$. *Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

(i) *все собственные значения задачи (1), (2) вещественны, при этом* B_1 *содержит алгебраически два (либо два простых, либо одно двукратное) собственных значения, а* $\mathrm{B}_n, n = 2,3,\dots,$ *– одно простое собственное значение;*

(ii) *все собственные значения задачи (1), (2) вещественны, при этом* B_1 *не содержит собственных значений, в то же время существует натуральное число* M $(M \geq 2)$ *такое, что* B_M *содержит алгебраически три (либо три простых, либо одно двукратное и одно простое, либо одно трехкратное) собственных значения, а* $\mathrm{B}_n, n = 2,3,\dots,$ $n \neq M$, *– одно простое собственное значение;*

(iii) *задача (1), (2) имеет одну пару невещественных сопряженных друг к другу собственных значений, при этом* B_1 *не содержит собственных значений, а* $\mathrm{B}_n, n = 2,3,\dots$ *содержит одно простое собственное значение.*

В случае $\sigma < 0$ задача (1), (2) обнаруживает такое богатство осцилляционных явлений, которое не идет ни в какое сравнение со случаем $\sigma > 0$.

Основным результатом настоящей работы является следующая осциляционная

Теорема 1. *Пусть* $\sigma < 0$ *и* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– последовательность собственных значений задачи (1), (2):* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, *если имеет место утверждение* (i) *либо* (ii) *теоремы Б;* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{C}/\mathrm{R}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, $\lambda_3 < \lambda_4 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, *если имеет место утверждение* (iii) *теоремы Б. Тогда соответствующие им собственные функции* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$, *обладают следующими осцилляционными свойствами:*

a) если $c = 0$ *и имеет место утверждения (i) и (iii) теоремы Б, то* $y_n(x)$, $n = 3,4,\ldots$, *имеет в точности* $n-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$, *кроме того, если* $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ *и* $y_i(x)$, $i = 1$, *либо* $i = 2$, *собственная функция, то эта функция может иметь произвольное число нулей в интервале* $(0,l)$, *которые также являются простыми;*

b) если $c = 0$ *и имеет место утверждение (ii) теоремы Б, то* $y_n(x)$ *при* $n \le M-1$ *имеет в точности* n *простых нулей, а при* $n > M+1$ *имеет в точности* $n-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$, *кроме того, если функция* $y_i(x)$, $i = M, M+1$ *собственная функция, то она имеет в точности* $M-1$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$;

c) если $c \ne 0$ *и имеет место утверждения (i) и (iii) теоремы Б, то* $y_n(x)$, $n = 3,4,5,\ldots$ *в случае* $a/c \ge 0$, $n = 4,5,\ldots$, *в случае* $a/c < 0$, *при* $n \le N+1$ *имеет в точности* $n-3$ *простых нулей , а при* $n > N+1$ *имеет в точности* $n-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$, *кроме того, в случае, когда имеет место утверждение (iii) теоремы Б* $y_3(x)$ *при* $a/c < 0$ *может иметь произвольное число нулей, а в случае, когда имеет место утверждение (i) теоремы Б функции* $y_1(x), y_2(x)$ *при* $a/c \ge 0$, $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ *при* $a/c < 0$, *могут иметь произвольное число нулей, которые также являются простыми (следует отметить, что в случае (i) теоремы Б* $N = 1$*);*

d) если $c \ne 0$, $a/c > 0$ *и* $N < M-1$, *то* $y_n(x)$ *при* $n \le N-1$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$, *при* $N \le n \le M-2$ *имеет в точности* n *простых нулей, а при* $n > M+1$ *имеет* $n-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$, *кроме того, если* $y_i(x)$, $i = M-1, M, M+1$ *собственная функция, то она имеет в точности* $M-1$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$;

e) если $c \ne 0$, $a/c > 0$ *и* $N = M-1$, *то* $y_n(x)$ *при* $n < M-1$

имеет в точности $n-1$ *простых нулей, а при* $n>M+1$ *имеет в точности* $n-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$, *кроме того, если* $y_i(x)$, $i=M-1, M, M+1$, *собственная функция, то она имеет* $M-1$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$.

f) если $c \neq 0, a/c>0$ *и* $N=M$, *то* $y_n(x)$ *при* $n \leq M-1$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей, а при* $n>M+1$ *имеет в точности* $n-2$ *простых нулей, кроме того, если* $y_i(x)$, $i=M, M+1$ *собственная функция, то она имеет* $M-1$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$; *при этом случаи* $\lambda_{M-1}=\lambda_M=\lambda_{M+1}$ *и* $\lambda_{M-1}=\lambda_M<\lambda_{M+1}$ *невозможны;*

g) если $c \neq 0$, $a/c<0$ *и* $N=M-1$, *то* $y_n(x), n=2,3,...,$ *при* $n \leq M-1$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей, при* $n>M+1$ *имеет в точности* $n-2$ *простых нулей, в интервале* $(0,l)$, *кроме того,* $y_1(x)$ *может иметь произвольное число нулей в* $(0,l)$, *которые также являются простыми, если* $y_M(x)$ $(y_{M+1}(x))$ *собственная функция, то она имеет в точности* $M-2(M-1)$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$; *при этом случаи* $\lambda_{M-1}=\lambda_M=\lambda_{M+1}$ *и* $\lambda_{M-1}<\lambda_M=\lambda_{M+1}$ *невозможны;*

h) если $c \neq 0$, $a/c<0$ *и* $N=M$, *то* $y_n(x), n=2,3,...,$ *при* $N \leq M-1$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей, при* $n>M+1$ *имеет в точности* $n-2$ *простых нулей, в интервале* $(0,l)$, *кроме того,* $y_i(x)$ *может иметь произвольное число нулей в* $(0,l)$, *которые также являются простыми, если* $y_i(x)$, $i=M, M+1$, *собственная функция, то она имеют в точности* $M-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$; *при этом случай* $\lambda_{M-1}=\lambda_M<\lambda_{M+1}$ *невозможен;*

l) если $c \neq 0$, $a/c<0$ *и* $N>M$, *то* $y_n(x), n=2,3,...,$ *при* $N<M-1$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей, при* $M+1<n<N$ *имеет в точности* $n-3$ *простых нулей, а при* $n \geq N$ *имеет в точности* $n-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$, *кроме того,* $y_1(x)$ *может иметь произвольное число нулей, которые так же являются простыми, если* $y_i(x)$, $i=M-1, M, M+1$, *собственная функция, то она имеют в точности* $M-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$;

k) если $a=0$, *то* $y_n(x)$ *при* $n<M-1$ *имеет в точности* $n-1$ *простых нулей, при* $n>M+1$ *имеет в точности* $n-2$ *простых нулей в интервале* $(0,l)$, *кроме того, в случае когда* $\lambda_{M-1}=\lambda_M<\lambda_{M+1}$ *ли-*

бо $\lambda_{M-1}<\lambda_M<\lambda_{M+1}$ функция $y_{M-1}(x)$ имеет в точности $M-2$ простых нулей , $y_{M+1}(x)$ имеет в точности $M-1$ простых нулей, а в случае, когда $\lambda_{M-1}<\lambda_M=\lambda_{M+1}$ функция $y_{M-1}(x)$ имеет в точности $M-2$ простых нулей, $y_M(x)$ имеет в точности $M-1$ простых нулей, в случае, когда $\lambda_{M-1}=\lambda_M=\lambda_{M+1}$ функция $y_{M-1}(x)$ имеет в точности $M-2$ простых нулей, а в случае, когда $\lambda_{M-1}<\lambda_M<\lambda_{M+1}$ функция $y_M(x)$ может иметь $M-2$ либо $M-1$ простых нулей в интервале $(0,l)$.

Доказательство. Предположим, что $c\neq 0,\ a/c>0,\ N<M-1$ и имеет место утверждение *(ii)* теоремы Б.

Заметим, что $G(\lambda_n(0))=-a/c, n=1,2,...,$ и уравнение $A\lambda+B$ имеет единственное решение $\lambda^*=-d/c\in(\lambda_{N-1}(0),\lambda_N(0))$, где $A=-(a^2+c^2)/\sigma$, $B=-(ab+cd)/\sigma$. Из доказательства теоремы Б (см., [2]) видно, что уравнение $G(\lambda)=A\lambda+B$ в интервале B_1 не имеет решение, в интервале B_M $(M\geq 2)$ имеет алгебраически три решения $\lambda_{M-1}\leq\lambda_M\leq\lambda_{M+1}$, в интервале B_n при $2\leq n\leq M-1$ имеет единственное решение λ_{n-1}, а в интервале B_n при $n>M$ имеет единственное решение λ_{n+1}. Если $\tilde{\lambda}\in\mathrm{B}_n$, $n\geq 2$ есть решение уравнения $G(\lambda)=A\lambda+B$ такое, что $A\tilde{\lambda}+B<-d/c$ $\left(A\tilde{\lambda}+B>-d/c\right)$, то $\mu_{n-1}<\tilde{\lambda}<\lambda_{n-1}(0)$ $\left(\lambda_{n-1}(0)\leq\tilde{\lambda}<\mu_n\right)$. Тогда из изложенных выше и из (3) следует соотношения

$$\begin{aligned}&\mu_1<\lambda_1<\lambda_1(0)<\mu_2<\lambda_2<\lambda_2(0)<...\mu_{N-1}<\lambda_{N-1}<\lambda_{N-1}(0)<\mu_N<\lambda_N(0)\leq\\ &\leq\lambda_N<\mu_{N+1}<\lambda_{N+1}(0)<...<\lambda_{M-2}(0)<\lambda_{M-2}<\mu_{M-1}<\lambda_{M-1}(0)<\\ &<\lambda_{M-1}\leq\lambda_M\leq\lambda_{M+1}<\mu_M<\lambda_M(0)<\lambda_{M+2}<\mu_{M+1}<.... \qquad (5)\end{aligned}$$

Теперь утверждения d) теоремы 1 следует из (5), леммы 10 [3] и теоремы 4.1 [5]. Остальные случаи доказываются аналогичным образом. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ben Amara J. Fourth order spectral problem with eigenvalue in the boundary conditions // Functional analysis and its applications: Proc. of the int. conf., dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach, Lviv National University, Lviv, Ukraine, May 28–31, 2002 / Ed. Kadets V. Amsterdam, 2004 (North Holland Math. Stud.; v. 197), p.49–58

2. Алиев З.С. Базисные свойства в пространстве L_p систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения, 2011, т.46, № 6, с. 764-775.
3. Kerimov N.B., Aliyev Z.S. The oscillation properties of the boundary value problem with spectral parameter in the boundary condition // Trans NAS Azerb., ser. phys.-tech.math. sci., math. mech., 2005, v.25, №7, p. 61-68.
4. Керимов Н.Б., Алиев З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения, 2007, т.43, №7, с. 886-895.
5. Амара Ж.Бен, Владимиров А.А. Об осцилляции собственных функций задачи четвертого порядка со спектральным параметром в граничном условии // Фундаментальная и прикладная математика, 2006, т. 12 , №4, с. 41.-52.

SƏRHƏD ŞƏRTİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN BİR DÖRDÜNCÜ TƏRTİB SPEKTRAL MƏSƏLƏNİN OSSİLYASİYA XASSƏLƏRİ

Z.S.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə sərhəd sərtinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operator üçün qoyulmuş spektral məsələyə baxılır. Bu məsələnin məxsusi funksyalarının sıfırlarının sayı tədqiq olunur.

Açar sözlər: məxsusi ədəd, məxsusi funksiya, dördüncü tərtib diferensial operator, məxsusi funksyaların ossilyasiya xassələri.

OSCILLATION PROPERTIES OF THE EIGENFUNCTIONS OF ONE SPECTRAL PROBLEM OF THE FOURTH ORDER WITH SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION

Z.S.ALİYEV

SUMMARY

İn the present paper we consider the spectral problem for the fourth order ordinary differental operator with a spectral parameter in the boundary condition. The problem on the number of zeros of eigenfunctions of this problem is analyzed.

Key words: eigenvalue, eigenfunction, fourth order ordinary differental operator, oscillation properties of the eigenfunctons.

Поступила в редакцию: 20.02.2012 г.
Подписано к печати: 08.05.2012 г.