BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2012*

УДК 519.21

АСИМПТОТИКИ ЛОКАЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГРАНИЦ ТРАЕКТОРИЕЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Ф. Г.РАГИМОВ, Ф.Дж.АЗИЗОВ
Бакинский Государственный Университет
ragimovf@rambler.ru

В работе доказана теорема об асимптотическом поведении совместного распределения перескока и момента первого пересечения уровня траекторией случайных блужданий, описываемых нелинейной функцией от цепи Маркова и получена локальная предельная теорема для момента первого пересечения.

Ключевые слова: цепь Маркова, момент первого выхода и перескок за уровень, совместное распределение, локальная предельная теорема.

1. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ определена цепь Маркова $X=(X_n, n\geq 0)$ со значениями на $R=(-\infty,\infty)$ и с переходной вероятностью

$$P\{X_{n+1}\in B\,|\,X_n=x\}=P_n(x,B),$$

где $x\in R$ и $B\in\beta(R)-\sigma$-алгебра борелевских множеств в R.

Для некоторой числовой борелевской функции $\Delta(x), x\in R$ определим последовательность случайных величин $T_0=0, T_n=n\Delta\left(\frac{X_n}{n}\right), n\geq 1.$

Рассмотрим семейство моментов первого выхода

$$\tau_c=\inf\{n\geq 1: T_n>c\} \tag{1}$$

процесса T_n за уровень $c>0$ (здесь считаем $\inf\{\varnothing\}=\infty$).

Введенный марковский момент τ_c возникает в прикладных вопросах теории вероятностей и математической статистики ([3], [5], [8]).

В случае, когда цепь Маркова X является суммой независимых одинаково распределенных случайных величин, семейство моментов первого выхода τ_c вида (1) возникает в теории нелинейного восстановления, а также в статистическом последовательном анализе [8].

Последнее время большое внимание уделяется к изучению граничных задач для общих цепей Маркова, связанные с τ_c ([1], [4]-[7]).

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение совместного распределения $P(\tau_c = n, R_c \le r)$ момента первого выхода τ_c и перескока $R_c = T_{\tau_c} - c$ при $c \to \infty$. Подобная задача для случая $\Delta(x) = x$ изучена в работе [4].

2. **Формулировка и доказательство основных результатов.** Следуя работе [1], будем предполагать, что цепь Маркова X с начальным значением $X_0 = u$ является однородной во времени и частично однородной в пространстве, т.е. для некоторого пространственного уровня $N \ge 0$ переходная вероятность $P(u, d\upsilon) = P(X_1 \in d\upsilon)\,(X_1 = X_1(u))$ при $u > N$ и $\upsilon > N$ зависит лишь от разности $\upsilon - u$. Это означает, что цепь Маркова $X_n = X_n(u)$ в области $u > N$ ведет себя как обычный процесс суммирования независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots,$. Проекция распределения случайной величины ξ_1 на множество $(N - u, \infty)$ совпадает с проекцией распределения скачка (приращения) $\xi(u) = X_1 - X_0 = X_1 - u$ цепи X.

Относительно случайной величины ξ_1 будем предполагать, что она имеет нерешетчатое распределение с конечным средним $\nu = E\xi_1 > 0$ и $\sigma^2 = D\xi_1 < \infty$. Отметим, что случайное блуждание с задержкой в нуле $X_n = \max(0, X_n + \xi_{n+1})$ является частично однородной в пространстве (для этой цепи можно взять $N = 0$). Другие примеры можно найти в работах [1] и [6]. Относительно функции $\Delta(x)$ предполагается, что она непрерывно-дифференцируема в некоторой окрестности точки $x = \nu$, причем $\mu = \Delta(\nu) > 0$ и $\Delta'(\nu) \ne 0$. В силу этих допущений имеем

$$T_n = Z_n + \varepsilon_n, \tag{2}$$

где

$$Z_n = n\Delta(\nu) + n\Delta'(\nu)\left(\frac{X_n}{n} - \nu\right), \; \varepsilon_n = nK\left(\frac{X_n}{n}\right),$$

и

$$K(x) = \Delta(x) - \Delta(\nu) - \Delta'(\nu)(x - \nu).$$

Отметим, что представление типа (2) часто рассматривается в теории нелинейного марковского восстановления ([3], [5], [6], [8]).

В решение указанной задачи ключевую роль играют результаты работы [2], в которой получены предельные теоремы для асимптотически однородных во времени и в пространстве цепей Маркова.

В силу усиленного закона больших чисел для цепи Маркова, доказанного в работе [2], имеет место

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{п.н.} \nu \text{ при } n \to \infty . \tag{3}$$

Следовательно,

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{п.н.} \mu = \Delta(\nu) \text{ при } n \to \infty . \tag{4}$$

Далее, имеем

$$\varepsilon_n = n\left(\frac{X_n}{n} - \nu\right)\delta_n, \text{ где } \delta_n = \begin{cases} 0, & \textit{если } X_n = n\nu, \\ \dfrac{K\left(\dfrac{X_n}{n}\right)}{\dfrac{X_n}{n} - \nu}, & \textit{если } X_n \neq n\nu. \end{cases}$$

Учитывая, что

$$K(\nu) = 0 = K'(\nu),$$

из упомянутого усиленного закона больших чисел следует, что

$$\delta_n = \frac{K\left(\dfrac{X_n}{n}\right) - K(\nu)}{\dfrac{X_n}{n} - \nu} \xrightarrow{п.н.} K'(\nu) = 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Поэтому

$$\frac{\varepsilon_n}{n} \xrightarrow{п.н.} 0 \text{ при } n \to \infty . \tag{5}$$

Из свойства частично однородности цепи Маркова X_n вытекает, что последовательность $Z_n, n \geq 1,$ с $Z_0 = 0$ также является частично однородной в пространстве цепью Маркова. Поэтому в области $u > N$ цепь Маркова Z_n ведет себя как сумма независимых одинаково распределенных случайных величин $\eta_1, \eta_2, ...,$ причем распределение случайной величины η_1 совпадает с распределением случайной величины $\eta = \Delta(\nu) + \Delta'(\nu)(\xi_1 - \nu)$.

Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k, \; \tau_+ = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\},$$

$$H(r) = \frac{1}{ES_{\tau_+}} \int_0^r P(S_{\tau_+} > x)dx, \; r > 0,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} .$$

Имеет место

Теорема. Пусть $N < u \leq c < \infty$ и выполняются вышеперечисленные условия относительно цепи Маркова и функции $\Delta(x)$. Предположим, что

$$n = n(c) = \frac{c}{\mu} + \theta_c \sqrt{c/\mu}, \text{ где } \theta_c \to \theta \in R \text{ при } c \to \infty . \tag{6}$$

Тогда

$$P(\tau_a = n, R_c \le r) \sim \frac{\mu}{\rho\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{\theta\mu}{\rho}\right) H(r) \qquad \text{при } c \to \infty \tag{7}$$

равномерно по θ из ограниченного множества в R.

Следствие 1. (Локальная предельная теорема для τ_c).Пусть выполняются условия теоремы. Тогда

$$P(\tau_c = n) \sim \frac{\mu}{\rho\sqrt{n}} \varphi\left(\theta\frac{\mu}{\rho}\right) \text{ при } c \to \infty$$

равномерно по θ из ограниченного множества в R.

Следствие 2. В условия теоремы имеет место при $r > 0$

$$P(R_c \le r \mid \tau_a = n) \to H(r) \text{ при } c \to \infty.$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие результаты, сформулированные в виде лемм.

Лемма 1. Пусть выполняются условия теоремы относительно цепи Маркова X.

Тогда для любого $h > 0$

$$P(X_n \in (x, x+h)) = \frac{h}{\sigma\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{x - n\nu}{\sigma\sqrt{n}}\right) + o(1/\sqrt{n}) \text{ при } n \to \infty$$

равномерно по $x \in R$.

Лемма вытекает из локальной центральной предельной теоремы для цепи Маркова, доказанной в работе [2].

Положим при $h > 0$, $y \in R$ и $k \ge 1$

$$Q_{n,k,h}(dx_1, ..., dx_k \mid y) = P(\xi_1 \in dx_1, ..., \xi_k \in dx_k \mid X_n \in (y, y+h)).$$

Ясно, что $Q_{n,k,h}(\cdot \mid y)$ есть условное распределение случайных величин $\xi_1, ..., \xi_k$, распределенных как приращения $\xi(u)$ $(u > N)$цепи Маркова X при условии, что $X_n \in (y, y+h)$.

Лемма 2. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда

1) Для каждого k условное распределение $Q_{n,k,h}(\cdot \mid y)$ слабо сходится при $n \to \infty$ к безусловному совместному распределению случайных величин $\xi_1, ..., \xi_k$, причем сходимость выполняется равномерно по y, $y - n\nu = O(\sqrt{n})$ и по h из ограниченного множества в $(0, \infty)$.

2) Для любого числа $\delta \in (0,1)$ существует константа $M = M(\delta)$ такая, что для всех y, $y - n\nu = O(\sqrt{n})$ y, $y - n\nu = O(\sqrt{n})$ по h из ограниченного множества в $(0, \infty)$ выполняется неравенство $Q_{n,k,h}(\cdot \mid y) \le MP(\xi_1 \in dx_1, ..., \xi_k \in dx_k)$.

Эта лемма доказана в работе [4].

Лемма 3. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда

1) $P(\tau_c < \infty) = 1$ для всех $c \geq 0$,

2) $\tau_c \xrightarrow{п.н} \infty$ при $c \to \infty$,

3) $\frac{\tau_c}{c} \xrightarrow{п.н.} \frac{1}{\Delta(\mu)}$ при $c \to \infty$.

Эти утверждения доказываются, повторяя аналогичные рассуждения из работы [5], с помощью соотношений (4) и (5).

Доказательство теоремы. Разделим промежуток $(0, r]$ на k равных частей и положим

$$\delta_i = \left(\frac{i-1}{k} r, \frac{i}{k} r \right], i = \overline{1, m} \cdot$$

По формуле полной вероятности можно написать

$$P(\tau_c = n,\, R_c \leq r) = \sum_{i=1}^{k} P(\tau_c = n \,|\, T_n \in c + \delta_i) P(T_n \in c + \delta_i). \tag{8}$$

Ясно, что по определению величины τ_c имеет место

$$P(\tau_c = n \,|\, T_n \in c + \delta_i) = P(\tau_c \geq n \,|\, T_n \in c + \delta_i). \tag{9}$$

Тогда из (9) получаем

$$\begin{aligned} &P(\tau_c = n \,|\, T_n \in c + \delta_i) = P(T_j \leq c, 1 \leq j < n \,|\, T_n \in c + \delta_i) = \\ &= P(T_n - T_j \geq T_n - c,\, 1 \leq j < n \,|\, T_n \in c + \delta_i) = \\ &= P(T_n - T_{n-j} \geq T_n - c,\, 1 \leq j < n \,|\, T_n \in c + \delta_i). \end{aligned} \tag{10}$$

На множестве $\{\omega : T_n \in c + \delta_i\}$ выполняется двустороннее неравенство

$$c + \frac{i-1}{k} r < T_n \leq c + \frac{i}{k} r\,.$$

Поэтому из (10) имеем

$$\begin{aligned} &P\left(T_n - T_{n-j} \geq \frac{i}{k} r,\, 1 \leq j < n \,\middle|\, T_n \in c + \delta_i \right) \leq P(\tau_c = n \,|\, T_n \in c + \delta_i) \leq \\ &\leq P\left(T_n - T_{n-j} \geq \frac{i-1}{k} r,\, 1 \leq j < n \,\middle|\, T_n \in c + \delta_i \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда из (8) и (11) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} P\left(T_n - T_{n-j} \geq \frac{i}{k} r,\, 1 \leq j < n \,\middle|\, T_n \in c + \delta_i \right) \leq P(\tau_c = n, R_c \leq r) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} P\left(T_n - T_{n-j} \geq \frac{i-1}{k} r,\, 1 \leq j < n \,\middle|\, T_n \in c + \delta_i \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Оценим вероятность

$$J_0 = P(T_n - T_{n-j} \geq x, 1 \leq j < n \,|\, T_n \in c + \delta_i) = P(AB \,|\, C),$$

где $A = \{\omega : T_n - T_{n-j} \geq x, 1 \leq j \leq q_1\}$, $B = \{\omega : T_n - T_{n-j} \geq x, q_1 < j < n\}$, $C = \{\omega : T_n \in c + \delta_i\}$

и q_1 - некоторое фиксированное число между 1 и $n-1$.

Применяя простое неравенство для событий A, B и C

$$P(A|C) \geq P(AB|C) \geq P(A|C) - P(\overline{B}|C), \tag{13}$$

имеем

$$P(T_n - T_{n-j} \geq x,\, 1 \leq j < q_1 |\, T_n \in c + \delta_i) - P(T_n - T_{n-j} < x, \exists j \in (q_1, n) |\, T_n \in c + \delta_i) \leq \\ \leq J_0 \leq P(T_n - T_{n-j} \geq x,\, 1 \leq j \leq q_1 |\, T_n \in c + \delta_i). \tag{14}$$

Докажем, что для каждого $i = \overline{1, k}$

$$J_1 = P(T_n - T_{n-j} < x, \exists j \in (q_1, n) |\, T_n \in c + \delta_i) \to 0 \text{ при } c \to \infty \text{ и } q_1 \to \infty \tag{15}$$

равномерно по x и r из ограниченного множества в R.

Действительно, для числа $\delta \in (0{,}1)$ можно написать

$$J_1 \leq J_2 + J_3, \tag{16}$$

где

$$J_2 = P(T_n - T_{n-j} \leq x, \exists j \in (q_1, n) |\, T_n \in c + \delta_i)$$

и

$$J_3 = P(T_n - T_{n-j} \leq x, \exists j \in (n\delta, n) |\, T_n \in c + \delta_i).$$

Сначала оценим J_3. Ясно, что полагая $n - j = l$ имеем для $i = \overline{1, k}$

$$J_3 = P(T_l \geq T_n - x, \exists l \in [1, (1-\delta)n] |\, T_n \in c + \delta_i) \leq \\ \leq P\left(T_l \geq c + \frac{i-1}{k} r - x, \exists l \in [1, (1-\delta)n] |\, T_n \in c + \delta_i \right).$$

Отсюда, в силу утверждения 2) леммы 2 получаем

$$J_3 \leq MP\left(T_l \geq c + \frac{i-1}{k} r - x, \exists l \in [1, (1-\delta)n] \right). \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что

$$P\left(T_l \geq c + \frac{i-1}{k} r - x, \exists l \in [1, (1-\delta)n] \right) = P(\tau_a \leq [1, (1-\delta)n]),$$

где $a = c + \frac{i-1}{k} r - x$.

Из утверждения 3) леммы 2 следует, что

$$\frac{\tau_a}{a} \xrightarrow{п.н.} \frac{1}{\Delta(\nu)} \text{ при } a \to \infty,$$

так как $a \sim c$ при $c \to \infty$.

В силу (6)

$$\frac{\tau_a}{n} \xrightarrow{п.н.} 1 \text{ при } c \to \infty.$$

Следовательно,

$$P(\tau_a \leq (1-\delta)n) \to 0 \text{ при } c \to \infty.$$

Из последнего соотношения и (17) вытекает, что для каждого $i = \overline{1, k}$

$$J_3 \to 0 \text{ при } c \to \infty$$

равномерно по x и r из ограниченного множества в R.

Теперь оценим J_2. Для достаточно больших c имеем

$$J_2 = \frac{1}{P(T_n \in c+\delta_i)} \times \int_{\delta_i} P\left(T_n - T_{n-j} \le x, \exists j \in (q_1, n) \middle| \frac{X_n}{n} = \Delta^{-1}\left(\frac{c+y}{n}\right)\right) P(T_n \in c + dy), \qquad (18)$$

где $\Delta^{-1}(x)$ означает обратную функцию $\Delta(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки $x = \nu$, так как $\Delta'(\nu) \neq 0$.

С помощью рассуждений, проведенных в доказательстве теоремы 5.1 из работы [8] (см. также[3]) и свойства частично однородности цепи Маркова X можно показать, что существует некоторое число $\gamma > 0$ такое, что для y, $y - n\nu = O(\sqrt{n})$

$$P\left(T_n - T_{n-j} \le x, \exists j \in (q_1, n) \middle| \frac{X_n}{n} = y \right) \le P\left(\left| \frac{X_j}{j} - \nu \right| > \gamma, \exists j \in (q_1, n\delta] \middle| \frac{X_n}{n} = y \right). \qquad (19)$$

Из (18) и (19) вытекает, что

$$J_2 \le P\left(\left| \frac{X_j}{j} - \nu \right| > \gamma, \exists j \in (q_1, n\delta] \middle| T_n \in c + \delta_i \right).$$

Тогда в силу утверждения 2) леммы 2 имеем

$$J_2 \le MP\left(\left| \frac{X_j}{j} - \nu \right| > \gamma, \exists j \in (q_1, n\delta] \right) \le MP\left(\left| \frac{X_j}{j} - \nu \right| > \gamma, \exists j > q_1 \right). \qquad (20)$$

Из усиленного закона больших чисел (3) для цепи X вытекает, что

$$P\left(\left| \frac{X_j}{j} - \nu \right| > \gamma, \exists j > q_1 \right) \to 0 \text{ при } q_1 \to \infty.$$

Поэтому из (20) получаем, что $J_2 \to 0$ при $q_1 \to \infty$ для всех $i = \overline{1,k}$, x и r из ограниченного множества. Следовательно, из (16) следует (15). Таким образом, из (12) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое целое число q_1, такое, что для каждого $i = \overline{1,k}$

$$\begin{aligned} &P(T_n - T_{n-j} \ge x,\ 1 \le j < q_1 \mid T_n \in c + \delta_i) - \varepsilon \le P(T_n - T_{n-j},\ 1 \le j < n \mid T_n \in c + \delta_i) \le \\ &\le P(T_n - T_{n-j},\ 1 \le j < q_1 \mid T_n \in c + \delta_i). \end{aligned} \qquad (21)$$

Далее из утверждения 1) леммы 2 и из свойства частично однородности в пространстве цепи Маркова X, вытекает, что для каждого $i = \overline{1,k}$ и фиксированного $p \ge 1$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(T_n - T_{n-j} \ge x, 1 \le j \le p \middle| T_n \in c + \delta_i\right) = P\left(S_j \ge x,\ 1 \le j \le p\right). \qquad (22)$$

Из усиленного больших чисел для сумм S_n вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число q_2, такое, что

$$P\left(S_j \le x,\ \exists j > q_2\right) < \varepsilon, \qquad (23)$$

так как $ES_1 = \Delta(\nu) > 0$.

Тогда применяя (13) и учитывая (23) находим, что

$$P\left(S_j \ge x,\ 1 \le j \le q_2\right) - \varepsilon \le P\left(S_j \ge x,\ j \ge 1\right) \le P\left(S_j \ge x, 1 \le j \le q_2\right). \qquad (24)$$

Положим $q = \max(q_1, q_2)$. Для $p = q$ из (22) следует, что для достаточно больших c и любого числа $\varepsilon > 0$

$$P\left(S_j \ge x, 1 \le j \le q\right) - \varepsilon \le P\left(T_n - T_{n-j} \ge x,\ 1 \le j < q \,\middle|\, T_n \in c + \delta_i\right) \le$$
$$\le P\left(S_j \ge x, 1 \le j \le q\right) + \varepsilon .$$

Тогда из (21) получаем(в (21) вместо q_1 можно взять q).

$$P\left(S_j \ge x, 1 \le j \le q\right) - 2\varepsilon \le P\left(T_n - T_{n-j} \ge x,\ 1 \le j < n \,\middle|\, T_n \in c + \delta_i\right) \le$$
$$\le P\left(S_j \ge x, 1 \le j \le q\right) + \varepsilon .$$

Поэтому из (24) (вместо q_2 полагая q) получаем

$$P\left(S_j \ge x,\ j \ge 1\right) - 2\varepsilon \le P\left(T_n - T_{n-j} \ge x,\ 1 \le j < n \,\middle|\, T_n \in c + \delta_i\right) \le$$
$$\le P\left(S_j \ge x,\ j \ge 1\right) + 2\varepsilon \qquad (25)$$

Подставляя (25) в (12) имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\left(P\left(S_j \ge \frac{i}{k} r,\ j \ge 1\right) - 2\varepsilon\right) P\left(T_n \in c + \delta_i\right) \le$$
$$\le P\left(\tau_c = n, R_c \le r\right) \le \sum_{i=1}^{k}\left(P\left(S_j \ge \frac{i-1}{k} r,\ j \ge 1\right) + 2\varepsilon\right) P\left(T_n \in c + \delta_i\right). \qquad (26)$$

Теперь оценим $P\left(T_n \in c + \delta_i\right)$.

Пусть $\Delta'(\nu) > 0$. Тогда из сделанных допущений вытекает, что в некоторой окрестности точки $x = \nu$ существует возрастающая обратная функция $\Delta^{-1}(x)$, для которой имеет место

$$P\left(T_n \in c + \delta_i\right) = P\left(n\Delta^{-1}\left(\frac{c + \frac{i-1}{k} r}{n}\right)\right) \le X_n \le n\Delta^{-1}\left(\frac{c + \frac{i}{k} r}{n}\right). \qquad (27)$$

Разложение Тейлора функции $\Delta^{-1}(x)$ в точке $x = \Delta(\nu)$ дает

$$\Delta^{-1}(x) = \nu + \frac{1}{\Delta'(\nu)}\left(x - \Delta(\nu)\right) + o\left(x - \Delta(\nu)\right).$$

С помощью этого разложения из (27) для фиксированного $i = \overline{1,k}$ и r из ограниченного множества в $(0, \infty)$ получаем

$$P\left(T_n \in c + \delta_i\right) = P\left(o\left(c - n\Delta(\nu)\right) + c + \frac{i-1}{k} r \le Z_n \le c + \frac{i}{k} r + o\left(c - n\Delta(\nu)\right)\right).$$

Отсюда, учитывая, что $c - n\Delta(\nu) = O\left(\sqrt{n}\right)$, получаем

$$P\left(T_n \in c + \delta_i\right) = P\left(Z_n \in c + \delta_i + o\left(\sqrt{n}\right)\right) = P\left(X_n \in \frac{c + \delta_i - n\Delta(\nu)}{\Delta'(\nu)} + n\nu + o\left(\sqrt{n}\right)\right).$$

Из леммы 1 и последнего равенства вытекает, что

$$P\left(T_n \in c+\delta_i\right)=\frac{\frac{r}{k}}{\Delta'(\nu)\sigma\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{c+\frac{i-1}{k}r-n\Delta(\nu)}{\Delta'(\nu)\sigma\sqrt{n}}\right)+o\left(1/\sqrt{n}\right).$$

Учитывая (6), отсюда имеем

$$P\left(T_n \in c+\delta_i\right)\sim\frac{\frac{r}{k}}{\Delta'(\nu)\sigma\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\theta\mu}{\Delta'(\nu)\sigma}\right) \qquad \text{при } c\to\infty \tag{28}$$

для всех $r>0$ и θ из ограниченного множества в R.

Повторяя выше проведенные рассуждения и выкладки можно показать, что для случая $\Delta'(\nu)<0$ имеет место

$$P\left(T_n \in c+\delta_i\right)\sim -\frac{\frac{r}{k}}{\Delta'(\nu)\sigma\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\theta\mu}{\Delta'(\nu)\sigma}\right) \text{ при } c\to\infty \quad . \tag{29}$$

Объединяя (28) и (29) можно написать

$$P\left(T_n \in c+\delta_i\right)\sim\frac{\frac{r}{k}}{\left|\Delta'(\nu)\right|\sigma\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\theta\mu}{\Delta'(\nu)\sigma}\right)$$

или для достаточно больших c

$$(1-\varepsilon)\frac{r/k}{\rho\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\theta\mu}{\rho}\right)\le P\left(T_n\in c+\delta_i\right)\le(1+\varepsilon)\frac{r/k}{\rho\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{\theta\mu}{\rho}\right), \tag{30}$$

где $\varepsilon>0$-произвольное малое число.

Из (26) и (30) для достаточно больших c имеем

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{r}{k}P\left(S_i\ge\frac{i}{k}, i\ge1\right)-2\varepsilon\right)\le\frac{\rho\sqrt{n}P\left(\tau_c=n, R_c\le r\right)}{\varphi\left(\frac{\theta\mu}{\rho}\right)}\le \tag{31}$$

$$\le(1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{r}{k}P\left(S_i\ge\frac{i-1}{k}, i\ge1\right)+2\varepsilon\right).$$

Ясно, что сумма в правой и левой части (31) является интегральной суммой следующего интеграла

$$Q(r)=\int_0^r P(L\ge x)dx,\ \ L=\inf_{i\ge1}S_i.$$

Согласно теореме 2.7 работы [8] можно написать

$P(L\ge x)=\frac{\mu}{ES\tau_+}P\left(S_{\tau_+}\ge x\right)$, где $\tau_+=\inf\{i\ge1: S_i>0\}$ и $\mu=\Delta(\nu)$.

Тогда, выбирая k достаточно большое и ε достаточно малое, получаем, что правая и левая части (31) стремятся к пределу $Q(r)=\mu H(r)$.

Теорема доказана.

Следствие 1 вытекает из асимптотики (7) при $x \to \infty$, а следствие 2 вытекает, в силу теоремы и следствия 1, из равенства

$$P\left(R_c \le r \,\middle|\, \tau_a = n\right) = \frac{P\left(\tau_a = n, R_c \le r\right)}{P\left(\tau_a = n\right)}.$$

Замечание 1. Из хода доказательства теоремы ясно, что ее утверждение имеет место равномерно по r из ограниченного множества в $[\delta, \infty)$ с $\delta > 0$ и по θ из ограниченного множества в R.

Замечание 2. Следствие 2 утверждает, что для однородной во времени и частично однородной в пространстве цепи Маркова X момент первого выхода τ_c и перескок R_c асимптотически независимы при $c \to \infty$. Асимптотическая независимость величин τ_c и R_c для случая обычного процесса суммирования независимых одинаково распределенных случайных величин доказана в работе [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. Асимптотика вероятности пересечения границы траекторией цепи Маркова –Экспоненциально убывающие хвосты скачков. Теория вероятн. и ее примен. 2003, т.48, в.2, с. 254-273.
2. Коршунов Д.А. Предельные теоремы для общих цепей Маркова. Сиб.мат.ж. 2001, т.42, №2, с.354-371.
3. Рагимов Ф.Г. Предельные теоремы для моментов первого выхода процессов с независимыми приращениями. Канд.дисс. физ.мат.наук. М., 1985, 127 с.
4. Aliyev S., Abdurakhmanov V. Asymptotic behavior of joint distribution of the overshoot and the first passage time of Markov chain of the level. Вiсник Львiвского Университету, сер. Мех-мат. 2009, в.70, с.5-13.
5. Aliyev S., Abdurakhmanov V. Limit theorems for the first passage time of the level by nonlinear function of Markov chain. Transactions of NAS of Azerbaijan, 2010, XXX, №1, p.25-30.
6. Melfi V.F. Nonlinear Markov renewal theory with statistical applications. Ann. Probab. 1992, v.20, № 2, p.753-771.
7. Rahimov F., Abdurakhmanov V., Azizov F. Integral limit theorems for the first passage time of parabolas by Markov chains. Proceeding of JMM of NAS of Azerbaijan, 2009, XXXI, p.139-144.
8. Woodroofe M. Nonlinear renewal theory in sequential analysis. SIAM. 1982, 119 p.

This work is supported by the Science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan Grant №EIF-2011-1(3)-82/30/1.

MARKOV ZƏNCİRİNİN TRAYEKTORİYASININ SƏRHƏDLƏRİ KƏSMƏ MƏSƏLƏLƏRİNDƏ LOKAL EHTİMALLARIN ASİMPTOTİKALARI

F.H.RƏHİMOV, F.C.ƏZİZOV

XÜLASƏ

İşdə Markov zəncirindən asılı qeyri-xətti funksiya ilə təsvir edilən təsadüfi dolaşmanın səviyyəni birinci dəfə kəsmə anının və ekssessanın birgə paylanmasının asimptotikası haqqında teorem isbat edilmişdir və birinci dəfə kəsmə anı üçün lokal limit teoremi alınmışdır.

Açar sözlər: Markov zənciri, səviyyəni birinci dəfə kəsmə anı və ekssessa, birgə paylanma, lokal limit teoremi.

ASYMPTOTICS OF LOCAL PROBABILITIES IN THE BOUNDARY PROBLEMS OF INTERSECTION BY THE MARKOV CHAIN TRAYECTORY

F.H.RAHIMOV, F.J.AZIZOV

SUMMARY

The work proves the theorems on the asymptotic behavior of joint distribution of the oversoot and the first intersection time of the level of random work described by a nonlinear function of the Markov chain and a local limit theorem for the first intersection time has been obtained.

Key words: Markov chain, first intersection time and oversoot of the level, joint distribution, local limit theorem.

Поступила в редакцию: 15.02.2012 г.
Подписано к печати: 08.05.2012 г.