BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2012***

УДК 517.91/.93

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ВОЛЬТЕРРА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Г.М.МАСМАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет
Факультет Прикладной Математики и Кибернетики
agil_khanmamedov@yahoo.com

Рассмотрена задача Коши для полубесконечной цепочки Вольтерра в классе самосопряженных, сильно непрерывно дифференцируемых операторов с чисто дискреетным спектром. Методом обратной спектральной задачи получены формулы, позволяющие найти решение этой задачи. Установлено, что предложенный способ действиительно приводит к решению цепочки Вольтерра.

Ключевые слова: цепочка Вольтерра, обратная задача, сильно непрерывная дифференцируемость.

Цепочка Вольтерра обладает разнообразными приложениями в физике плазмы и в зоологии (см.[1]). Известно, что метод обратной спектральной задачи позволяет детально исследовать задачу Коши для цепочки Вольтерра в случае ограниченного начального условия [2] и в периодическом случае [3].

Настоящая работа посвящена исследованию следующей задачи Коши для цепочки Вольтерра

$$\dot{c}_n = c_n(c_{n-1} + c_{n+1}), \quad n = 0,1,..., \quad c_{-1} = 0, \; c_n = c_n(t) > 0, \tag{1}$$

$$c_n(0) = \hat{c}_n, \qquad n = 0,1,..., \quad \cdot = \frac{d}{dt}, \tag{2}$$

где последовательность $\hat{c}_n$ такова, что разностное выражение

$$(\ell_0 y)_n = \sqrt{\hat{c}_{n-1}}\, y_{n-1} + \sqrt{\hat{c}_n}\, y_{n+1}, \; n = 0,1,...$$

и граничное условие $y_{-1} = 0$ порождают в пространстве $\ell_2[0,\infty)$ самосопряженный, вообще говоря, неограниченный оператор с чисто дискретным спектром. Заметим, что достаточное условие, обеспечивающее последнее требование, установлено в [4].

Будем искать такое решение задачи (1)-(2), что ассоциированный с ней якобиевый оператор сильно непрерывно дифференцируем, самосопряжен и имеет чисто дискретный спектр.

В данной работе, методом обратной спектральной задачи, получены формулы, позволяющие найти решение задачи (1)-(2) в любой момент времени t. Установлено, что предлагаемый способ действительно приводит к решению.

1. В этом пункте сформулируются некоторые известные факты, относящиеся к обратной спектральной задаче для якобиевых операторов, многие из которых содержатся с доказательствами в [5],[6].

Определим оператор L', полагая на совокупности финитных на ∞ последовательностей y из $\ell_2[0,\infty)$ $(L'y)_n = (\ell y)_n$, где

$$(\ell y)_n = \sqrt{c_{n-1}}\, y_{n-1} + \sqrt{c_n}\, y_{n+1},\ n = 0,1,...$$

причем при подсчете $(L'y)_0$ считаем, что $y_{-1} = 0$.

Очевидно, что оператор L' симметричен. Через $L = L(t)$ обозначим замыкание оператора L'. Легко показать, что область определения сопряженного оператора L^* состоит из тех $y \in \ell_2[0,\infty)$, для которых $\ell y \in \ell_2[0,\infty)$, причем $(L^* y)_n = (\ell y)_n$. Будем считать, что оператор L самосопряжен и имеет чисто дискретный спектр $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

Обозначим через $p_n = p_n(\lambda)$ решение уравнения

$$(\ell y)_n = \lambda y_n, n = 0,1,... \tag{3}$$

$p_{-1} = 0, p_0 = 1$. Известно, что собственные значения оператора L симметричны относительно точки $\lambda = 0$ и $\{p_n(\lambda_k)\}_{n=0}^{\infty}$ есть собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_k.

Введем нормировочные коэффициенты, полагая

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^2(\lambda_k),\ k = 0,1,....$$

При этом симметричным собственным значениям соответствуют равные нормировочные коэффициенты и верно [5] равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} = 1. \tag{4}$$

Совокупность величин $\{\lambda_k, \alpha_k > 0\}_{k=0}^{\infty}$ назовем спектральными данными оператора L. Обратная спектральная задача для оператора L заключается в нахождении коэффициента c_n, $n = 0,1,...$ по спектральным данным $\{\lambda_k, \alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$, для которых справедливо равенство (4). Обратная задача решается следующим образом (см.[2], [5]). По спектральным данным строим моменты S_n, по формулам

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^n \alpha_k^{-1}, \quad n = 0,1,.... \tag{5}$$

и ганкелевы определители D_n, по формулам

$$D_{-1} = 1, \; D_n = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & ... & S_n \\ S_1 & S_2 & ... & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & ... & S_{2n} \end{vmatrix}, \quad n = 0,1,2, ... \tag{6}$$

Вычисляем c_n по формуле

$$c_n = D_{n-1} D_{n+1} D_n^{-2}. \tag{7}$$

Следует отметить, что при нечетных значениях n моменты S_n обращаются в нуль. Это обстоятельство значительно упрощает вычисления определителей D_n.

2. Пусть теперь коэффициент оператора $L = L(t)$ удовлетворяет задаче (1)-(2), причем этот оператор сильно непрерывно дифференцируем. Вводим максимальный оператор A, полагая

$$(Ay)_n = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{c_n}\sqrt{c_{n+1}}\, y_{n+2} - \sqrt{c_{n-2}}\sqrt{c_{n-1}}\, y_{n-2}\right\},$$

причем при подсчете $(Ay)_0$, $(Ay)_1$ считаем, что $y_{-2} = y_{-1} = 0$. Очевидно, что область определения оператора A состоит из тех $y \in \ell_2[0,\infty)$ для которых $Ay \in \ell_2[0,\infty)$. Легко показать, что $A^* = -A$.

Известно, что уравнение (1) эквивалентно матричному уравнению

$$\dot{L} = LA - AL, \tag{8}$$

которое влечет за собой унитарную эквивалентность семейства операторов $L = L(t)$ (см.[2]). Как явствует из последнего спектр оператора $L = L(t)$ не зависит от t.

Рассмотрим решение $p_n = p_n(\lambda, t)$ уравнения (3). Используя (8), как и в [2] устанавливается, что $u = \{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $u_n = \dot{p}_n(\lambda_k, t) + (Ap(\lambda_k, t))_n$ удовлетворяет уравнению $Lu = \lambda_k u$. Откуда следует, что u_n и $p_n(\lambda_k, t)$ линейно зависимы. Учитывая, что $u_0 = \dfrac{\lambda_k^2 - c_0(t)}{2}$, получим $u_n = \dfrac{\lambda_k^2 - c_0(t)}{2} \; p_n(\lambda_k, t)$.

Из последнего равенства заключаем, что

$$\dot{p}_n(\lambda_k, t) + (Ap(\lambda_k, t))_n \in \ell_2[0,\infty). \tag{9}$$

С другой стороны, из сильной дифференцируемости оператора L и равенства $Lp(\lambda_k, t) = \lambda_k p(\lambda_k, t)$ вытекает, что $\dot{p}(\lambda_k, t) \in \ell_2[0,\infty)$. Тогда при помощи (9) устанавливаем $p(\lambda_k, t)$, что принадлежит области определения оператора A.

Найдем динамику нормировочного коэффициента $\alpha_k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n^2(\lambda_k,t),\ k=0,1,....$. Из сильной непрерывной дифференцируемости оператора следует, что $\alpha_k(t)$ непрерывно дифференцируема и

$$\dot{\alpha}_k(t)=2\sum_{n=0}^{\infty}\dot{p}_n(\lambda_k,t)p_n(\lambda_k,t).$$

Так как $\dot{p}_n(\lambda_k,t)=\dfrac{\lambda_k^2-c_0(t)}{2}\ p_n(\lambda_k,t)+\left(Ap(\lambda_k,t)\right)_n$, то имеем

$$\dot{\alpha}_k(t)=\left[\lambda_k^2-c_0(t)\right]\alpha_k(t)+\left(Ap(\lambda_k,t),p(\lambda_k,t)\right)_{\ell_2[0,\infty)}.$$

В силу равенства $A^*=-A$ получаем, что второе слагаемое правой части последнего соотношения обращается в нуль. Поэтому имеем

$$\dot{\alpha}_k(t)=\left[\lambda_k^2-c_0(t)\right]\alpha_k(t),$$

откуда следует, что

$$\alpha_k^{-1}(t)=\alpha_k^{-1}(0)\exp\left\{-\lambda_k^2t+\int_0^t c_0(\tau)d\tau\right\},\ k=0,1,... \tag{10}$$

В (10) функция $c_0(t)$ не может быть произвольной, она должна обеспечивать выполнение равенства (4) с параметром t. Учитывая это в (10), находим

$$\exp\left[\int_0^t c_0(\tau)d\tau\right]=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{-1}(0)e^{-\lambda_k^2t}\right)^{-1}.$$

Подставляя последнее равенство в (10), окончательно получаем

$$\alpha_k^{-1}(t)=\alpha_k^{-1}(0)e^{-\lambda_k^2t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{-1}(0)e^{-\lambda_k^2t}\right)^{-1},\quad k=0,1,... \tag{11}$$

Из однозначной разрешимости обратной спектральной задачи и из вышеуказанных рассуждений следует следующая

Теорема. *Задача (1)-(2) может иметь лишь единственное решение. Если решение существует, то оно может быть найдено следующей процедурой. По начальному условию* $c_0(0)=\hat{c}_n$ *строим якобиевый оператор* $L(0)$, *пусть* $\{\lambda_k,\alpha_k(0)\}_{k=0}^{\infty}$ *- его спектральные данные. Подсчитаем спектральные данные* $\{\lambda_k,\alpha_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ *по формуле (11). Формулы (7), записанные в момент времени* t, *дают решение.*

Замечание. Описанная в теореме процедура действительно приводит к решению задачи (1)-(2). Именно, построим ганкелевы определители по формулам (5)-(6) в момент времени. Тогда при помощи тождеств Сильвестра и Фробениуса для ганкелевых определителей (см. [7]).

Заключаем, что имеет место соотношение

$$\dot{D}_n=(n-1)D_1D_n+D_{n-1}D_{n+1}D_n^{-1}+2D_n\sum_{k=1}^{n-1}D_{k-1}D_{k+1}D_k^{-1},\qquad (n=2,3,...),$$

из которого вытекает, что определенная по формуле (7) функция $c_n(t)$ удовлетворяет (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Манаков С.В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // ЖЭТФ. 1974, т.67, №2, с.543-555.
2. Березанский Ю.М. Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР. 1985, т.281, №1, с.16-19.
3. Date E., Tanaka S. Analogue of inverse scattering theory for the discrete Hills equation and exact solutions for the periodic Toda lattice / Prog. Theor. Phys. 1976, v.55, p.457-465.
4. Масмалиев Г.М.,Ханмамедов Аг.Х.Об условиях дискретности спектра полубесконечной матрицы Якоби с нулевой диагональю// Укр. Мат. Журн. 2010, т.62, №2, с.285-288.
5. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова Думка, 1965, 800 с.
6. Гусейнов Г.Ш. Определение бесконечной матрицы Якоби по двум спектрам // Мат. заметки. 1978, т.23, №5, с.709-720.
7. Иохвидов И.С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М.: Наука, 1974, 254 с.

QEYRİ-MƏHDUD SƏRHƏD ŞƏRTLİ VOLTERR ZƏNCİRİ ÜÇÜN KOŞİ MƏSƏLƏSİ

H.M.MƏSMALIYEV

XÜLASƏ

Təmiz diskret spektrli öz-özünə qoşma, kəsilməz diferensiallanan operatorlar sinfində yarımsonsuz Volterr zənciri üçün Koşi məsələsinə baxılmışdır. Tərs spektral məsələ metodu ilə bu məsələnin həllinin tapılmasına imkan verən düsturlar alınmışdır. Müəyyən edilmişdir ki, bu metod həqiqətən Volterr zəncirinin həllinə gətirir.

Açar sözlər: Volterr zənciri, tərs məsələ, güclü kəsilməz diferensiallama

CAUCHY PROBLEM FOR THE VOLTERRA LATTICE WITH UNBOUNDED INITIAL CONDITIONS

H.M.MASMALIYEV

SUMMARY

The paper studies the Cauchy problem for the semiinfinite Volterra lattice in the class of selfadjoint continuously strong differentiable operators with pure discrete spectrums. Using the method of inverse spectral problems the formulas allowing one to find the solution of this problem are obtained. It is shown that this method really allows one to find the solution of the Volterra lattice.

Key words: Voltera lattice, inverse problem, continuously strong differentiable.

Поступила в редакцию: 11.04.2012 г.
Подписано к печати: 08.05.2012 г.