

UOT 517.95

BİRİNCİ TƏRTİB ELLİPTİK TIP TƏNLİK ÜÇÜN
STEKLOV MƏSƏLƏSİ

N.Ə.ƏLİYEV, R.M.ZEYNALOV

Bakı Dövlət Universiteti
AMEA Kibernetika İnstitutu
Ramin_z@rambler.ru

Baxılan işdə birinci tərtib elliptik tip tənlik üçün sərhəd şərtində spektral parametr olan sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Sərhəd şərtinə parametr daxil olduğu üçün bu məsələ Steklov məsələsi adlanır. İşdə baxılan məsələ parametrdən asılı ikinci növ Fredholm bircins integral tənliyə gətirilir. Alınan integral tənliyin məxsusi ədədləri və məxsusi funksiyaları tapılmış, məxsusi ədədlər verilən sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri olduğu göstərilmiş və qoyulan məsələnin məxsusi funksiyaları təyin olunmuşdur.

Açar sözlər: Koşi-Riman tənliyi, qeyri-lokal sərhəd şərti, Steklov məsələsi, zəruri şərt, istiqamətə görə fundamental həll, Fredholm luq

Xüsusi törəmli tənliklər nəzəriyyəsində elliptik tənliyin modeli olaraq Laplas tənliyi götürülür. Bu tip tənlik üçün Dirixle, Neyman və ya Puankare tipli lokal şərtlər daxilində sərhəd məsələlərinə baxılmışdır. Bu cür sərhəd məsələləri Koşi-Riman tənliyi üçün mümkün deyil. Belə ki, bu tənlik üçün Dirixle məsələsinə baxıb, bütün sərhədə ixtiyari funksiya vermək mümkün deyil. Ona görə də Koşi-Riman tənliyi üçün adətən qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələyə baxırlar [1], [3]. Burada baxdığımız Steklov məsələsində spektral parametr yalnız sərhəd şərtinə daxildir.

Məsələnin qoyuluşu

Analizdən məlum olan Koşi-Riman və ya Dalamber-Eyler şərtlərindən alınan

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, \quad (1)$$

tənliyi üçün

$$u(x_1, 0) + \lambda \int_0^1 [K_0(x_1, t)u(t, 0) + K_1(x_1, t)u(t, \gamma(t))] dt = 0. \quad x_1 \in [0, 1], \quad (2)$$

inteqral sərhəd şərti daxilində məsələnin Fredholmluğu tədqiq edək. Burada $i = \sqrt{-1}$, D həqiqi müstəvidə x_2 istiqamətində qabarıq oblast, onun $\Gamma = \overline{D} \setminus D$ sərhədi isə hissə-hissə Lyapunov xəttidir. $\lambda \in C$ kompleks parametr, $K_n(x_1, t)$ $n = 0, 1$, nüvələri isə kəsilməz funksiyalardır. Parametr yalnız sərhəd şərtinə daxil olduğundan (1), (2) Steklov məsələsi adlanır. Bu bircins məsələdə məxsusi ədəd və funksiyaların varlığını araşdıracağıq.

Fundamental həll

Tərif 1. Verilmiş tənliyin fundamental həlli dedikdə elə funksiya başa düşülür ki, bu funksiyanı tənlikdə yazdıqda Dirakın delta funksiyası alınsın. Məlumdur ki, (1) tənliyinin fundamental həlli [4](səh.122-123)

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}, \quad (3)$$

funksiyasıdır. Bu normal istiqamətdə fundamental olub, bilavasitə (1)-də $u(x)$ -in yerinə yazdıqda Dirakın delta funksiyasını vermir. Qeyd edək ki, (3) ümumiləşmiş funksiya mənasında fundamental həllidir. Yəni ixtiyari hamar $\varphi(x)$ üçün

$$\int_D \left[\frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} + i \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_1} \right] \varphi(x) dx = \varphi(\xi),$$

münasibəti ödənilir.

Tərif 2. Verilmiş (1) tənliyinin x_2 istiqamətdə fundamental həlli dedikdə, tərif 1-də verilmiş elə funksiya başa düşülür ki, Dirakın delta funksiyası yalnız bu funksiyanın x_2 -yə nəzərən törəməsindən alınmış olsun. Ona görə də (1) tənliyi üçün x_2 istiqamətində fundamental olan

$$U_2(x - \xi) = e(x_2 - \xi_2) \delta(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)), \quad (4)$$

həllindən istifadə edəcəyik.

$$e(x_2 - \xi_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x_2 > \xi_2, \\ 0 & x_2 = \xi_2, \\ -\frac{1}{2} & x_2 < \xi_2, \end{cases} \quad \text{Hevisaydın simmetrik vahid funksiyasıdır. Bu}$$

həll üçün

$$\frac{\partial U_2(x - \xi)}{\partial x_2} + i \frac{\partial U_2(x - \xi)}{\partial x_1} = \delta(x - \xi), \quad (5)$$

münasibətinin ödənilməsi asanlıqla görünür. İstiqamətə görə fundamental adlandırdığımız (4) ifadəsində Dirakın delta funksiyası yalnız onun x_2 -yə görə törəməsində alınır.

Zəruri şərtlər: Burada Koşı-Riman tənliyi üçün ikinci Qrin formuluna, bu ifadədən fundamental həllin köməyi ilə əsas münasibəti, ondan da zəruri şərtləri alırıq. Aşağıdakı hökmü isbat edək.

Teorem 1. Əgər D , x_2 istiqamətində qabarıq, məhdud müstəvi oblast, $\Gamma = \overline{D} \setminus D$ sərhədi isə hissə-hissə Lyapunov əyridirsə, onda D -də təyin olunmuş ixtiyari analitik funksiya

$$\begin{aligned} u(\xi_1, \gamma(\xi_1)) &= u(\xi_1 - i\gamma(\xi_1), 0), \\ u(\xi_1, 0) &= u(\xi_1 + i\sigma(\xi_1)), \quad \xi_1 \in [0, 1], \end{aligned}$$

şərtlərini ödəyir. Belə ki,

$$x_1 = \xi_1 + i\sigma(\xi_1),$$

ifadəsi

$$x_1 - \xi_1 - i\gamma(x_1) = 0,$$

tənliyinin həllidir.

İsbati. Verilmiş (1) tənliyinin hər iki tərəfini (4) funksiyasına vurub, D oblastı üzrə inteqrallayaq və alınan inteqrala Ostroqradski-Qauss düsturunu tətbiq etməklə ikinci Qrin formulunu quraq [4]:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right) U_2(x - \xi) dx = \int_{\Gamma} u(x) U_2(x - \xi) [\cos(\nu, x_2) + i \cos(\nu, x_1)] dx - \\ &- \int_D u(x) \left[\frac{\partial U_2(x - \xi)}{\partial x_2} + i \frac{\partial U_2(x - \xi)}{\partial x_1} \right] dx. \end{aligned}$$

Burada (5)-i nəzərə alıb, delta funksiyanın xassəsindən istifadə etsək, alırıq [4]:

$$\int_{\Gamma} u(x)U_2(x-\xi)[\cos(\nu, x_2) + i\cos(\nu, x_1)]dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D, \\ \frac{1}{2}u(\xi), & \xi \in \Gamma, \end{cases} \quad (6)$$

burada ν ilə Γ -sərhədinə x nöqtəsində çəkilmiş xarici normal işarə edilmişdir. Aldığımız (6)-ya daxil olan ikinci ifadə zəruri şərtlərdir. Beləliklə, biz tənlik üçün zəruri şərt dedikdə elə ifadə alırıq ki, tənliyin ixtiyari həlli bu şərtləri ödəsin. İndi isə zəruri şərtləri ayıraq:

$$\begin{cases} u(\xi_1, 0) = \int_0^1 u(x_1, \gamma(x_1))\delta(x_1 - \xi_1 - i\gamma(x_1))[1 - i\gamma'(x_1)]dx_1, \\ u(\xi_1, \gamma(\xi_1)) = \int_0^1 u(x_1, 0)\delta(x_1 - \xi_1 + i\gamma(\xi_1))dx_1. \end{cases} \quad (7)$$

Alınan (7) zəruri şərtlərindən ikincisi aşağıdakı ifadəni verir.

$$u(\xi_1, \gamma(\xi_1)) = u(\xi_1 - i\gamma(\xi_1), 0), \quad \xi_1 \in [0, 1]. \quad (8)$$

Zəruri şərtlər üçün alınmış (7) ifadələrinin birincisi aşağıdakı şəkllə düşür.

$$u(\xi_1, 0) = u(\xi_1 + i\sigma(\xi_1), \gamma(\xi_1 + i\sigma(\xi_1))), \quad (9)$$

belə ki,

$$x_1 - \xi_1 - i\gamma(x_1) = 0, \quad (10)$$

şərtindən

$$x_1 = \xi_1 + i\sigma(\xi_1), \quad (11)$$

həllinin alındığı qəbul edilir. Onlardan isə aşağıdakı eyniliklər alınır.

$$\gamma(x_1) = \sigma(x_1 - i\gamma(x_1)), \quad \sigma(\xi_1) = \gamma(\xi_1 + i\sigma(\xi_1)).$$

Bunlarda (10)-u, yaxud (11)-u nəzərə alsaq

$$\gamma(x_1) = \sigma(\xi_1).$$

Qeyd 1. İkinci zəruri şərtə daxil olan σ funksiyası elə qurulur ki, (11)

ifadəsi (10)-un x_1 -ə nəzərən həlli olsun.

Fredholm luq: Verilmiş (2) sərhəd şərtinə qayıdaq:

$$u(x_1, 0) + \lambda \int_0^1 K_0(x_1, t)u(t, 0)dt + \lambda \int_0^1 K_1(x_1, t)u(t, \gamma(t))dt = 0.$$

Burada üçüncü toplananda (8) zəruri şərtini nəzərə alsaq,

$$u(x_1, 0) + \lambda \int_0^1 K_0(x_1, t)u(t, 0)dt + \lambda \int_0^1 K_1(x_1, t)u(t - i\gamma(t), 0)dt = 0. \quad (12)$$

İndi isə bu üçüncü toplananda

$$t - i\gamma(t) = \tau, \quad (13)$$

əvəzləməsini aparsaq, onda həqiqi oxun $[0;1]$ parçası kompleks müstəvinin L xəttinə keçir ki, o xətt həqiqi oxun $[0;1]$ parçasını qapayır. Beləliklə, (13) əvəzləməsindən sonra (12) aşağıdakı şəkld düşər:

$$u(x_1, 0) + \lambda \int_0^1 K_0(x_1, t)u(t, 0)dt + \lambda \int_L K_1(x_1, \tau + i\sigma(\tau))u(\tau, 0)[1 + i\sigma'(\tau)]d\tau = 0 \quad (14)$$

Əsas şərt: Tutaq ki, (14) ifadəsinə daxil olan üçüncü inteqralın altında olan funksiyanın kompleks C müstəvisində yerləşən qapalı $[0,1] \cup L$ xətti daxilində heç bir məxsusiyyəti yoxdur. Onda Koşi teoreminə əsasən (14)-də olan üçüncü toplananda inteqralı $[0,1]$ oblastı üzrə inteqralla əvəz edə bilərik [5]. Beləliklə,

$$u(x_1, 0) = -\lambda \int_0^1 \{K_0(x_1, t) + K_1(x_1, t + i\sigma(t))[1 + i\sigma'(t)]\}u(t, 0)dt, \quad x_1 \in [0,1], \quad (15)$$

ikinci növ Fredholm tipli inteqral tənliyini almış oluruq.

Teorem 2. Teorem 1-in şərtləri daxilində əgər $K_j(x_1, t) \quad j = 0,1$ nüvələri kəsilməz olub, əsas şərt ödənilirsə, onda (1)- (2) sərhəd məsələsinin həllinin sərhəd qiyməti, requlyar nüvəli bircins (15) inteqral tənliyini ödəyir.

Tutaq ki, (15) tənliyinin məxsusi ədədləri λ_k , məxsusi funksiyaları isə $u_k(x_1, 0)$. Onda λ_k -ya uyğun olan $u_k(x_1, 0)$ -ların köməyilə (8)-dən $u_k(\xi_1, \gamma(\xi_1))$ -lər təyin olunur. Bu sərhəd qiymətləri əsas (6) münasibətində nəzərə alınırsa, onda qeyd olunmuş λ_k -ya uyğun olan (1) tənliyinin həlli (yəni məxsusi funksiya) aşağıdakı şəkildə olar.

$$u_k(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^1 u_k(x_1, 0) \delta(x_1 - \xi_1 + i\xi_2) dx_1 + \int_0^1 u_k(x_1, \gamma(x_1)) e(\gamma(x_1) - \xi_2) \delta(x_1 - \xi_1 - i(\gamma(x_1) - \xi_2)) [1 - i\gamma'(x_1)] dx_1, \quad \xi \in D, \quad (16)$$

ifadələridir. Alınan sərhəd qiymətləri həmin λ_k qiyməti üçün (2) sərhəd şərtini ödədiyindən (çünki (15) tənliyi (2) şərtindən alınmış idi), həmin λ_k -lar (1)-(2) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləridir. Beləliklə, (16)-da olan $u_k(x_1, 0)$ (15) tənliyinin məxsusi funksiyaları $u_k(x_1, \gamma(x_1))$ isə (8) zəruri şərtlərindən alınan

$$u_k(x_1, \gamma(x_1)) = u_k(x_1 - i\gamma(x_1), 0), \quad (17)$$

ifadələri ilə təyin edilirlər. Bununla da aşağıdakı hökm isbat edilmiş olur.

Teorem 3. Teorem 2-nin şərtləri daxilində əgər λ_k və $u_k(x_1, 0)$ -lar (15) tənliyinin məxsusi ədəd və funksiyalarıdırsa, onda λ_k -ya uyğun olan bu məxsusi funksiyaların, λ_k və (17)-nin köməyiylə (16)-da verilən $u_k(x)$ funksiyaları (1)-(2) Steklov məsələsinin məxsusi ədəd və funksiyalarıdır.

Qeyd 2. Eyni qayda ilə (8) zəruri şərti əvəzinə (9) zəruri şərtindən istifadə etməklə də teorem 3-ün hökmünü almış olardıq.

Qeyd 3. Asanlıqla görmək olar ki,

$$\xi_1 = \xi_1 + i\sigma(\xi_1) - i\gamma(\xi_1 + i\sigma(\xi_1)),$$

olduğundan (8) və (9) zəruri şərtləri bir-birindən asılıdırlar.

Misal. Aşağıdakı məsələyə baxaq.

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 \in (0, 1), \quad x_2 \in (0, \gamma(x_1)),$$

$$u(x_1, 0) = \lambda \int_0^1 e^{x_1 t} u(t, 0) dt. \quad x_1 \in [0, 1].$$

Verilmiş sərhəd şərti ayrılıqda, ikinci növ, bircins parametrdən asılı inteqral tənlik olduğundan, onun məxsusi ədəd və funksiyalarını təyin etmək olar. Bunların hər qismi üçün aşağıdakı kimi təqribi ifadələr alaıq. İnteqralın nüvəsini $n+1$ həddi üçün Taylor formuluna ayıraq və xətanı ataq. Onda

$$u(x_1, 0) = \lambda \sum_{k=0}^n \frac{x_1^k}{k!} \int_0^1 t^k u(t, 0) dt, \quad x_1 \in [0, 1],$$

cırlaşmış nüvəli inteqral tənlik alarıq. Buradan

$$\int_0^1 x_1^s u(x_1, 0) dx_1 = \lambda \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{x_1^{k+s}}{k!} dx_1 \int_0^1 t^k u(t, 0) dt,$$

yaxud

$$y_s = \lambda \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{y_k}{k!(k+s+1)}, \quad s = \overline{0, n},$$

parametrdən asılı xətti bircins cəbri tənliklər sistemini alırıq. Bu sistemin məxsusi ədədlərini λ_k , məxsusi vektorlarını isə $y^{(k)}$ ilə işarə etsək, onda baxılan Steklov məsələsinin $n+1$ məxsusi ədədləri üçün təqribi qiymətlər λ_k $k = \overline{0, n}$ məxsusi funksiyalar isə (16)-dan alınmış olurlar. Belə ki, $u_k(x_1, 0)$ ifadələri aldığımız $y^{(k)}$ məxsusi vektorlarının interpolyasiya çoxhədliləri vasitəsilə hər vektora görə qurulan bir funksiya ilə, $u_k(x_1, \gamma(x_1))$ isə zəruri şərtədən alınan (17) ilə ifadə olunur. Qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində yarımüstəvidə Koşi-Riman tənliyi üçün məsələyə Steklov məsələsinə [6] baxılmışdır. İnteqral tipli sərhəd şərtli məsələlər qeyri-lokal məsələlər sinfindədir. Qeyri-lokal sərhəd məsələləri və bu cür sərhəd şərtli optimal idarə məsələləri istinad olunan [7-8] mənbələrində tədqiq edilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Алиев Н.А., Аббасова А.Х. О граничной задаче для уравнения Коши-Римана/ Материалы Международной научной конференции, посвященной 90-летию БГУ, 2009, с.80-81.
2. Əliyev N.Ə., Zeynalov R.M. Koşi-Riman tənliyi üçün global hədd tutan sərhəd şərti daxilində Steklov məsələsinin həllinin araşdırılması / Beynəlxalq Astronomiya ilinə həsr olunmuş astronomiya, fizika və riyaziyyat üzrə beynəlxalq konfransın materialları, 2009, s. 27.
3. Aliev N., Jahanshahi M. Sufficient conditions for reduction of the BVP including a mixed PDE with non-local boundary conditions to Fredholm integral equations // INT, J.Math.Educ.SCI, Technol. 1997, v.28, № 3, p. 419-425.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, 508 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987, 688 с.
6. Jahanshahi M., Aliev N. Determining of an Analytic Function on Its Analytic Domain by Cauchy-Riemann Equation with special kind of Boundary Conditions/ Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 2004, v.28, p.33-39.
7. Широных Т.В., Мехтиев М.Ф., Шарифов Я.А. Об условиях оптимальности в задаче оптимального управления для гиперболических систем с нелокальными условиями

// Доклады НАН Азербайджана, 2005, №2, с.22-29.

8. Мамедов И.Г. Задача оптимального управления в процессах, описываемых нелокальной задачей с нагрузениями для гиперболического интегро-дифференциального уравнения. // Известия НАН Азербайджана, сер., физ., техн. и мат. наук, 2004, №2, с .74-79.

ЗАДАЧА СТЕКЛОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Н.А.АЛИЕВ, Р.М.ЗЕЙНАЛОВ

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена исследованию решения граничных задач для однородного уравнения эллиптического типа первого порядка с однородными граничными условиями, содержащими спектральный параметр и интеграл по границам от неизвестных функций. Исходя из необходимых условий поставленная задача сводится к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Собственные значения и собственные функции интегральных уравнений определяют собственные функции исходных задач, а собственные значения совпадают.

Ключевые слова: уравнение Коши-Римана, нелокальные граничные условия, задача Стеклова, необходимое условие, фундаментальное решение по направлению, фредгольмовость.

STEKLOV PROBLEM FOR A FIRST ORDER ELLIPTIC TYPE EQUATION

N.A.ALIYEV, R.M.ZEYNALOV

SUMMARY

In the paper, the Steklov problem is considered for a first order elliptic type homogeneous equation under the homogeneous condition containing global terms and a spectral parameter in the boundary condition. Using the necessary conditions, this problem is reduced to the parameter-dependent second order Fredholm homogeneous integral equation. The eigen functions of the stated problem are determined by means of the eigen numbers and eigen functions of the obtained integral equation. The eigen numbers are those of the obtained integral equation.

Key words: Cauchy-Riemann equation, non-local boundary condition, Steklov problem, necessary condition, fundamental solution in direction, Fredholm property.

Redaksiyaya daxil oldu: 06.04.2012-ci il

Çapa imzalandı: 08.05.2012-ci il.