BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2012*

RİYAZİYYAT

УДК 02.23.21

ОБ ОДНОМ ОСЦИЛЛЯЦИОННОМ СВОЙСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА–БЕССЕЛЯ

С.К.АБДУЛЛАЕВ, Б.К.АГАРЗАЕВ, Р.А.ДЖАФАРОВА
Бакинский Государственный Университет
sadigAbdullaev@mail.ru

В работе, для обобщенных потенциалов Рисса, с нестепенными ядрами, порожденных оператором обобщенного сдвига, ассоциированного с дифференциальным оператором Лапласа – Бесселя доказывается одно свойство выражаемое в терминах средней осцилляции функций. Здесь рассматривается случай, когда оператор обобщенного сдвига берется по произвольному набору переменных.

Ключевые слова: потенциал Рисса, обобщенный сдвиг, пространство Орлига, средняя осциляция

Пусть

$$R^{+}_{m+k,k}=\{(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+k})\in R_{m+k}: x_{m+1}>0,\dots,x_{m+k}>0\}, m\ge 0, k\ge 1,$$

$$T^S u(x)=c_v\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}u\left(x'-s',\ \sqrt{x_{m+1}^2-2x_{m+k}S_{m+k}\cos\alpha_1+S_{m+1}^2},\dots,\sqrt{x_{m+k}^2-2x_{m+k}S_{m+k}\cos\alpha_k+S_{m+k}^2}\right)\times$$

$$\times\sin^{v_{m+1}-1}\alpha_1\cdots\sin^{v_{m+k}-1}\alpha_k\,d\alpha_1\cdots d\alpha_k$$

оператор обобщенного сдвига, порожденный оператором Лапласа – Бесселя $([1])$, где

$x=(x',x_{m+1},\dots,x_{m+k}), s=(s',s_{m+1},\dots,s_{m+k}), x',s'\in R_m, v_{m+1}>0,\dots,v_{m+k}>0, |v|=v_{m+1},\dots,v_{m+k}$,

а C_v-постоянное. $\omega(t)$ положительная в $(0,+\infty)$ функция, $K(t)=\omega(t)t^{-(m+k+|v|)}$.

$$\left(I_B^{\omega} f\right)(x)=\int_{R^{+}_{m+k,k}} f(x)T^y K(|x|)d\mu(y), x\in R^{+}_{m+k,k}, d\mu(y)=y_{m+1}^{v_{m+1}}\dots y_{m+k}^{v_{m+k}}dy\ -$$

обобщенный потенциал Рисса и

$$\left(\tilde{I}^{\omega} f\right)(x)=\int_{R^{+}_{m+k,k}}\left(T^{y} K\left(|x|\right)-K|y| X_{B^{*}(0,1)}(y)\ \right) f(y)\, d\mu(y),$$

$$B(0,r)=\left\{y\in R^{+}_{m+k,k}:|y|<r\right\},\quad B^{*}(0,1)=R^{+}_{m+k,k}\setminus B(0,1),$$

$X_{E}(x)$- характеристическая функция множества $E\subset R^{+}_{m+k,k}$

Для $\alpha>0, p\geq 1,$ обозначим через $\Omega_{\mathrm{p},\alpha}$ ([6]) совокупность функций $\omega:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ таких, что $\omega(t)$ возрастает, $r^{-\frac{\alpha}{p}+\varepsilon}\omega(r)$ убывает для некоторого $\varepsilon>0$ и сходится интеграл

$$\int_{0}^{1}\omega(t)t^{-1}dt.$$

В работе ([3]) показано, что обобщенные потенциалы Рисса, с нестепенными ядрами, в отличие от классических потенциалов Рисса ([4]) не действуют, вообще говоря, в шкале L_{p} пространств.

Через $L^{\Phi}_{\nu}(R^{+}_{m+k,k})$ обозначим пространство Орлича ([5]) порожденное N- функцией Φ:

$$L^{\Phi}_{\nu}(R^{+}_{m+k,k})=\left\{f: изм. \int_{R^{+}_{m+k,k}}\Phi(\varepsilon|f(x)|)d\mu(y)<\infty,\ \text{для всех }\varepsilon>0\ \right\},$$

$$\left\|f:L^{\Phi}_{\nu}(R^{+}_{m+k,k})\right\|=\inf\left\{\lambda>0:\int_{R^{+}_{m}}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)d\mu(y)\leq 1\right\}.$$

При $\Phi(t)=\dfrac{|t|^{p}}{p},\ p\geq 1,$ пространство $L^{\Phi}_{\nu}(R^{+}_{m+k,k})$ обозначим через $L_{p,\nu}(R^{+}_{m+k,k})$ -это пространство функций интегрируемых в $R^{+}_{m+k,k}$ в p-ой степени с весом $x^{\nu_1}_{m+1}\dots x^{\nu_k}_{m+k}$.

В работе ([6]) доказана.

Теорема С. Пусть $1\leq p<\infty, \omega\in\Omega_{p,(m+k+2|\nu|)}$. Тогда существует N – функция Φ такая, что

$$c^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^{m+k+|\nu|}}\right)\leq\frac{1}{r^{\frac{m+k+|\nu|}{p}}}\int_{0}^{r}\frac{\omega(t)}{t}dt\leq c\Phi\left(\frac{1}{r^{m+k+|\nu|}}\right),\quad r>0,$$

где с не зависит от r, и

а) при $p>1$ существует $C>0$ такое, что для любой функции $f\in L_{1,\nu}(R^{+}_{m+k,k})$

$$\left\|I^{\omega}_{B}f\right\|_{L^{\Phi}_{\nu}\left(R^{m}_{m+k,k}\right)}\leq C\left\|f\right\|_{L^{p}_{\nu}},$$

б) существует $C>0$ такое, что для любой функции $f\in L^1_\nu$

$$\int\limits_{\left\{x:\left|I^{\omega}_{B}f(x)\right|>2\beta\right\}} d\mu(x)\le\left\{\Phi\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L^1_\nu}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}, \quad \beta>0\cdot$$

Пусть BMO_γ -пространство всех функций , локально интегрируемых в $R^+_{m+k,k}$ с весом $x_{m+1}^{\nu m+1}\ldots x_{m+k}^{\gamma\, m+k}$,

$$\|f(\cdot)\|_{BMO_\gamma}=\sup_{x,r}|B(0,r)|_\nu^{-1}\int\limits_{B(0,r)}\left|T^y f(x)-f_{B(x,r)}\right|d\mu(y)<\infty,$$

$$f_{B(x,r)}=|B(0,r)|_\nu^{-1}\int\limits_{B(0,r)}T^y f(x)d\mu(y),|E|_\nu=\int\limits_E d\mu(y),E\subset R^+_{m+k,k}.$$

Отметим, что $|B(0,r)|_\nu=cr^{m+k+|\nu|}$

Определение. Скажем, что положительная функция $g(t)$ почти убывает (почти возрастает) на множестве $X\subset(0;+\infty)$, если существует постоянное $c>0$ такое, что для любых $t_1,t_2\in X$ при $t_1<t_2$, $g(t_2)\le cg(t_1)$ $\left(g(t_1)\le cg(t_2)\right)$.

Положим

$$\omega_{p,\nu}(t)=\omega(t)t^{-\frac{m+k+|\nu|}{p}},\ t>0.$$

Теорема. Пусть ω и $p>1$ такие, что

$$\left|T^y\left(K(|x|)\right)-K|y|\right|\le c\frac{|x|}{|y|}K\left(|y|\right),\ \text{ при }\ |x|\le\frac{1}{2}|y|, \tag{1}$$

$\omega_{p,\nu}(t)t^{-\varepsilon}$ почти убывает а $\omega_{p,\nu}(t)t^{\varepsilon}$ почти возрастает для любого $\varepsilon>0$ и $\omega_{p,\nu}(t)\le const$.

Тогда

а) существует $c>0$ такое, что для любых $f\in L_{p,\nu}(R^k_{m+k})$

$$\left\|\tilde I^{\omega}(f)\right\|_{BMO_\nu}\le c\|f\|_{L_p}, \tag{2}$$

б) если $I^{\omega}(f)$ существует для почти всех $x\in R^+_{m+k,k}$, то (2) имеет место и для $I^{\omega}(f)$.

Доказательство. Пусть $f\in L_{p,\nu}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ и $t>0$ произвольное фиксированное число.

Положим

$$f_1(x)=f(x)\chi_{B(0,2t)}(x)$$

$$f_2(x)=f(x)-f_1(x),x\in R^+_{m+k,k}$$

Здесь $\chi_A(x)$ характеристическая функция множества A.

В этих обозначениях

$$\tilde I_B^{\omega} f(x)=\tilde I^{\omega}(f_1(x))+\tilde I^{\omega}(f_2(x))=F_1(x)+F_2(x),$$

где

$$F_1(x)=\int\limits_{B(0,2t)}\left(T^y K(|x|)-K|y|\chi(y)_{B^*(0,1)}\right)f(y)\,d\mu(y),$$

$$F_2(x)=\int\limits_{R\setminus B(0,2t)}\left(T^y\left(K(|x|)\right)-K|y|\chi(y)_{B^*(0,1)}\right)f(y)\,d\mu(y),$$

Положим

$$a_1\equiv a_1(t)=-\int\limits_{B(0,2t)/B(0,\min\{1,2t\})}K(|y|)f(y)d\mu(y),$$

Очевидно a_1 конечна.

Имея ввиду, что $B(0,2t)\cap B^*(0,1)=B(0,2t)/B(0,\min\{1,2t\})$, получаем

$$F_1(x)-a_1=\int\limits_{B(0,2t)}(T^yK(|x|)f(y)d\mu(y)-\int\limits_{B(0,2t)}K(|y|)\chi_{B^+_{(0,1)}}(y)f(y)d\mu(y)-a_1=$$

$$=\int\limits_{B(0,2t)}T^y(K(|x|))f(y)d\mu(y)-\int\limits_{B(0,2t)/B(0,\min\{1,2t\})}K(y)f(y)\,d\mu(y)-a_1=$$

$$\int\limits_{B(0,2t)}T^y(K(|x|))f(y)d\mu(y)=$$

$$=\int\limits_{R^+_{m+k,k}}T^y(K(|x|))f_1(y)d\mu(y)=\int\limits_{R^+_{m+k,k}}K(|y|)T^y f_1(x)d\mu(y)$$

Отсюда

$$|F_1(x)-a_1(t)|\le\int\limits_{R^+_{m+k,k}}K(|y|)|T^y f_1(x)|d\mu(y)=$$

$$=\int\limits_{\{y\in R^+_{m+k,k}:T^y(|x|)<2t\}}K(|y|)|T^y f(x)|d\mu(y),$$

Здесь учтено, что $f_1(x)=f(x)\chi_{B_{k,t}(0,2t)}(x)=0$ если $x\notin B(0,2t)$ и $|T^y0|=0$, и потому $T^y f_1(x)=T^y f(x)\chi_{B_{k,t}(0,2t)}(x)=0$ при $T^y(|x|)\ge 2t.$

Далее при $|x|<t$ и $T^y|x|<2t$ имеем:

$$|y|\le|x|+|x-y|\le|x|+T^y|x|\le t+2t=3t$$

Следовательно,

$$|F_1(x)-a_1(t)|\le\int\limits_{B(0,3t)}K(|y|)|T^y f(x)|d\mu(y),$$

если $x\in B(0,t)$.

Учитывая последнее, получаем

$$A(t,x)=A=|B(0,t)|^{-1}\int\limits_{B(0,t)}|T^z(F_1(x)-a_1)|d\mu(z)\le|B(0,t)|^{-1}\int\limits_{B(0,t)}T^z(|F_1(x)-a_1(t)|)d\mu(z)\le$$

$$\le|B(0,t)|^{-1}\int\limits_{B(0,t)}T^z\left(\int\limits_{B(0,3t)}K(|y|)|T^y(f(x))|d\mu(y)\right)d\mu(z)=|B(0,t)|^{-1}\int\limits_{B(0,t)}\left(\int\limits_{B(0,3t)}K(|y|)T^z_xT^y_x(|f(x)|)d\mu(y)\right)d\mu(z)$$

Итак, мы получили, что

$$A \le \left|B(0,t)\right|_\gamma^{-1} \int_{B(0,t)} I_x(z)\,d\mu(z), \tag{3}$$

где

$$I_x(z) = \int_{B(0,3t)} K(|y|)T^y\left(T^z(|f(x)|)d\mu(y)\right).$$

Обозначим

$$g_z(x) = T^z(|f(x)|).$$

Оценим $I_x(z)$.

Прежде всего отметим, что если ω удовлетворяет условиям теоремы, то

1) $\omega(t)$ почти возрастает,
2) $\omega(2t) \le c\omega(t)$,
3) $\int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\tau}d\tau \le c\omega(t)$,
4) $\frac{\omega(t)}{t^{m+k+|\nu|}}$ почти убывает,
5) $\omega \notin \Omega_{p,(m+k+|\nu|)}$

Введем B-максимальную функцию

$$M_B f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left|B(0,r)\right|^{-1} \int_{B(0,t)} T^y(|f(x)|)d\mu(y).$$

Доказана, что оператор $M_B : f \to M_B f$ имеет сильный тип (p,p).

Учитывая все это получаем

$$I_x(z) = \int_{B(0,3t)} \frac{\omega(|y|)}{|y|^{m+k+|\nu|}} T^y(g_z(x))d\mu(x) = \sum_{i=-\infty}^{1} \int_{2^j 3t \le |y| \le 2^{j+1}3t} \frac{\omega(|y|)}{|y|^{m+k+|\nu|}} T^y(g_z(x))d\mu(x) \le$$

$$\le \sum_{i=-\infty}^{1} \frac{\omega(2^i 3t)}{(2^i 3t)^\alpha} \int_{2^j 3t \le |y| \le 2^{j+1}3t} T^y(g_z(x))d\mu(x) \le \sum_{i=-\infty}^{1} \omega(2^j 3t)\frac{1}{(2^i 3t)^\alpha} \int_{2^j 3t \le |y| \le 2^{j+1}3t} T^y(g_z(x))d\mu(x) \le$$

$$\le CM_B(g_z(x))\sum_{i=-\infty}^{1}\omega(2^j 3t) \le C\omega(t)M_B(g_z(x)),$$

$$\sum_{i=-\infty}^{1}\omega(2^j 3t) \le C\frac{\omega(2^i 3t)}{(2^{j+1}3t)^\alpha}(2^{j+1}3t)^\alpha \le C\sum_{i=-\infty}^{1}\frac{\omega(2^{j+1}3t)}{(2^{j+1}3t)}\left((2^{j+1}3t)-(2^j 3t)\right) \le C\sum_{i=-\infty}^{1}\int_{2^j 3t}^{2^{j+1}3t}\frac{\omega(\tau)}{\tau}d\tau =$$

$$= C\int_0^{3t}\frac{\omega(\tau)}{\tau}d\tau \le C\omega(t).$$

Таким образом, мы получили, что

$$I_x(z) \le C\omega(t)M_B(g_z(x)).$$

Подставляя полученное в (3), получаем

$$A(t,x) \le Ct^{-(m+k+\|\nu\|)}\omega(t)\int_{B(o,t)} M_B\left(T^z(|f(x)|)\right)d\mu(z).$$

Применив неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_{B(0,1)} M_B\left(T^z\left(\left|f(x)\right|\right)\right)d\mu(z) \le \left(\int\limits_{B(0,1)} d\mu(z)\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{B(0,1)} M_B^p\left(T^z\left(\left|f(x)\right|\right)\right)d\mu(z)\right)^{\frac{1}{p}} \le Ct^{\frac{m+k+|\gamma|}{p'}} \times$$

$$\times \left\|T^{(2)}\left|f(x)\right|\right\|_{L_{p,\nu}} \le Ct^{\frac{m+k+|\gamma|}{p'}} \|f\|_{L_{p,\nu}}$$

Тогда, C учетом этого, из последнего получаем

$$A(t,x) \le ct^{\frac{-(m+k+|\gamma|)}{p}} \int\limits_{B(0,t)} M_B\left(T^2\left(\left|f(x)\right|\right)\right)d\mu(z) \le C\|f\|_{L_{p,\nu}}. \qquad (4)$$

Таким образом, мы получили, что

$$A(t,x) \le C\|f\|_{L_{p,\nu}} \text{ при } t > 0, |x| < t.$$

Обозначим

$$a_2(t) = a_2 = \int\limits_{B(0,\max\{1,2t\})/B(0,2t)} K(|y|)f(y)d\mu(y).$$

Оценим сверху

$$\left|F_2(x) - a_2(t)\right| = \left|\int\limits_{R^+_{m+k,k}/B(0,2t)} \left(T^y(K(x)) - K(|y|)\chi_{B^*(0,1)}(y)\right)f(y)d\mu(y) - a_2(t)\right|.$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{R^+_{m=k,k}/B(0,2t)} K(|y|)\chi_{B^*(0,1)}(y)f(y)d\mu(y) + \int\limits_{B(0,\max\{1,2t\})/B(0,2t)} K(|y|)\, f(y)d\mu(y)$$

Пусть $1 < 2t$, тогда

$$\left(R^+_{m+k,k}/B(0,2t)\right) \cap B^*(0,1) = R^+_{m+k,k}/B(0,2t) \text{ и } a_2 = 0.$$

А также если $2t \le 1,$ то

$$\left(R^+_{m+k,k}/B(0,2t)\right) \cap B^*(0,1) = R^+_{m+k,k}/B(0,1) \quad \text{и} \quad a_2 = \int\limits_{B(0,1)/B(0,2t)} K(|y|)f(y)d\mu(y).$$

Учитывая все это, получаем

$$\left|F_2(x) - a\right| = \left|\int\limits_{R^+_{m+k,k}/B(0,2t)} \left(T^y\left(K(|x|) - K(|y|)\right)\right)f(y)d\mu(y)\right|$$

Имея ввиду, что $|x| < t$ и $|y| \ge 2t$, с учетом неравенства (1) из последнего имеем

$$\left|F_2(x) - a_2\right| \le \int\limits_{R^+_{m+k,k}/B(0,2t)} \left|T^y\left(K(|x|)\right) - K(|y|)\right|\left|f(y)\right|d\mu(y) \le$$

$$\le C|x| \int\limits_{R^+_{m+k,k}/B(0,2t)} \frac{B(|y|)}{|y|} f(y)d\mu(y).$$

Применив неравенство Гельдера получаем:

$$\left|F_2(x) - a_2\right| \le C|x| \cdot \|f\|_{L_{p,\nu}} \left(\int\limits_{R^+_{m+k,k}/B(0,2t)} \left(\frac{K(|y|)}{|y|}\right)^{p'} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Переходя к сферическим координатам получаем:

$$\int\limits_{R^{+}_{m+k,k}/B(0,2t)} \left(\frac{K(|y|)}{|y|} \right)^{p'} d\mu = \int\limits_{S^{+}} \left(\int\limits_{2t}^{\infty} \left(\frac{K(\tau)}{\tau} \right)^{p'} \tau^{m+k+|\nu|-1} d\tau \right) \xi^{\nu} d\sigma(\xi) = C \int\limits_{2t}^{\infty} \left(\frac{\omega(\tau)}{\tau^{\frac{m+k+|\nu|}{p}+\varepsilon}} \right)^{p^{1}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\tau^{\frac{m+k+|\nu|}{p^{1}}+1-\varepsilon}} \right)^{p^{1}} \tau^{m+k+|\gamma|-1} d\tau \le C \left(\frac{\omega(2t)}{(2t)^{\frac{m+k+|\nu|}{p}+\varepsilon}} \right)^{p'} \int\limits_{2t}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{(1-\varepsilon)p^{1}+1}} \le C \left(\frac{\omega(t)}{t^{\frac{m+k+|\gamma|}{p}+\varepsilon}} \right)^{p^{1}} \frac{1}{t^{(1-\varepsilon)p^{1}}}.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$|F_2(x) - a_2| \le C|x| \cdot \|f\|_{L_{p,\nu}} \frac{\omega(t)}{t^{\frac{m+k+|\nu|}{p}}} \cdot \frac{1}{t^{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} \le C \frac{|x|}{t} \|f\|_{L_{p,\nu}}.$$

Отметим, что при $|x| \le t$ и $|z| \le 2t$, $T^{z}|x| \le |x| + |z| \le 3t$. Тогда

$$\left| T^{z}\left(F_2(x) - a_2\right) \right| \le T^{z} |F_2(x) - a_2| \le C T^{z} \left(|x| t^{-1} \|f\|_{L_{p,\nu}} \right) \le C \|f\|_{p,\alpha}.$$

Таким образом,

$$\left| T^{z}\left(F_2(x) - a_2\right) \right| \le C \|f\|_{p,\nu}. \tag{5}$$

Обозначаем $a = a_1 + a_2$. Тогда из (4) и (5) получим

$$\sup_{x,t} \frac{1}{|B(0,t)|_{\nu}} \int\limits_{B(0,t)} \left| T^{y} \tilde{I}_{B}^{\omega} f(x) - a \right| d\mu(y) \le C \|f\|_{p,\nu}.$$

Откуда

$$\left\| \tilde{I}_{B}^{\omega} f \right\|_{BMO_{\nu}} \le C \|f\|_{p,\nu}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. // Успехи матем. наук, 1951, 6, №2, с.102-143.
2. Алиев И.А., Гаджиев А.Д. О классах операторов типа потенциала, порожденных обобщенным сдвигом. // Док. Расш. Засед. Сем. Инт-та приклад. матем. им. И.Н.Векуа, 1988, т.3, №2.
3. E.Nakai and H.Sumitomo, Scien. Math. Japan. 2001, v. 54, p.463-472.
4. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973, 342 с.
5. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. Физматгиз. М.: 1958, 271 с.
6. Абдуллаев С.К., Керимов М.К. Вестник Бакинского университета Серия физ.-мат. наук. 2008, № 1, с. 5-11.

ÜMUMİLƏŞMİŞ RİSS-BESSEL POTENSİALLARININ BİR OSSİLYASİYA XASSƏSİ

S.K.ABDULLAYEV, B.K.AĞARZAYEV, R.Ə.CƏFƏROVA

XÜLASƏ

İşdə Laplas-Bessel diferensial operatoruna uyğun ümumiləşmiş sürüşmənin doğurduğu ümumiləşmiş Riss potensialları üçün funksiyanın orta osilyasiyası terminində bir xassə isbat olunmuşdur. Burada ümumiləşmiş sürüşmə operatoru dəyişənlərin ixtiyari yığımına görə götürülür.

Açar sözlər: Riss potensialı, ümumiləşmiş sürüşmə, Orliç fəzası, orta ossilyasiya

OSCILLATION PROPERTIES OF GENERALIZED RISS-BESSEL POTENTIALS

S.K.ABDULLAYEV, B.K.AGARZAYEV, R.A.JAFAROVA

SUMMARY

In this work, for the generalized Riss potentials generated by the generalized shift operator associated with Laplas-Bessel differential operator, a property expressed in terms of the mean oscillation functions is proved. Here, we consider the case where the generalized shift operator is taken over an arbitrary set of variables.

Keywords: Riss potential, the generalized shift, Orlicz space, the average oscillation.

Поступила в редакцию: 06.04.2012 г.
Подписано к печати: 08.05.2012 г.