УДК.517.927

БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

З.С.АЛИЕВ, Р.Г.ПОЛАДОВ

Бакинский Государственный Университет

z_aliyev@mail.ru , r_poladov@mail.ru

Рассматривается спектральная задача для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка со спектральным параметром в уравнении и в граничных условиях. Дается операторная трактовка этой задачи и устанавливается необходимое и достаточное условие базисности в $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, *системы собственных функций.*

Ключевые слова: дифференциальный оператор, собственное значение, собственная функция, базисные свойства.

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля

$$(\ell y)(x) \equiv -y''(x) \pm q(x)\,y'(x) = \lambda y(x), \qquad x \in (0,1), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$(a_0\lambda + b_0)y(0) = (c_0\lambda + d_0)\,y'(0), \tag{2}$$

$$(a_1\lambda + b_1)y(1) = (c_1\lambda + d_1)\,y'(1), \tag{3}$$

где $\lambda -$ спектральный параметр, $q -$ действительная непрерывная функция на $[0,1]$, $a_i, b_i, c_i, d_i, i=\overline{0,1} -$ действительные постоянные, причем

$$(-1)^j \sigma_j = a_j d_j - b_j c_j < 0,\ j=\overline{0,1}. \tag{4}$$

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничных условиях в различных постановках изучались во многих работах (см., напр., [1-15]). В [2, 4-7, 11, 12] приведен список работ, в которых такие задачи рассматривались в связи с конкретными физическими задачами.

Базисные свойства систем корневых функций в пространстве $L_2(0,l)$ и $L_p(0,1), 1<p<\infty$, задачи (1)-(3) в случае $a_0 = c_0 = 0$ (т.е. в случае, когда спектральный параметр участвует только в одном из граничных условий) исследованы в работах [5-8]; в [5, 8] и [6] установлена базисность Рисса в $L_2(0,1)$ и базисность в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, соответственно, систем собственных функций с одной произвольной удаленной функцией, а в [7] найдено необходимое и достаточное условие базисности в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, системы корневых функций с одной удаленной функцией.

Базисные свойства систем корневых функций в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, задачи (1)-(3) в случае, когда спектральный параметр участвует в обоих граничных условиях исследованы в работах [10, 11, 14]. В [10] установлена базисность в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ системы собственных функций задачи (1)-(3) с двумя произвольными удаленными функциями, имеющие номера разной четности. В случае $q \equiv 0$, $b_j = c_j = 0$, $(-1)^{j+1} a_j > 0$, $d_j = 1$, $j = \overline{0, 1}$, в [11] доказано, что, если $a_0 \neq -a_1$, то система собственных функций задачи (1)-(3) с двумя удаленными функциями образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$; если $a_0 = -a_1$, то система собственных функций с двумя произвольными удаленными произвольными функциями, имеющие номера разной четности, образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, а если $a_0 = -a_1$, то система собственных функций с двумя произвольными удаленными функциями, имеющие номера одинаковой четности, неполна и неминимальна в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$. В случае $q \equiv 0$, $b_j = c_j = 0$, $d_j = 1$, $a_j < 0$, $j = \overline{0,1}$, в [14] найдены необходимые и достаточные условия базисности в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, систем корневых функций задачи(1)-(3) (в этом случае $\sigma_0 < 0$, $\sigma_1 < 0$).

Настоящая работа посвящена установлению необходимого и достаточного условия базисности в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, системы собственных функций краевой задачи (1)-(3).

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственное решение $y(x,\lambda)$, $0 \le x \le 1$, уравнения (1) такое,что

$$y(0,\lambda) = c_0\lambda + d_0,\; y'(0,\lambda) = a_0\lambda + b_0. \tag{5}$$

Для каждого фиксированного $x \in [0,1]$ функция $y(x,\lambda)$ является целой функцией λ [9].

Отметим, что собственными значениями (с учетом кратности) задачи (1)-(3) являются корни уравнения

$$(a_1\lambda + b_1)y(1,\lambda) - (c_1\lambda + d_1)y'(1,\lambda) = 0.$$

В работах [2, 3, 9] доказано, что собственные значения задачи (1)-(3) являются вещественными, простыми и образуют бесконечно возрастающую последовательность

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots . \qquad (6)$$

Пусть $H = L_2(0,1) \oplus \mathrm{C}^2$ - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\left(\hat{y},\hat{u}\right) = \left(\{y(x),m,n\},\{u(x),s,t\}\right) = (y,u)_{L_2} - \sigma_0^{-1} m\bar{s} + \sigma_1^{-1} n\bar{t}, \qquad (7)$$

где $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ -скалярное произведение в $L_2(0,1)$.

Определим оператор

$$L\hat{y} = L\{y(x),m,n\} = \{\left(\ell\left(y\right)(x)\right), b_0 y(0) - d_0 y'(0), b_1 y(1) - d_1 y'(1)\},$$

область определения которого имеет вид

$$D(L) = \{\{y(x),m,n\} \in H : y(x) \in W_1^2(0,1), \left(\ell(y)\right)(x) \in L_2(0,1),$$
$$m = c_0 y'(0) - a_0 y(0),\ n = c_1 y'(1) - a_1 y(1)\}.$$

Очевидно, что оператор L определен в H корректно. Задача (1)-(3) принимает вид

$$L\hat{y} = \lambda\hat{y},\ \ \hat{y} \in D(L), \qquad (8)$$

т.е. собственные значения λ_k задачи (1)-(3) и оператора L совпадают, а между собственными функциями имеется соответствие [3]

$$y_k(x) \leftrightarrow \hat{y}_k\left\{y_k(x),\ m_k, n_k\right\},\ m_k = c_0 y_k'(0) - a_0 y_k(0),\ n_k = c_1 y_k'(1) - a_1 y_k(1).$$

Умножая скалярно (8) на $\hat{y}$ в H, используя формулу интегрирования по частям и учитывая (7), (2)-(3), получим:

$$\left(L\hat{y},\hat{y}\right) = \int_0^1 \left(\left|y'(x)\right|^2 + q(x)\left|y(x)\right|^2\right)dx - \overline{y(1)}y'(1) + \overline{y(0)}y'(0) -$$
$$-\sigma_0^{-1}(b_0 y(0) - d_0 y'(0))(c_0\overline{y'(0)} - a_0\overline{y(0)}) + \sigma_1^{-1}(b_1 y(1) - d_1 y'(1)) \times$$
$$\times (c_1\overline{y'(1)} - a_1\overline{y(1)}) = \int_0^1 \left(\left|y'(x)\right|^2 + q(x)\left|y(x)\right|^2\right)dx + \sigma_0^{-1}(a_0 b_0 \,|\, y(0)\,|^2 +$$
$$+ c_0 d_0 \,|\, y'(0)\,|^2) - \sigma_1^{-1}(a_1 b_1 \,|\, y(1)\,|^2 + c_1 d_1 \,|\, y'(1)\,|^2) - 2b_0 c_0 \sigma_0^{-1}\,\mathrm{Re}\,\overline{y(0)}y'(0) +$$
$$+ 2b_1 c_1 \sigma_1^{-1}\,\mathrm{Re}\,\overline{y(1)}y'(1),$$

из которого следует, что $\left(L\hat{y},\hat{y}\right)$ вещественно. Поэтому оператор L симметричен в H. Уравнение

$$\left(L - \lambda I\right)\hat{y} = \hat{f},\ \hat{f} = \left\{f, m_f, n_f\right\} \in H,$$

где I - тождественный оператор в H, можно переписать в виде

$$\ell\left(y\right)\left(x\right) - \lambda\, r(x) y\left(x\right) = f(x),\ 0 < x < l,$$
$$\left(a_0\lambda + b_0\right) y\left(0\right) - (c_0\lambda + d_0) y'\left(0\right) = +m_f,$$
$$\left(a_1\lambda + b_1\right) y\left(1\right) - (c_1\lambda + d_1) y'\left(1\right) = +n_f.$$

Эта задача, очевидно разрешима для всех λ, не являющимися собственными значениями однородной задачи, то есть задачи (1)-(3). Но задача (1)-(3) имеет дискретный спектр. Следовательно, оператор L симметричен в H и имеет дискретный спектр и поэтому является самосопряженным в H. В силу (6) оператор L полуограничен снизу в H. Из этих рассуждений следует, что система собственных векторов $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\hat{y}_k = \{y_k(x), m_k, n_k\}$, оператора L образует ортогональный базис в H. При этом $y_k(x)$, $n = 1,2,...$ – собственные функции задачи (1)-(3), $m_k = c_0 y_k'(0) - a_0 y_k(0)$ и $n_k = c_1 y_k'(1) - a_1 y_k(1)$.

В силу (7) имеем

$$\left(\hat{y}_k, \hat{y}_k\right)_H = \|y_k\|_{L_2}^2 - \sigma_0^{-1} m_k^2 + \sigma_1^{-1} n_k^2 \ . \tag{9}$$

Обозначим

$$\delta_k = \|y_k\|_{L_2}^2 - \sigma_0^{-1} m_k^2 + \sigma_1^{-1} n_k^2, n = 1,2,... \tag{10}$$

Тогда на основании соотношений (4), из (10) получим

$$\delta_n > 0,\ n = 1,2,... \ . \tag{11}$$

В силу (9) система $\{\hat{\vartheta}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\hat{\vartheta}_k = \{\vartheta_k(x),\ s_k, t_k\}$, сопряженная к системе $\{\hat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$, определяется равенством

$$\hat{\vartheta}_k = \delta_k^{-1}\ \hat{y}_k\ ,\ k \in \mathrm{N}. \tag{12}$$

Пусть r и l – произвольные фиксированные натуральные числа. В силу теоремы 2 из [13], если

$$\Delta_{r,l} = \begin{vmatrix} s_r & t_r \\ s_l & t_l \end{vmatrix} \neq 0, \tag{13}$$

то система $\{y_k\}_{n=1,k\neq r,l}^{\infty}$ собственных функций задачи (1)-(3) образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$, а если $\Delta_{r,l} = 0$, то эта система неполна и неминимальна в пространстве $L_2(0,l)$, при этом система $\{u_k\}_{k=1,k\neq r,l}^{\infty}$, сопряженная к системе $\{y_k\}_{k=1,k\neq r,l}^{\infty}$, определяется формулой

$$u_k(x) = \begin{vmatrix} y_k & y_r & y_l \\ s_k & s_r & s_l \\ t_k & t_r & t_l \end{vmatrix}.$$

Далее, базисность системы $\{y_k\}_{n=1,k\neq r,l}^{\infty}$ в пространстве $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, проводится по схеме доказательства теоремы 5.1 из [10].

В силу (12) и (13) имеем

$$\Delta_{r,l} = \begin{vmatrix} s_r & t_r \\ s_l & t_l \end{vmatrix} = \delta_r^{-1}\,\delta_l^{-1} \begin{vmatrix} m_r & n_r \\ m_l & n_l \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Учитывая (5), из (14) получим:

$$\Delta_{r,l} = \delta_r^{-1}\,\delta_l^{-1} \begin{vmatrix} m_r & n_r \\ m_l & n_l \end{vmatrix} = \delta_r^{-1}\,\delta_l^{-1} \begin{vmatrix} c_0 y_r'(0) - a_0 y_r(0) & c_1 y_r'(1) - a_1 y_r(1) \\ c_0 y_l'(0) - a_0 y_l(0) & c_1 y_l'(1) - a_1 y_l(1) \end{vmatrix} =$$

$$= \delta_r^{-1}\,\delta_l^{-1} \begin{vmatrix} c_0(a_0\lambda_r + b_0) - a_0(c_0\lambda_r + d_0) & c_1 y_r'(1) - a_1 y_r(1) \\ c_0(a_0\lambda_l + b_0) - a_0(c_0\lambda_l + d_0) & c_1 y_l'(1) - a_1 y_l(1) \end{vmatrix} =$$

$$= -\sigma_0 \delta_r^{-1}\,\delta_l^{-1} \begin{vmatrix} 1 & c_1 y_r'(1) - a_1 y_r(1) \\ 1 & c_1 y_l'(1) - a_1 y_l(1) \end{vmatrix}, \tag{15}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Пусть* r *и* l *– произвольные фиксированные натуральные числа. Если*

$$\Delta_{r,l}^{*} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 y_r'(1) - a_1 y_r(1) \\ 1 & c_1 y_l'(1) - a_1 y_l(1) \end{vmatrix} \neq 0$$

то система собственных функций $\{y_k\}_{k=1,k\neq r,l}^{\infty}$ *задачи (1)-(3) образует базис в пространстве* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, *при* $p = 2$ *– базис Рисса, а если* $\Delta_{r,l}^{*} = 0$, *то эта система неполна и неминимальна в пространстве* $L_p(0,1)$.

Следствие. *Пусть* $c_1 = 0$ $(a_1 = 0)$. *Если* $y_r(1) \neq y_l(1)$ $(y_r'(1) \neq y_l'(1))$, *то система собственных функций* $\{y_k\}_{k=1,k\neq r,l}^{\infty}$ *задачи (1)-(3) образует базис в пространстве* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, *при* $p = 2$ *– базис Рисса, а если* $y_r(1) = y_l(1)$ $(y_r'(1) = y_l'(1))$, *то эта система неполна и неминимальна в пространстве* $L_p(0,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Math. Zeitschrift , 1973, v.133, p. 301-312.
2. Fulton C.T. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh., Sect. A, 1977, v.77, p. 293-308.

3. Руссаковский Е.М. Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия // Функ. анализ и его приложения, 1975, т.9, № 4, с. 91-92.
4. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях. Тр. сем. им. И.Г. Петровского. М.: МГУ, 1983, т. 9, с.190-229.
5. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Диф. уравнения, 1997, т.33, № 1, с. 115-119.
6. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Диф. уравнения. 2000, т. 36, № 10, с. 1357-1360.
7. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Докл. РАН, 2002, т. 385, № 1, с. 20-24.
8. Керимов Н.Б., Мирзоев В.С. О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Сиб. мат. журн. 2003, т. 44, № 5, с. 1041-1045.
9. Kerimov N.B., Poladov R.G. On basicity in $L_p(0,1),\ 1< p <\infty,$ of the system of eigenfunctions of one boundary value problem I // Proc. IMM NAS Azerb., 2005, v.22, p. 53-64.
10. Kerimov N.B., Poladov R.G. On basicity in $L_p(0,1),\ 1< p <\infty,$ of the system of eigenfunctions of one boundary value problem II // Proc. IMM NAS Azerb., 2005, v.23, p. 65-76.
11. Капустин Н.Ю. О спектральной задаче из математической модели процесса крутильных колебаний стержня со шкивами на концах // Диф. уравнения, 2005, т. 41, № 10. с. 1413-131.
12. Керимов Н.Б., Алиев З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Диф. уравнения, 2007, т.43, №7, с.886-895.
13. Aliyev Z.S. On the defect basicity of the system of root functions of the differential operators with spectral parameter in the boundary conditions // Proc. IMM NAS Azerb., 2008, v.28, p. 3-14.
14. Алиев З.С. Базисные свойства корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничных условиях // Докл. РАН, 2010, т.433, №5, с. 583-586.
15. Алиев З.С. Базисные свойства в пространстве L_p систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Диф. уравнения, 2011, т.46, № 6, с. 764-775.

SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN ŞTURM-LİUVİLL MƏSƏLƏSİNİN MƏXSUSİ FUNKSİYALARININ BAZİSLİK XASSƏLƏRİ

Z.S.ƏLİYEV, R.Q.POLADOV

XÜLASƏ

İşdə həm tənliyə, həm də sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan ikinci tərtib adi diferensial operator üçün spektral məsələyə baxılır. Bu məsələnin operator interpretasiyası

verilir və məxsusi funksiyalar sisteminin $L_p(0,l)$, $1 < p < \infty$, fəzasında bazisliyi üçün zəruri və kafi şərt tapılır.

Açar sözlər: diferensial operator, məxsusi ədəd, məxsusi funksiya, bazislik xassələri.

THE BASIS PROPERTY OF THE SYSTEM OF EIGENFUNCTIONS OF THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITIONS

Z.S.ALIYEV, R.G.POLADOV

SUMMARY

The article studies the spectral problem for the differential operator of the second order with the spectral parameter in equation and in both boundary conditions. The operator interpretation of this problem is presented and a necessary and sufficient condition for the basis property of the system of eigenfunctions in the space $L_p(0,l)$, $1 < p < \infty$ is obtained.

Key words: differential operator, eigenvalue, eigenfunction, basis property.

Поступила в редакцию: 30.06.2011 г.
Принята к печати: 05.03.2012 г.