BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2012***

UOT 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ С ПОТЕНЦИАЛОМ ДИРАКА

А.Г.ГЕЙДАРОВ, М.Н.МАМЕДОВ
Бакинский Государственный Университет
arif_heydarov@mail.ru

В работе доказана самосопряжённость оператора $A=-\frac{d^2}{dx^2}+$ $+\alpha_1\delta(x-x_1)+\alpha_2\delta(x-x_2)$ *в пространстве* $L_2(0,+\infty)$. *Показано, что предельный спектр оператора* A *совпадает с абсолютно непрерывной частью его спектра. Доказана интегральность резольвенты оператора* A *и получено явное выражение для интегрального ядра. Получено уравнение для определения отрицательных собственных значений оператора* A.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, потенциал Дирака, самосопряжённость, предельный спектр, собственные значения.

В работе исследуется спектр оператора Штурма-Лиувилля

$$-\frac{d^2}{dx^2}+\alpha_1\delta(x-x_1)+\alpha_2\delta(x-x_2) \tag{1}$$

в пространстве $L_2(0,+\infty)$, где $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ - произвольно фиксированные точки, причём $x_1<x_2$; $\delta(x-x_k)$ - функция Дирака в точке x_k $(k=1,2)$; $\alpha_1,\alpha_2\in(-\infty,+\infty)$.

Изучение спектра оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом Дирака имеет важное значение для задач квантовой механики [1].

В недавних работах [2-4] изучены некоторые спектральные свойства одномерного оператора Шредингера на полуоси с точечными δ и δ' - взаимодействиями.

Обозначим через $D(A)$ множество функций

$$f\in W_2^2((0,+\infty)\setminus\{x_1,x_2\})\cap W_2^1(0,+\infty),$$

удовлетворяющих граничным условиям:

$$f(0)=0,\quad f'(x_k+0)-f'(x_k-0)=\alpha_k f(x_k)\ (k=1,2). \tag{2}$$

Определим в пространстве $L_2(0,+\infty)$ оператор A:

$$Af = -\frac{d^2 f}{dx^2} + \alpha_1 \delta(x - x_1) \cdot f + \alpha_2 \delta(x - x_2) \cdot f, \quad f \in D(A), \tag{3}$$

где $\frac{d^2 f}{dx^2}$ - обобщённая производная второго порядка функции f, а произведение $\delta(x - x_k) \cdot f$ определяется равенством

$$\delta(x - x_k) \cdot f = f(x_k)\delta(x - x_k) \quad (k = 1,2). \tag{4}$$

Теорема 1. *Оператор A является самосопряжённым в пространстве $L_2(0,+\infty)$. Резольвента $R_z(A)$ оператора A является интегральным оператором в $L_2(0,+\infty)$ и интегральное ядро $K(x, y; z)$ при $z = -\lambda^2$ $(\lambda > 0)$ имеет представление:*

$$K(x, y; -\lambda^2) = G(x, y; -\lambda^2) + \frac{1}{\Delta}\sum_{i,j=1}^{2} \alpha_1 \Big\{ \alpha_i sh\lambda x_1 e^{-x_2\lambda} G(x_j, y; -\lambda^2) -$$

$$- \left[1 + \frac{\alpha_j}{2\lambda}(1 - e^{-2x_j\lambda}) \right] G(x_i, y; -\lambda^2) \Big\} G(x, x_i; -\lambda^2), \tag{5}$$

где

$$\Delta = \left(1 + \frac{\alpha_1}{\lambda} sh\lambda x_1 \cdot e^{-\lambda x_1} \right)\left(1 + \frac{\alpha_2}{\lambda} sh\lambda x_2 \cdot e^{-\lambda x_2} \right) - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\lambda^2} sh^2 \lambda x_1 \cdot e^{-2\lambda x_2}, \tag{6}$$

$$G(x, y; -\lambda^2) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} sh\lambda x \cdot e^{-\lambda y}, \ 0 < x < y, \\ \frac{1}{\lambda} sh\lambda y \cdot e^{-\lambda x}, \ y < x. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. Нетрудно показать, что оператор A, определённый равенством (3), является замкнутым симметрическим оператором в пространстве $L_2(0,+\infty)$.

Найдём резольвенту оператора A. Решаем в пространстве $L_2(0,+\infty)$ уравнение

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + \alpha_1 \delta(x - x_1) f + \alpha_2 \delta(x - x_2) f + \lambda^2 f = g \quad (g \in L_2(0,+\infty), \lambda > 0).$$

В силу формулы (4) это уравнение можно записать в следующем виде

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f = -\alpha_1 f(x_1)\delta(x - x_1) f - \alpha_2 f(x_2)\delta(x - x_2) + g \ . \tag{8}$$

Пусть $G(x, y; -\lambda^2)$ - фундаментальное решение оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2$ в $(0,+\infty)$. Известно, что $G(x, y; -\lambda^2)$ имеет вид (7). Применяя оператор

$\left(-\dfrac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)^{-1}$ к обеим частям уравнения (8), получаем

$$f(x)=-\alpha_1 f(x_1)G(x,x_1;-\lambda^2)-\alpha_2 f(x_2)G(x,x_2;-\lambda^2)+$$
$$+\int_0^{+\infty} G(x,y;-\lambda^2)g(y)dy\,. \qquad (9)$$

Положим $x=x_1$ и $x=x_2$ в (9). Тогда для определения величин $f(x_1)$ и $f(x_2)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\left(1+\dfrac{\alpha_1}{\lambda}sh\lambda x_1\cdot e^{-\lambda x_1}\right)f(x_1)+\dfrac{\alpha_2}{\lambda}sh\lambda x_1\cdot e^{-\lambda x_2}f(x_2)=\displaystyle\int_0^{+\infty}G(x_1,y;-\lambda^2)g(y)dy,\\ \dfrac{\alpha_1}{\lambda}sh\lambda x_1\cdot e^{-\lambda x_2}f(x_1)+\left(1+\dfrac{\alpha_2}{\lambda}sh\lambda x_2\cdot e^{-\lambda x_2}\right)f(x_2)=\displaystyle\int_0^{+\infty}G(x_2,y;-\lambda^2)g(y)dy.\end{cases} \qquad (10)$$

Обозначим через $\Delta=\Delta(\lambda)$ определитель этой системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+\dfrac{\alpha_1}{\lambda}sh\lambda x_1\cdot e^{-\lambda x_1} & \dfrac{\alpha_2}{\lambda}sh\lambda x_1\cdot e^{-\lambda x_2}\\ \dfrac{\alpha_1}{\lambda}sh\lambda x_1\cdot e^{-\lambda x_2} & 1+\dfrac{\alpha_2}{\lambda}sh\lambda x_2\cdot e^{-\lambda x_2}\end{vmatrix}. \qquad (11)$$

Уравнение $\Delta(\lambda)=0$ имеет не более двух положительных решений (см. доказательство теоремы 2). Пусть $\lambda_0\in(0,+\infty)$, $\Delta(\lambda_0)\neq 0$. Решаем систему уравнений (10) и находим $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Далее, подставляем в (9) найденные выражения для $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Тогда получаем

$$f(x)=\int_0^{+\infty}K(x,y;-\lambda^2)g(y)dy\,, \qquad (12)$$

где ядро $K(x,y;-\lambda_0^2)$ имеет вид (5) (при $\lambda=\lambda_0$).

Очевидно, что

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}\int_0^{+\infty}\left|K(x,y;-\lambda_0^2)\right|dy=M<+\infty\,.$$

Отсюда и из (12) получаем

$$\|f\|_{L_2}\le M\cdot\|g\|_{L_2}\,,$$

где $\|\cdot\|_{L_2}$ - норма в пространстве $L_2(0,+\infty)$.

Следовательно,

$$R_{-\lambda_0^2}(A)f=(A+\lambda_0^2)^{-1}g(x)=\int_0^{+\infty}K(x,y;-\lambda_0^2)g(y)dy\,. \qquad (13)$$

Таким образом, вещественное число $-\lambda_0^2$ принадлежит резольвентному множеству оператора A: $-\lambda_0^2 \in \rho(A)$. Поэтому A - самосопряжённый оператор в $L_2(0,+\infty)$ ([5], следствие теоремы X.1.) Согласно (13), резольвента $R_z(A)$ при $z=-\lambda^2 \in \rho(A)$ является интегральным оператором. Теорема доказана.

Структура спектра оператора A описывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Предельный спектр оператора A совпадает с абсолютно непрерывной частью его спектра, причём*

$$\sigma_{ess}(A)=\sigma_{ac}(A)=[0,+\infty). \tag{14}$$

Оператор A имеет единственное отрицательное простое собственное значение, если выполнено одно из следующих условий:

1) $\alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 < 0,\ |\alpha_2|x_2 > 1;$

2) $\alpha_1 < 0,\ \alpha_2 \ge 0,\ |\alpha_1|x_1 > 1;$

3) $\alpha_1 < 0,\ \alpha_2 < 0,\ |\alpha_1|x_1 \le 1,\ |\alpha_2|x_2 > 1;$

4) $\alpha_1 < 0,\ \alpha_2 < 0,\ |\alpha_1|x_1 > 1,\ |\alpha_2|x_2 \le 1.$

В случае $\alpha_1 < 0,\ \alpha_2 < 0,\ |\alpha_1|x_1 > 1,\ |\alpha_2|x_2 > 1$ оператор A имеет два простых отрицательных собственных значения.

Оператор A не имеет собственных значений, если выполнено одно из следующих условий:

1) $\alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 \ge 0;$

2) $\alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 < 0,\ |\alpha_2|x_2 \le 1;$

3) $\alpha_1 < 0,\ \alpha_2 \ge 0,\ |\alpha_1|x_1 \le 1;$

4) $\alpha_1 \le 0,\ \alpha_2 < 0,\ |\alpha_1|x_1 \le 1,\ |\alpha_2|x_2 \le 1.$

Доказательство. Равенства (14) доказываются с помощью стандартной методики, обычно применяемой при исследовании таких задач. А именно, применяются теорема Вейля о предельном (существенном) спектре ([6], теорема XIII.14) и теорема о сохранении абсолютно непрерывных частей спектров возмущённых и невозмущённых операторов ([7], гл. X, теорема 42). Применение этих теорем приводит к равенствам (14).

Очевидно, что если $\Delta(\lambda_0)=0$, то $-\lambda_0^2$ является отрицательным собственным значением оператора A. Поэтому исследуем уравнение $\Delta(\lambda)=0$.

При $\alpha_1=0$ или $\alpha_2=0$, уравнение $\Delta(\lambda)=0$ значительно упрощается и его исследование оказывается несложным. Поэтому предполагаем, что $\alpha_1 \ne 0, \alpha_2 \ne 0$. Так как $sh\lambda x=\frac{1}{2}\left(e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}\right)$, то уравнение $\Delta(\lambda)=0$ можно записать в следующем виде

$$\left[2\lambda+\alpha_1(1-e^{-2x_1\lambda})\right]\left[2\lambda+\alpha_2(1-e^{-2x_2\lambda})\right]-\alpha_1\alpha_2\left(1-e^{-2x_1\lambda}\right)^2 e^{-2(x_2-x_1)\lambda}=0. \quad (15)$$

Обозначим $\mu=2\lambda$. Тогда это уравнение принимает вид

$$\left[\mu+\alpha_1(1-e^{-x_1\mu})\right]\left[\mu+\alpha_2(1-e^{-x_2\mu})\right]-\alpha_1\alpha_2\left(1-e^{-x_1\mu}\right)^2 e^{-(x_2-x_1)\mu}=0. \quad (16)$$

Обозначим для краткости

$$f(\mu)=\left[\mu+\alpha_1(1-e^{-x_1\mu})\right]\left[\mu+\alpha_2(1-e^{-x_2\mu})\right],$$

$$g(\mu)=\alpha_1\alpha_2\left(1-e^{-x_1\mu}\right)^2 e^{-(x_2-x_1)\mu}.$$

Пусть $\alpha_1>0$ и $\alpha_2>0$. Покажем, что уравнение (16) не имеет положительных решений.

Очевидно, что

$$f(\mu)=\left[\mu+\alpha_1(1-e^{-x_1\mu})\right]\left[\mu+\alpha_2(1-e^{-x_2\mu})\right]>\alpha_1\alpha_2\left(1-e^{-x_1\mu}\right)\left(1-e^{-x_2\mu}\right)=$$

$$=\alpha_1\alpha_2\left(1-e^{-x_1\mu}\right)^2 e^{-(x_2-x_1)\mu}\cdot\left(1-e^{-x_1\mu}\right)^{-1}\left(1-e^{-x_2\mu}\right)e^{(x_2-x_1)\mu}=$$

$$=g(\mu)\left(1-e^{-x_1\mu}\right)^{-1}\left(1-e^{-x_2\mu}\right)e^{(x_2-x_1)\mu}.$$

Таким образом,

$$f(\mu)>g(\mu)\left(1-e^{-x_1\mu}\right)^{-1}\left(1-e^{-x_2\mu}\right)e^{(x_2-x_1)\mu},\quad \mu>0. \quad (17)$$

Так как

$$\left(1-e^{-x_2\mu}\right)e^{(x_2-x_1)\mu}=e^{(x_2-x_1)\mu}-e^{-x_1\mu}>1-e^{-x_1\mu},$$

то из (17) получаем, что $f(\mu)>g(\mu),\ \mu>0$. Поэтому уравнение (16) положительных решений не имеет.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha_1>0, \alpha_2<0$ и $|\alpha_2|x_2\le 1$. Из неравенства $e^{-x_2\mu}>1-x_2\mu$ получаем $\alpha_2\left(1-e^{-x_2\mu}\right)>\alpha_2 x_2\mu$. Поэтому

$$\mu+\alpha_2\left(1-e^{-x_2\mu}\right)>\mu+\alpha_2x_2\mu=(1+\alpha_2x_2)\mu\ge 0.$$

Отсюда следует неравенство $f(\mu)>0$. Очевидно, что $g(\mu)<0$, следовательно уравнение (16) положительных решений не имеет.

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом. Теорема доказана.

Отметим, что основные результаты данной работы анонсированы авторами в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991, 568 с.
2. Костенко А.С., Маламуд М.М. Об одномерном операторе Шредингера с δ - взаимодействиями // Функц.анализ и его прил., 2010, т.44, в.2, с.87-91.
3. Исмагилов Р.С., Костюченко А.Г. Об асимптотике спектра оператора Штурма-Лиувилля с точечным взаимодействием // ДАН, 2010, т.433, №5, с.596-598.
4. Костенко А.С., Маламуд М.М. Оператор Шредингера с δ' - взаимодействиями и

струна Крейна-Стилтьеса // ДАН, 2010, т.432, №1, с.12-17.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.2, М.: Мир, 1978, 395 с.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. т.4, М.: Мир, 1982, 428 с.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, 740 с.
8. Гейдаров А.Г., Мамедов М.Н. Спектр оператора Штурма-Лиувилля на полуоси с потенциалом Дирака / Современные проблемы математики и смежные вопросы. Материалы Международной конференции «Мухтаровские чтения», Махачкала, 2008, с.77-79.

DİRAK POTENSİALLI ŞTURM-LİUVİLL OPERATORUNUN YARIMOXDA SPEKTRAL ANALİZİ

A.H.HEYDƏROV, M.N.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

İşdə $L_2(0,+\infty)$ fəzasında $A=-\frac{d^2}{dx^2}+\alpha_1\delta(x-x_1)+\alpha_2\delta(x-x_2)$ operatorunun öz-özünə qoşmalığı isbat edilmişdir. Göstərilir ki, A operatorunun limit spektri onun spektrinin mütləq kəsilməz hissəsi ilə üst-üstə düşür. A operatorunun rezolventasının inteqral operator olması isbat edilmişdir və inteqral nüvəsi üçün göstəriliş tapılmışdır. A operatorunun mənfi məxsusi qiymətlərini təyin etmək üçün tənlik alınmışdır.

Açar sözlər: Şturm-Liuvill operatoru, Dirak potensialı, öz-özünə qoşmalıq, limit spektr, məxsusi qiymət.

SPECTRAL ANALYSIS OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH DIRAC POTENTIAL ON SEMI-AXIS

A.H.HEYDAROV, M.N.MAMMADOV

SUMMARY

In this paper, the selfadjointness of the operator $A=-\frac{d^2}{dx^2}+\alpha_1\delta(x-x_1)+\alpha_2\delta(x-x_2)$ in the space $L_2(0,+\infty)$ is proved. It is shown that the essential spectrum of the operator A coinsides with the absolute continuous part of its spectrum.

Integrality of the resolvents of operator A is proved and the precise expression of kernel is obtained. An equation for the definition of negative eigenvalues of operator A is also obtained.

Key words: Sturm-Liouville operator, Dirac potential, self-adjointness, essential spectrum, eigenvalue.

Поступила в редакцию: 05.10.2011 г.
Принята к печати: 05.03.2012 г.