УДК 517.98

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРОЙ СЕРИИ НЕРЕЗОНАНСНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ПАУЛИ

В.А.МЕХРАБОВ
Бакинский Государственный Университет
Vugar-1969@rambler.ru

В этой статье установлены асимптотические формулы для собственных значений трехмерного периодического оператора Паули. Известно, что оператор Паули один из важнейших операторов квантовой физики. Он описывает движения частицы со спином в электромагнитном поле. В работе получены асимптотические формулы высокого порядка для некоторой серии собственных значений периодического оператора Паули в параллелепипеде, когда вектор потенциал магнитного поля $a \equiv a(h)$.

Ключевые слова: *оператор Паули, нерезонансное собственное значение, асимптотические формулы, невозмущенный оператор.*

В этой статье рассматривается оператор Паули $H_t(a,V(h))$ порожденный в $L_2(F)\times L_2(F)$ выражением

$$H(a,V(h)) = ((-i\nabla - a)^2 + V(h))\cdot I + \sigma\cdot B \tag{1}$$

и граничными условиями

$$u(h+\omega_j) = e^{2\pi i t_j} u(h), \quad j=\overline{1,3}, \tag{2}$$

где $h=(x,y,z)\in R^3, B=\left[qrad\times a\right]$ - магнитное поле, порожденное вектор потенциалом $a=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(B_1,B_2,B_3)$,

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_2 & a_3\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x}\\ a_3 & a_1\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ a_1 & a_2\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{4}$$

F - фундаментальная область некоторой решетки $\Omega=\{m_1\omega_1+m_2\omega_2+m_3\omega_3 : m_1,m_2,m_3\in Z\}$, т.е. параллелепипед, $t=t_1\gamma^1+t_2\gamma^2+t_3\gamma^3$, а

$\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ биортогональные к $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ векторы, F^*- фундаментальная область решетки $\Gamma = \{n_1\gamma^1 + n_2\gamma^2 + n_3\gamma^3 : n_1, n_2, n_3 \in Z\}$, $V(h)$ - периодическая достаточно гладкая функция.

Учитывая (3) и (4) оператор $H(a,V(h))$ можно записать в явном виде

$$H(a,V(h)) = \begin{pmatrix} -\Delta + 2i(\nabla, a) + a^2 + V(h) + [\nabla, a]_z & [\nabla, a]_x - i[\nabla, a]_y \\ [\nabla, a]_x + i[\nabla, a]_y & -\Delta + 2i(\nabla, a) + a^2 + V(h) - [\nabla, a]_z \end{pmatrix}. \quad \mathbf{(5)}$$

В этой статье мы будем делить оператор $H(a,V(h))$ на две части, причем первую часть рассмотрим как невозмущенный оператор, а вторую часть как возмущение. Эта схема имеет более простой вид и она применима в случае, когда $a \equiv a(h)$.

Оператор $H(a,V(h))$ будем делить на следующие части:

$$H(a,V(h)) = \begin{pmatrix} -\Delta + 2i(\nabla, a) + a^2 + [\nabla, a]_z & 0 \\ 0 & -\Delta + 2i(\nabla, a) + a^2 - [\nabla, a]_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V(h) & [\nabla, a]_x - i[\nabla, a]_y \\ [\nabla, a]_x + i[\nabla, a]_y & V(h) \end{pmatrix}. \quad \mathbf{(6)}$$

Обозначим через $M_t(a)$ оператор, порожденный в $L_2(F) \times L_2(F)$ выражением

$$M(a) = \begin{pmatrix} -\Delta + 2i(\nabla, a) + a^2 + [\nabla, a]_z & 0 \\ 0 & -\Delta + 2i(\nabla, a) + a^2 - [\nabla, a]_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{(7)}$$

и граничными условиями (2).

А через $N(h)$ обозначим следующее выражение:

$$N(h) = \begin{pmatrix} V(h) & [\nabla, a]_x - i[\nabla, a]_y \\ [\nabla, a]_x + i[\nabla, a]_y & V(h) \end{pmatrix}. \quad \mathbf{(8)}$$

В работе $[4]$ доказано, что собственные значения и собственные функции оператора $M_t(a)$ следующие:

$$\lambda_\gamma = |\gamma + t|^2 - 2(\gamma + t, a) + a^2 - i[\gamma + t, a]_z, \quad \mathbf{(9)}$$

$$\lambda^\gamma = |\gamma + t|^2 - 2(\gamma + t, a) + a^2 + i[\gamma + t, a]_z; \quad \mathbf{(10)}$$

$$\varphi_\gamma(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i(\gamma + t, h)} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \gamma \in \Gamma, \quad t \in F, \quad \mathbf{(11)}$$

$$\varphi^\gamma(h) = \begin{pmatrix} e^{i(\gamma + t, h)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \gamma \in \Gamma, \quad t \in F. \quad \mathbf{(12)}$$

Значит спектр оператора $M_t(a)$ состоит из λ_γ и λ^γ, где $\gamma \in \Gamma$. А теперь найдем асимптотические формулы для собственных значений оператора $H_t(a,V(h))$. Для ясности предположим, что потенциал $V(h)$ является тригонометрическим многочленом:

$$V(x)=\sum_{\gamma\in Q}V_\gamma e^{i(\gamma,h)}, \quad \text{где} \quad V_\gamma=\int_F V(h)e^{-i(\gamma,h)}dh, \; Q=\{\gamma\in\Gamma: V_\gamma\neq 0\}.$$

Кроме того, не нарушая общности, будем считать

$$\int_F V(h)dx=0. \tag{13}$$

Поставим следующие условия:

I. $a\in XOY$, т.е. $a=(a_1,a_2,0)$;

II. $v=(0,0,1)\notin Q^{(m)}$;

III. $[\gamma+t,a]_z<c\cdot|\gamma+t|^{\alpha^1}$.

Сначала найдем следующие формулы, с которыми в дальнейшем будем пользоваться:

$$N(h)=\begin{pmatrix} V(h) & [\nabla,a]_x-i[\nabla,a]_y \\ [\nabla,a]_x+i[\nabla,a]_y & V(h)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V(h) & (a_2+ia_1)\frac{\partial}{\partial z}-(i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y})a_3 \\ (a_2-ia_1)\frac{\partial}{\partial z}+(i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y})a_3 & V(h)\end{pmatrix}.$$

Так как $a\in XOY$, то

$$N(h)=\begin{pmatrix} V(h) & (a_2+ia_1)\frac{\partial}{\partial z} \\ (a_2-ia_1)\frac{\partial}{\partial z} & V(h)\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Теперь найдем собственные значения, связанные с λ_γ через $N(h)$. Для этого вычислим $N(h)\varphi_\gamma(h)$ и $N(h)\varphi^\gamma(h)$:

$$N(h)\varphi_\gamma(h)=\begin{pmatrix}(a_2+ia_1)\cdot(\gamma+t)_z\cdot e^{i(\gamma+t,h)} \\ \sum_{\gamma_1\in Q}V_{\gamma_1}e^{i(\gamma+\gamma_1+t,h)}\end{pmatrix}, \quad N(h)\varphi^\gamma(h)=\begin{pmatrix}\sum_{\gamma_1\in Q}V_{\gamma_1}e^{i(\gamma+\gamma_1+t,h)} \\ (a_2-ia_1)\cdot(\gamma+t)_z\cdot e^{i(\gamma+t,h)}\end{pmatrix}.$$

Отсюда получим, что

$$\|N(h)\varphi_\gamma(h)\|<c|(\gamma+t)_z| \quad \text{и} \quad \|N(h)\varphi^\gamma(h)\|<c|(\gamma+t)_z|; \tag{15}$$

$$\left(N(h)\cdot\varphi_\gamma(h),\varphi_\beta(h)\right)=\begin{cases}0, & \beta\neq\gamma+\gamma_1 \\ \sum_{\gamma_1\in Q}V_{\gamma_1}, & \beta=\gamma+\gamma_1\end{cases}; \tag{16}$$

$$\left(N(h)\cdot\varphi^\gamma(h),\varphi^\beta(h)\right)=\begin{cases}0 & ,\beta\neq\gamma+\gamma_1 \\ \sum_{\gamma_1\in Q}V_{\gamma_1} & ,\beta=\gamma+\gamma_1\end{cases}. \tag{17}$$

Эти формулы доказывают, что λ_γ связано с $\lambda_{\gamma+\gamma_1}$, а λ^γ связано с $\lambda^{\gamma+\gamma_1}$ через $N(h)$.

Далее, очевидно, что

$$\left(N(h)\cdot\varphi_\gamma(h),\varphi^\beta(h)\right)=\begin{cases}0 & ,\beta\neq\gamma\\ (a_2+ia_1)\cdot(\gamma+t)_z & ,\beta=\gamma\end{cases}, \tag{18}$$

$$\left(N(h)\cdot\varphi^\gamma(h),\varphi^\beta(h)\right)=\begin{cases}0 & ,\beta\neq\gamma\\ (a_2-ia_1)\cdot(\gamma+t)_z & ,\beta=\gamma\end{cases}. \tag{19}$$

Примем следующие обозначения

$$c^\gamma=(a_2+ia_1)(\gamma+t)_z, \qquad b^\gamma=(a_2-ia_1)(\gamma+t)_z. \tag{20}$$

Из условия III следует, что

$$c^\gamma=O\left(\left|\gamma+t\right|^{\alpha^1}\right), \qquad b^\gamma=O\left(\left|\gamma+t\right|^{\alpha^1}\right) \tag{20a}$$

Допустим, что $\gamma+t\in\overline{V^m(\alpha)}$, тогда для любого $\gamma_1\neq v\in Q^{(m)}$ (см. условия II) имеет место следующее соотношение

$$\left|\lambda_\gamma-\lambda_{\gamma+\gamma_1}\right|=\left|\left|\gamma+t\right|^2-2(\gamma+t,a)+a^2+\left[\gamma+t,a\right]_z-\left|\gamma+\gamma_1+t\right|^2-2(\gamma+\gamma_1+t,a)-a^2+\left[\gamma+\gamma_1+t,a\right]_z\right|\geq$$

$$\geq\left|\left|\gamma+t\right|^2-\left|\gamma+\gamma_1+t\right|^2\right|-\left|2(\gamma_1,a)+\left[\gamma_1,a\right]_z\right|.$$

Условие $\gamma+t\in\overline{V^m(\alpha)}$ означает, что $\gamma+t\notin V_{\gamma_1}(\alpha)$, т.е.

$$\left|\left|\gamma+t\right|^2-\left|\gamma+\gamma_1+t\right|^2\right|>\left|\gamma+t\right|^\alpha, \text{ где } 0<\alpha<1.$$

Элементарными вычислениями получим:

$$\left|2(\gamma_1,a)+\left[\gamma_1,a\right]_z\right|<C\left|\gamma_1\right|\cdot\left|a\right|<M\cdot\left|\gamma+t\right|<\frac{1}{2}\left|\gamma+t\right|^\alpha.$$

Из этих неравенств заключаем, что

$$\left|\lambda_\gamma-\lambda_{\gamma+\gamma_1}\right|>\frac{1}{2}\left|\gamma+t\right|^\alpha, \qquad 0<\alpha^1<\alpha<1. \tag{21}$$

Аналогично, можно доказать, что

$$\left|\lambda^\gamma-\lambda^{\gamma+\gamma_1}\right|>\frac{1}{2}\left|\gamma+t\right|^\alpha. \tag{21a}$$

Заметим, что число векторов γ, входящих в $Q^{(m)}$, не больше чем $\left|Q\right|^m$, т.е. $\left|Q^{(m)}\right|\leq\left|Q\right|^m$, здесь $\left|Q\right|$ - число векторов, входящих в Q. Поэтому если $\rho\to\infty$, то

$$\mu(V_{\gamma_1}(\alpha)\cap S_\rho)=\mu(S_\rho)\cdot O(\rho^{\alpha-1}) \ ; \ \mu(\overline{V^\alpha(h)}\cap S_\rho)=\mu(S_\rho)\cdot\left\{1+O(\rho^{\alpha-1})\right\}, \tag{22}$$

здесь $S_\rho=\left\{h\in R^3:\left|h\right|=\rho\right\}$.

Основную роль в доказательстве асимптотических формул играет следующая известная формула:

$$(\Lambda_N - \lambda_\gamma)(\Phi_N, \varphi_\gamma) = (\Phi_N, N(h)\varphi_\gamma)\,. \qquad \textbf{(23)}$$

Подставляя в (23) разложения $N(h)\varphi_\gamma(h) = \sum_\beta \left(N(h)\varphi_\gamma, \varphi_\beta\right)\varphi_\beta(h) + \sum_\beta \left(N(h)\varphi_\gamma, \varphi^\beta\right)\varphi^\beta(h)$ и принимая во внимания формулы (16), (17), (18) и (19), получаем, что

$$N(h)\varphi_\gamma(h) = \sum_{\gamma_1} V_{\gamma_1-\gamma}\varphi_{\gamma_1}(h) + c^\gamma \varphi^\gamma(h)\,, \qquad \textbf{(24)}$$

$$N(h)\varphi^\gamma(h) = \sum_{\gamma_1} V_{\gamma_1-\gamma}\varphi^{\gamma_1}(h) + b^\gamma \varphi_\gamma(h)\,. \qquad \textbf{(25)}$$

Тогда из (23) имеем:

$$(\Lambda_N - \lambda_\gamma)(\Phi_N, \varphi_\gamma) = \sum_{\gamma_1} V_{\gamma_1-\gamma}(\Phi_N(h), \varphi_{\gamma_1}(h)) + c^\gamma(\Phi_N(h), \varphi^\gamma(h))\,. \qquad \textbf{(26)}$$

Из формул (20), (26) и из условия III получим, что

$$\left|\Lambda(\lambda_\gamma) - \lambda_\gamma\right| < \left|c^\gamma\right| + \left|\sum_{\gamma_1} V_{\gamma_1-\gamma}\right| < (a_2 + ia_1)\left|(\gamma+t)_z\right| + M < K \cdot \left|\gamma + t\right|^{\alpha^1}\,. \qquad \textbf{(27)}$$

Итерируя формулу (26) (вернее выделяя $(\varphi_N, \phi_{\gamma_1})$ при (27) $\gamma_1 = \gamma$ и применяя (26) к $(\varphi_N, \phi_{\gamma_1})$ при $\gamma_1 \neq \gamma$) и принимая во внимание $V_0 = 0$ (см. (13)), получаем, что

$$\sum_{\gamma_1} V_{\gamma_1-\gamma}(\Phi_N, \varphi_{\gamma_1}) = V_0\left(\Phi_N, \varphi_\gamma\right) + \sum_{\gamma_1\neq\gamma} V_{\gamma_1-\gamma}(\Phi_N, \varphi_{\gamma_1}) = \sum_{\gamma_1} V_{\gamma_1-\gamma}\frac{(\Phi_N, N(h)\varphi_{\gamma_1})}{\Lambda_N - \lambda_{\gamma_1}} = \left[\sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma-\gamma_1}}{\Lambda_N - \lambda_{\gamma_1}} + \sum_{\gamma_1,\gamma_2\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}V_{\gamma-\gamma_2}}{(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_2})} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma-\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_1})\cdots(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_{k-1}})}\right]\left(\phi_N, \varphi_\gamma\right) + \sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_k-\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_1})\cdots(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_{k-1}})}\left(\phi_N, \varphi_{\gamma_k}\right) + \sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}c^{\gamma_1}}{\Lambda_N - \lambda_{\gamma_1}}(\Phi_N, \varphi^{\gamma_1}) +$$

$$+ \sum_{\gamma_1,\gamma_2\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}c^{\gamma_2}}{(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_2})}(\Phi_N, \varphi^{\gamma_2}) + \cdots + \sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}c^{\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N - \lambda_{\gamma_{k-1}})}(\Phi_N, \varphi^{\gamma_{k-1}})$$

.

Теперь используя формулы (24) и (25), получим:

$$c^\gamma(\Phi_N, \varphi^\gamma) = c^\gamma\,\frac{(\Phi_N, N(h)\varphi^\gamma)}{\Lambda_N - \lambda^\gamma} = \frac{c^\gamma b^\gamma}{\Lambda_N - \lambda^\gamma}(\Phi_N, \varphi_\gamma) + \sum_{\gamma_1}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}c^\gamma}{\Lambda_N - \lambda^\lambda}(\Phi_N, \varphi^{\gamma_1}) = \left\{\frac{c^\gamma b^\gamma}{\Lambda - \lambda^\gamma} + \frac{c^\gamma b^\gamma}{(\Lambda - \lambda^\gamma)^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\sum_{\gamma_1}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma-\gamma_1}}{(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_1})} + \sum_{\gamma_1,\gamma_2}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}V_{\gamma-\gamma_2}}{(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_2})} + \cdots + \sum_{\gamma_i}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}V_{\gamma-\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_{k-1}})}\right]\right\}(\Phi_N, \varphi_\gamma) +$$

$$+ \sum_{\gamma_i}\frac{c^\gamma V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}V_{\gamma_k-\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_{k-1}})}(\Phi_N, \varphi^{\gamma_k}) + \frac{c^\gamma}{\Lambda - \lambda^\gamma}\left[\sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}b^{\gamma_1}}{\Lambda_N - \lambda^{\gamma_1}}(\Phi_N, \varphi_{\gamma_1}) + \sum_{\gamma_1,\gamma_2\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}b^{\gamma_2}}{(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N - \lambda^{\gamma_2})}(\Phi_N, \varphi_{\gamma_2}) + \cdots + \right.$$

$$+\sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}b^{\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{k-1}})}(\Phi_N,\varphi_{\gamma_{k-1}})\Bigg].$$

Примем следующие обозначения:

$$S_k(\Lambda_N,\lambda^\gamma)=\sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}V_{\gamma-\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{k-1}})},$$

$$C_k(\Lambda_N,\lambda^\gamma)=\sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}V_{\gamma_k-\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{k-1}})}(\Phi_N,\varphi^{\gamma_k}),$$

$$S_k(\Lambda_N,\lambda^\gamma)=\sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}V_{\gamma-\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k-1}})},$$

$$C_k(\Lambda_N,\lambda^\gamma)=\sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}V_{\gamma_k-\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k-1}})}(\Phi_N,\varphi_{\gamma_k}).$$

Тогда

$$\sum_{\gamma_1}V_{\gamma_1-\gamma}(\Phi_N,\varphi_{\gamma_1})=\left(\sum_{n=1}^{k-1}S_n(\Lambda_N,\lambda_\gamma)\right)(\Phi_N,\varphi_\gamma)+C_л(\Lambda_N,\lambda_\gamma)+\sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}c^{\gamma_1}}{\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1}}(\Phi_N,\varphi^{\gamma_1})+$$

$$+\sum_{\gamma_1,\gamma_2\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}c^{\gamma_2}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})}(\Phi_N,\varphi^{\gamma_2})+\cdots+\sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}c^{\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k-1}})}(\Phi_N,\varphi^{\gamma_{k-1}});\ \textbf{(27a)}$$

$$c^\gamma(\Phi_N,\varphi^\gamma)=\left\{\frac{c^\gamma b^\gamma}{\Lambda-\lambda^\gamma}+\frac{c^\gamma b^\gamma}{(\Lambda-\lambda^\gamma)^2}\left(\sum_{n=1}^{k-1}S_n(\Lambda_N,\lambda^\gamma)\right)\right\}(\Phi_N,\varphi_\gamma)+\frac{c^\gamma}{\Lambda-\lambda^\gamma}\Big\{C_k(\Lambda_N,\lambda^\gamma)+$$

$$+\sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}b^{\gamma_1}}{\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1}}(\Phi_N,\varphi_{\gamma_1})+\sum_{\gamma_1,\gamma_2\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}b^{\gamma_2}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_2})}(\Phi_N,\varphi_{\gamma_2})+\cdots+\sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}b^{\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{k-1}})}(\Phi_N,\varphi_{\gamma_{k-1}})\Big\}.\ \textbf{(27б)}$$

А теперь упростим выражения

$$\sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}V_{\gamma_1-\gamma}}{\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1}}(\Phi_N,\varphi^\gamma)=\sum_{\gamma_1,\gamma_2\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})}(\Phi_N,\varphi^{\lambda_2})+\sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}V_{\gamma_1-\gamma}b^{\gamma_1}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})}(\Phi_N,\varphi_{\gamma_1})=$$

$$=\left\{\left[\sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}b^\gamma V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma-\gamma_1}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^\gamma)}+\cdots+\sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}b^\gamma V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma-\gamma_{k-2}}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})\cdots(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{k-2}})}\right]+\right.$$

$$+\left[\sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_1}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma-\gamma_1}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})^2(\Lambda_N-\lambda^\gamma)}+\cdots+\sum_{\gamma\ \neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_1}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma-\gamma_{k-2}}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})^2(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k-2}})}\right]+$$

$$+\left[\sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_2}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}V_{\gamma-\gamma_2}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_2})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})}+\cdots+\sum_{\gamma\ \neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_1}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma-\gamma_{k-2}}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_2})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k-2}})}\right]+$$

$$+\cdots+\sum_{\gamma\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_p}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma-\gamma_{k-2}}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_p})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k-2}})}\Bigg\}(\Phi_N,\varphi_\gamma)+$$

$$+\sum_{\gamma\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}V_{\gamma_k-\gamma_{k-1}}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})\cdots(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{k-1}})}(\Phi_N,\varphi^{\gamma_k})+\sum_{\gamma\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_1}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})^2(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k-2}})}(\Phi_N,\varphi_{\gamma_{k-1}})+$$

$$+\cdots+\sum_{\gamma\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_p}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_p})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})\cdots(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{k-2}})}(\Phi_N,\varphi_{\gamma_{k-1}})+\cdots+\sum_{\gamma\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}c^{\gamma_1}b^{\gamma_1}\cdots c^{\gamma_1}b^{\gamma_1}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})^{\frac{p}{2}}(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})^{\frac{p}{2}}}(\Phi_N,\varphi_{\gamma_1})\cdot\qquad\textbf{(28)}$$

Из формул (26), (20), (21) и из условия III получим, что

$$\left|\Lambda_N(\lambda_\gamma)-\lambda^{\gamma_1}\right|\geq\left|\lambda_\gamma-\lambda^{\gamma_1}\right|-\left|\Lambda_N(\lambda_\gamma)-\lambda_\gamma\right|>\left|\gamma+t\right|^\alpha-K\left|\gamma+t\right|^{\alpha^1}-2[\gamma_1+t,a]_z>\left|\gamma+t\right|^\alpha-2M\left|\gamma+t\right|^{\alpha^1}>\frac{1}{2}\left|\gamma+t\right|^\alpha;\qquad\textbf{(29)}$$

$$\left|\Lambda_N(\lambda_\gamma)-\lambda_\gamma\right|\geq\left|\lambda_\gamma-\lambda_{\gamma_1}\right|-\left|\Lambda_N(\lambda_\gamma)-\lambda_\gamma\right|>\left|\gamma+t\right|^\alpha-K\left|\gamma+t\right|^{\alpha^1}>\frac{1}{2}\left|\gamma+t\right|^\alpha\cdot\qquad\textbf{(30)}$$

Тогда

$$\sum_{\gamma\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}c^{\gamma_1}b^{\gamma_1}\cdots c^{\gamma_1}b^{\gamma_1}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})^{\frac{p}{2}}(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})^{\frac{p}{2}}}=O(\left|\gamma+t\right|^{-(\alpha-\alpha^1)p}).$$

Поэтому (28) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{\gamma_1\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}V_{\gamma_1-\gamma}}{\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1}}(\Phi_N,\varphi^{\gamma})=\Bigg\{\sum_{n=1}^{p}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma})}\otimes S_n(\Lambda_N,\lambda^\gamma)+\sum_{n=1}^{p}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_1}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})}\otimes S_n(\Lambda_N,\lambda_\gamma)+$$

$$+\sum_{n=2}^{p}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_2}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_2})}\otimes S_n^{\,1}(\Lambda_N,\lambda_\gamma)+\cdots+\sum_{n=p-1}^{p}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_{p-1}}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{p-1}})}\otimes S_n^{\,p-2}(\Lambda_N,\lambda_\gamma)+$$

$$+\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_p}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_p})}\otimes S_n^{\,p-1}(\Lambda_N,\lambda_\gamma)\Bigg\}\left(\Phi_N,\varphi_\gamma\right)+O(\left|\gamma+t\right|^{-(\alpha-\alpha^1)p}),\qquad\textbf{(31)}$$

здесь мы пользовались следующими обозначениями:

$$\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_k}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_k})}\otimes S_n^{\,k}(\Lambda_N,\lambda_\gamma)=\sum_{\gamma\neq\gamma}\frac{c^{\gamma_1}b^{\gamma_k}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_p-\gamma_{p-1}}V_{\gamma-\gamma_p}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_k})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_1})\cdot\cdot(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{k-1}})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_k})\cdot\cdot(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_p})}\cdot$$

Аналогично итерируя формулу $\displaystyle\sum_{\gamma_1,\gamma_2\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}c^{\gamma_2}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})}(\Phi_N,\varphi^{\gamma_2})$ $p-1$ раз, получим:

$$\sum_{\gamma_1,\gamma_2\neq\gamma}\frac{V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}c^{\gamma_2}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})}(\Phi_N,\varphi^{\gamma_2})=\Bigg\{\sum_{n=2}^{p}\frac{c^{\gamma_2}b^{\gamma}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma})}\otimes S_n^{\,1}(\Lambda_N,\lambda^\gamma)+$$

$$+\sum_{m=2}^{p}\sum_{n=2}^{p}\frac{c^{\gamma_2}b^{\gamma_m}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_m})}\otimes S_n^{\,m-1}(\Lambda_N,\lambda_\gamma)\Bigg\}\left(\Phi_N,\varphi_\gamma\right)+O(\left|\gamma+t\right|^{-(\alpha-\alpha^1)p}).\qquad\textbf{(32)}$$

По аналогии получим

$$\sum_{\gamma_i\neq\gamma}\frac{c^{\gamma}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_2})\cdots(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k-2}})}(\Phi_N,\varphi^{\gamma_{k-1}})=\left\{\sum_{n=k-1}^{p}\frac{c^{\gamma_{k-1}}b^{\gamma}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k-1}})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma})}\otimes S_n^{k-2}(\Lambda_N,\lambda^{\gamma})+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=k-1}^{p}\sum_{n=k-1}^{p}\frac{c^{\gamma_{k-1}}b^{\gamma_m}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k-1}})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_m})}\otimes S_n^{m-1}(\Lambda_N,\lambda_{\gamma})\right\}(\Phi_N,\varphi_{\gamma})+O(|\gamma+t|^{-(\alpha-\alpha^1)p}). \quad \textbf{(33)}$$

Подставляя формулы (31), (32) и (33) в (26) получим:

$$(\Lambda_N-\lambda_{\gamma})(\Phi_N,\varphi_{\gamma})=\left\{\sum_{n=1}^{k-1}S_n(\Lambda_N,\lambda_{\gamma})+\frac{c^{\gamma}b^{\gamma}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma})^2}\left(\sum_{n=1}^{k-1}S_n(\Lambda_N,\lambda_{\gamma})\right)+\sum_{r=2}^{k-1}\sum_{n=r}^{p}\frac{c^{\gamma_r}b^{\gamma}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_r})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma})}\otimes S_n^{r-1}(\Lambda_N,\lambda^{\gamma})+\right.$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{m=r}^{p}\sum_{n=r}^{p}\frac{c^{\gamma_r}b^{\gamma_m}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_r})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_m})}\otimes S_n^{m-1}(\Lambda_N,\lambda_{\gamma})+\frac{c^{\gamma}}{\Lambda_N-\lambda_{\gamma}}\left[\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{n=r}^{p}\frac{b^{\gamma_r}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_r})}\otimes S_n^{r-1}(\Lambda_N,\lambda_{\gamma})+\right.$$

$$+\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{n=r}^{p}\frac{c^{\gamma_r}b^{\gamma_r}b^{\gamma}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_r})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_r})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma})}\otimes S_n^{r-1}(\Lambda_N,\lambda^{\gamma})+$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{n=r}^{p}\sum_{m=r}^{p}\frac{b^{\gamma_r}c^{\gamma_r}b^{\gamma_m}}{(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_r})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_r})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_m})}\otimes S_n^{m-1}(\Lambda_N,\lambda^{\gamma})\right\}(\Phi_N,\varphi_{\gamma})+O(|\gamma+t|^{-(\alpha-\alpha^1)p}); \quad \textbf{(34)}$$

Отсюда мы имеем:

$$(\Lambda_N-\lambda_{\gamma})(\Phi_N,\varphi_{\gamma})=\left(\sum_{n=1}^{p-1}F_n\right)(\Phi_N,\varphi_{\gamma})+O(|\gamma+t|^{-(\alpha-\alpha^1)p}), \quad \textbf{(35)}$$

здесь F_N состоит из следующих слагаемых:

$$E_{i+j}(\Lambda_N)=\frac{c^{\gamma_{k_1}}\cdots c^{\gamma_{k_i}}b^{\gamma_{n_1}}\cdots b^{\gamma_{n_j}}V_{\gamma_1-\gamma}V_{\gamma_2-\gamma_1}\cdots V_{\gamma-\gamma_{m-i-j}}}{(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k_1}})\cdot\cdot(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{k_i}})(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{n_1}})\cdot\cdot(\Lambda_N-\lambda^{\gamma_{n_j}})(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_1})\cdot\cdot(\Lambda_N-\lambda_{\gamma_{m-i-j}})}. \quad \textbf{(36)}$$

Теперь оценим эти слагаемые. Так как $c^{\gamma_{k_i}}<M|\gamma+t|^{\alpha^1}$, $b^{\gamma_{n_j}}<N|\gamma+t|^{\alpha^1}$ (см. (20а)) и $\left|\Lambda_N(\lambda_{\gamma})-\lambda^{\gamma_{n_j}}\right|>\frac{1}{2}|\gamma+t|^{\alpha}$; $\left|\Lambda_N(\lambda_{\gamma})-\lambda_{\gamma_{k_i}}\right|>\frac{1}{2}|\gamma+t|^{\alpha}$ (см. (29) и (30)), тогда получим:

$$E_p(\Lambda_N)=O\left(|\gamma+t|^{-(\alpha-\alpha^1)}\right). \quad \textbf{(37)}$$

Ясно, что $\sum_{\gamma\in Q}V_{\gamma}<c$. В работах [3] и [4] доказывается, что

$$F_n=O\left(|\gamma+t|^{-p(\alpha-\alpha^1)}\right). \quad \textbf{(38)}$$

Поэтому, разделяя (35) на $(\Phi_N,\varphi_{\gamma})$, получим:

$$\Lambda_N(\lambda_{\gamma})=\lambda_{\gamma}+\sum_{n=1}^{m-1}F_n(\Lambda_N)+O\left(|\gamma+t|^{-(\alpha-\alpha^1)m}\right). \quad \textbf{(39)}$$

Наконец, как в работах [3] и [4] в формуле (39) в знаменателе

$E_p(\Lambda_N)$ заменяя Λ_N на $\lambda_\gamma + \sum_{n=1}^{m-1} F_n(\lambda_\gamma)$ получим:

$$\Lambda_N\left(\lambda_\gamma\right) = \lambda_\gamma + \sum_{n=1}^{m-1} \overline{F}_n\left(\lambda_\gamma, \lambda^\gamma, V\left(x\right)\right) + O\left(\left|\gamma + t\right|^{-(\alpha-\alpha^1)m}\right). \qquad \mathbf{(40)}$$

Из вышеизложенных следует, что доказана следующая

Теорема 1. Если выполняются условия I – III, $\gamma + t \in V_v(\alpha)$ и $|\gamma + t|$ достаточно большое, то соответствующее собственное значение $\Lambda_N(\lambda_\gamma)$ оператора $H_t(a, V(h))$ удовлетворяет асимптотической формуле (40), где $\overline{F}_n(\lambda_\gamma, \lambda^\gamma, V(h))$ явно выражается через λ_γ, λ^γ, $V(h)$ и имеет порядок $O(|\gamma + t|^{-(\alpha-\alpha^1)n})$.

Замечание. Из доказательства теоремы 1 видно, что если $\Lambda_N(\lambda_\gamma)$ такое, что $\left|\left(\Phi_N, \varphi_\gamma\right)\right| > |\gamma + t|^{-(\alpha-\alpha^1)s}$, то $\Lambda_N(\lambda_\gamma)$ удовлетворяет асимптотической формуле, полученной из (40) заменой $O\left(|\gamma + t|^{-(\alpha-\alpha^1)n}\right)$ на $O\left(|\gamma + t|^{-(\alpha-\alpha^1)(n-s)}\right)$. Аналогичная формула имеет место и для $\Lambda_N\left(\lambda^\gamma\right)$.

Теперь обсудим такой вопрос: ***существует ли в каждой вышеуказанной окрестности*** λ_γ ***собственное значение*** Λ_N ***оператора*** $H_t(a, V(h))$***?***

Нам понадобится следующая простая лемма, которая доказана в работе [2]:

Лемма. Для любых элементов $h, h_1, h_2, ..., h_k \in H$ существует номер N такой, что $\left|(h, \Phi_N)\right|^2 \geq \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\left|(h_n, \Phi_N)\right|^2 > \frac{1}{k}\left|(h_n, \Phi_N)\right|^2$, где $n = \overline{1, k}$, $\|h_n\| = 1$, $\|h\| = 1$; здесь $\Phi_1, \Phi_2, ...$ – любой ортонормированный базис (например, собственные функции самосопряженного оператора $H_t(a, V(x))$) в H.

В качестве векторов $h, h_1, h_2, ..., h_k$ будем брать векторы

$$\varphi_\gamma,\ \overline{C_m}(\lambda_\gamma),\ \frac{\partial}{\partial x}\overline{C_m}(x)\Big|_{x=\lambda_\gamma},\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\overline{C_m}(x)\Big|_{x=\lambda_\gamma} \equiv \overline{C_m}^{\,k-1}(\lambda_\gamma),$$

где

$$\overline{C_m}(x) = \sum_{k_i, n_j} \frac{c^{\gamma_{k_1}} \cdots c^{\gamma_{k_i}} b^{\gamma_{n_1}} \cdots b^{\gamma_{n_j}} V_{\gamma_1-\gamma} V_{\gamma_2-\gamma_1} \cdots V_{\gamma-\gamma_{m-i-j}}}{(x-\lambda_{\gamma_{k_1}})\cdot\cdot(x-\lambda_{\gamma_{k_i}})(x-\lambda^{\gamma_{n_1}})\cdot\cdot(x-\lambda^{\gamma_{n_j}})(x-\lambda_{\gamma_1})\cdot\cdot(x-\lambda_{\gamma_{m-i-j}})} \varphi_{\gamma_{m-i-j}}. \qquad \mathbf{(41)}$$

Учтем следующий факт:

$$\sum_{N:|\Lambda_N-\lambda_\gamma|\geq 2M} \left|\left(\Phi_N,\varphi_\gamma\right)\right|^2 = \sum_{N:|\Lambda_N-\lambda_\gamma|\geq 2M} \frac{\left|\left(\Phi_N, N(h)\varphi_\gamma\right)\right|^2}{\left|\Lambda_N-\lambda_\gamma\right|^2} \leq \frac{\left\|N(h)\varphi_\gamma\right\|}{4M} < \frac{1}{4}\ ,$$

здесь $M = \left\|N(h)\varphi_\gamma\right\|$.

Очевидно, что число собственных значений Λ_N, попадающих в интервал $\left[\lambda_\gamma-2M, \lambda_\gamma+2M\right]$ меньше чем $\lambda_\gamma^{k(\alpha-\alpha^1)}$ при $\lambda_\gamma\to\infty$. Обозначим через $A(\lambda_\gamma)$ множество индексов N таких, что $\Lambda_N\in\left[\lambda_\gamma-2M, \lambda_\gamma+2M\right]$ и $\left|\left(\Phi_N,\varphi_\gamma\right)\right| > \frac{1}{2}\lambda_\gamma^{-\frac{1}{2}k(\alpha-\alpha^1)}$.

Тогда получим:

$$\sum_{N\in A(\lambda_\gamma)} \left|\left(\Phi_N,\varphi_\gamma\right)\right|^2 = 1 - \sum_{N:|\Lambda_N-\lambda_\gamma|>2M} \left|\left(\Phi_N,\varphi_\gamma\right)\right|^2 - \sum_{\substack{N:|\Lambda_N-\lambda_\gamma|<2M \\ |(\Phi_N,\varphi_\gamma)|<\frac{1}{2}\lambda_\gamma^{-\frac{1}{2}k(\alpha-\alpha^1)}}} \left|\left(\Phi_N,\varphi_\gamma\right)\right|^2 \geq \frac{1}{2}. \quad \mathbf{(42)}$$

Отсюда, рассуждая так же, как при доказательстве леммы, получим, что существует N из $A(\lambda_\gamma)$, для которого

$$\left|\left(\Phi_N,\varphi_\gamma\right)\right| \geq \frac{1}{4k}\left|\left(\overline{C_m}^{\,j}(\lambda_\gamma), \Phi_N\right)\right| \cdot \frac{1}{\left\|\overline{C_m}^{\,j}(\lambda_\gamma)\right\|}, \quad \mathbf{(43)}$$

ибо в противном случае вытекало бы:

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{N\in A(\lambda_\gamma)} \left|\left(\Phi_N,\varphi_\gamma\right)\right|^2 \leq \sum_{N\in A(\lambda_\gamma)} \left|\left(\Phi_N, \frac{1}{4k}\frac{\overline{C_m}^{\,j}(\lambda_\gamma)}{\left\|\overline{C_m}^{\,j}(\lambda_\gamma)\right\|}\right)\right|^2 < \frac{1}{4}.$$

Теперь аналогично, как в работе [2], доказывается, что из (43) следует, что существует такое $\Lambda_N(\lambda_\gamma)$, которое удовлетворяет асимптотической формуле (40).

Теорема 2. Если выполняется условия теоремы 1, то тогда для любого λ_γ существует соответствующее собственное значение $\Lambda_N(\lambda_\gamma)$ оператора $H_t(a, V(h))$, которое удовлетворяет асимптотической формуле (40).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Анализ операторов. М.: Мир, 1982, т. 4, 428 с.
2. Велиев О.А. Асимптотические формулы для собственных чисел многомерного оператора Шредингера и периодические дифференциальные операторы. Препринт ИФ АР Азерб.ССР, Баку, 1985, № 157, 65 с.
3. Мехрабов В.А. О разложении периодического оператора Паули по слоям. Вестник Бакинского Государственного Университета 2000, №-4, с.166-175.

4. Мехрабов В.А. Периодический оператор Паули. Асимптотические формулы высокого порядка. Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики», Тула, 19-23 ноября 2007, с. 61-63.

ÜÇÖLÇÜLÜ PERİODİK PAULİ OPERATORUNUN BIR QRUP QEYRİ-REZONANS MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİ ÜÇÜN ASİMPTOTİK DÜSTURLAR

V.A.MEHRABOV

XÜLASƏ

Bu məqalədə üçölçülü periodik Pauli operatorunun məxsusi ədədləri üçün asimtotik düsturların alınması məsələsi araşdırılır. Məlumdur ki, Pauli operatoru kvant fizikasının əsas operatorlarından biridir. O, zərrəciyin elektromaqnit sahəsində spini nəzərə alınmaqla hərəkət tənliyini göstərir. Məqalədə Pauli operatorunun bir qrup qeyri-rezonans məxsusi ədədləri üçün yüksək tərtibdən asimptotik düsturlar alınmışdır.

Açar sözlər: Pauli operatoru, qeyri-rezonans məxsusi ədədlər, asimptotik düsturlar, həyəcanlanmamış operator.

ASYMPTOTIC FORMULAS FOR SOME SERIES OF EIGENVALUES OF THREE-DIMENSIONAL PERIODIC PAULY OPERATOR

V.A.MEHRABOV

SUMMARY

The article studies eigenvalues of three-dimensional periodic Pauly operator. Apparently, Pauly operator is one of the important operators of the Quantum Physics and describes the movement of the particle with a spin in the magnetic field. The eigenvalues of this operator correspond to the full energy of the quantum system (particle with a spin moving in the magnetic field). Asymptotic formulas of high sequence for some series of eigenvalues of periodic Pauly operator in parallelepiped have been obtained.

Key words: Pauly operator, eigenvalues, asymptotic formulas, unperturbed operator.

Поступила в редакцию: 03.10.2011 г.
Принята к печати: 05.03.2012 г.