УДК 517.938

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

А.Х.ХАНМАМЕДОВ, М.Г.МАХМУДОВА
Бакинский Государственный Университет
agil_khanmamedov@yahoo.com, mlk_maxmudova@hotmail.com

Рассмотрен оператор Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в одном из граничных условий. Доказана базисность в пространстве $L_P(0,1),\ p>1$ *системы собственных функций этого оператора.*

Ключевые слова: оператор Штурма- Лиувилля, краевая задача, собственная функция, базис.

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных операторов со спектральным параметром в граничном условии появляются во многих областях естествознания (см. $[1]$). Такие задачи в различных постановках исследовались во многих работах (см. $[1-8]$ и литературу в них).

Рассмотрим следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\ 0<x<1, \tag{1}$$

$$y'(0)=hy(0), \tag{2}$$

$$(a_1\lambda+b_1)y(1)=(c_1\lambda+d_1)y'(1), \tag{3}$$

где $\lambda-$спектральный параметр; $q(x),h,a_1,b_1,c_1,d_1$- вещественны; $q(x)\in L_2(0,1),\ a_1d_1-b_1c_1>0$. Известно $[2]$, что существует бесконечно возрастающая последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи (1)-(3): $\lambda_0<\lambda_1<....<\lambda_n<....$ Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$ решение уравнения (1) с начальными условиями $\varphi(0,\lambda)=1,\ \ \varphi'(0,\lambda)=h$. При каждом фиксированном x функция $\varphi(x,\lambda)$ является целой по λ. Собственные значения задачи (1)-(3) суть корни целой функции $\Delta(\lambda)=(a_1\lambda+b_1)\varphi(1,\lambda)-(c_1\lambda+d_1)\varphi'(1,\lambda)$.

Кроме того, $\varphi(x,\lambda_n)$ является собственной функцией задачи (1)-(3), соответствующей собственному значению λ_n. Как показано в $[2]$, при $n \to \infty$ верна формула:

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi(n+\nu) + O(\frac{1}{n}), \tag{4}$$

где

$$\nu = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad c_1 \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{при} \quad c_1 = 0. \end{cases}$$

В работе $[7]$ (см. также $[3-6]$) при условии $q(x) \in C[0,1]$ исследована базисность в $L_2(0,1)$ собственных функций задачи (1)-(3). В настоящей работе установлена базисность в $L_p(0,1)(1 < p < \infty)$ системы собственных функций краевой задачи (1)-(3) с потенциалом $q(x) \in L_2(0,1)$. При этом предложенный нами подход существенно отличается от использованного в $[7]$ подхода и основан на свойствах операторов преобразования (см. $[11,12]$) для уравнений Штурма-Лиувилля.

1.Введем в рассмотрение систему функций

$$\{\cos\sqrt{\lambda_n}\, x\} \quad (n = 0,1,.......n \neq k_0) , \tag{5}$$

где k_0 – произвольно фиксированное неотрицательное целое число.

Теорема 1. *Система (5) образует базис в пространстве* $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$, *причем при p=2 базис является безусловным.*

Доказательство. Рассмотрим формулу (4). Пусть, например, $\nu = -\frac{1}{2}$ ($c_1 = 0$) . Известно, что система функций

$$\left\{\cos(n-\frac{1}{2})\pi x\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{6}$$

образует $[11]$ базис в $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$, причем при $p = 2$ базис является ортогональным. В силу (4) система (5) квадратично близка к системе (6). Тогда из полноты системы (5) в $L_2(0,1)$ (см., напр., $[10]$)вытекает, что эта система образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Последнее влечет за собой безусловность базиса.

Пусть $1 < p < 2$ и $f(x) \in L_p(0,1)$.Через $c_n(f), n = 1,2,...$ обозначим коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе (6). Так как система

$\left\{\sqrt{2}\cos(n-\frac{1}{2})\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ является равномерно ограниченной и ортонормированной в $L_p(0,1)$, то по теореме Рисса имеем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\left(f\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le M\left\|f\right\|_{L_p(0,1)},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Откуда следует, что система (6) в $L_p(0,1)$ образует (см. [12]) q-базис. Кроме того, используя (4) , получаем

$$\left\|\cos\sqrt{\lambda_n}x-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right\|_{L_p(0,1)}^p = O\left(\frac{1}{n^p}\right), \; при \; n\to\infty,$$

согласно которому система (5) p-близка в $L_p(0,1)$ к системе (6). Так как система (5) полна в $L_p(0,1)$ при $1<p<2$, то она образует [12] изоморфный к (6) базис в $L_p(0,1)$ Аналогично, если $p>2$, то система (6) образует p-базис в $L_p(0,1)$. Очевидно, что система (5) q-близка в $L_p(0,1)$ к системе (6). Кроме того, система (5) ω-линейно независима в $L_p(0,1)$, поскольку она образует базис в $L_2(0,1)$. Откуда следует, что система (5) образует [12] изоморфный к системе (6) базис в $L_p(0,1)$. Теорема доказана.

2. Рассмотрим решение $\varphi(x,\lambda)$ уравнения (1). Как известно [11,12] для этого решения верно представление с помощью оператора преобразования

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+\int_0^x K(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t\,dt, \tag{7}$$

где *K(x,t)* – вещественная непрерывная функция и $K(x,x)=h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt$.

Рассмотрим оператор преобразования, определенной формулой

$$(I+\Omega)f = f(x)+\int_0^x K(x,t)f(t)dt.$$

Так как Ω есть вольтеровский интегральный оператор, то оператор $\mathrm{I}+\Omega$ имеет обратный оператор того же вида. Это означает, что оператор $\mathrm{I}+\Omega$ осуществляет взаимно однозначное отображение пространства $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ на себя. Пользуясь тогда теоремой 1 и формулой (7) получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* k_0*–произвольное фиксированное целое неотри-*

цательное число. Тогда система $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ $n=(0,1,....;n\neq k_0)$ *образует базис в пространстве* $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ *,причем при p=2 базис является безусловным*.

3. Приведенные результаты переносятся также на случай, когда краевое условие (2) принимает вид $y(0)=0$ (см. $[4,5]$). В этом случае следует использовать решение $\varphi(x,\lambda)$ уравнения (1), допускающее представление

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x K(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}dt\ .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Fulton C.T. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions //Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 1977, v. 77, p. 293-288.
2. Binding P.A., Browne P.J., Seddigihi K. Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions // Proc.Edinburgh Math. Soc. (2). 1993, v. 37, №1, p. 57-72.
3. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральной задаче из теории парабола-гиперболического уравнения теплопроводности //ДАН. 1997, т. 352, №4, с. 451-454.
4. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии //Дифференциальные уравнения. 1997, т. 33, №1, с. 115-119.
5. Капустин Н.Ю. Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 1999, т. 35, №8, с. 1024-1027.
6. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О базисности в пространстве L_p системы собственных функций отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии //Дифференциальные уравнения. 2000, т. 36, №10, с. 1357-1360.
7. Керимов Н.Б., Мирзоев В.С. О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии //Сиб. мат. журн. 2003, т. 44, №5, с. 1041-1045.
8. Марченков Д.Б. Базисность в пространстве системы $L_p(0,1)$ собственных функций, отвечающей задаче со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 2006, т. 42, №6, с. 847-849.
9. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.
10. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
11. Моисеев Е.И. О базисности систем синусов и косинусов //ДАН СССР. 1984, т. 275, №4, с. 794-798.
12. Билалов Б.Т., Мурадов Т.Р. Об эквивалентных базисах в банаховых пространствах // Укр. мат. журн. 2007, т. 58, №4, с.551-554

SƏRHƏD ŞƏRTİNDƏ SPEKTRAL PARAMETR OLAN ŞTURM-LİUVİLL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN MƏXSUSİ FUNKSİYALAR SİSTEMİNİN BAZİS OLMASI HAQQINDA

A.X.XANMƏMMƏDOV, M.H.MAHMUDOVA

XÜLASƏ

Sərhəd şərtlərindən birində spektral parametr olan Şturm-Liuvill operatoruna baxılıb. Məxsusi funksiyalar sisteminin $L_P(0,1),\ p>1$ fəzasında bu operatorun bazisi olması isbat edilmişdir.

Açar sözlər: Şturm-Liuvill operatoru, sərhəd məsələsi, məxsusi funksiya, bazis.

ON THE BASICITY OF THE SYSTEM OF EIGENFUNCTIONS OF STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH A SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION

A.Kh.KHANMAMMADOV, M.H.MAHMUDOVA

SUMMARY

The Sturm–Liouville operator with spectral parameter in some boundary conditions is concerned. The basicity of the system of eigenfunctions of this operator in the space $L_P(0,1),\ p>1$ is proved.

Key words: operator Sturm–Liouville, boundary value problem, eigenfunction, basis

Поступила в редакцию: 26.10.2011 г.
Принята к печати: 05.03.2012 г.