УДК 519.21

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПЛОТНОСТИ СОВМЕСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ПЕРВОГО ВЫХОДА И ПЕРЕСКОКА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ ЗА НЕЛИНЕЙНУЮ ГРАНИЦУ

Ф.Г.РАГИМОВ, М.М.НАВИДИ*
Бакинский Государственный Университет
****Иранский Исламский Рудбарский Университет «Азад»***
ragimovf@rambler.ru, navidimahmod@yahoo.com

В работе доказана теорема об асимптотическом поведении плотности совместного распределения момента первого выхода и перескока случайного блуждания за нелинейную границу. С помощью этой теоремы изучено предельное поведение маргинальной и условной плотности перескока, а также доказана локальная предельная теорема для момента первого выхода случайного блуждания за нелинейную границу.

Ключевые слова*:* случайное блуждание, момент первого выхода, перескок, плотность распределения.

Пусть $\xi_n,\ n \geq 1$ – есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и пусть $f_a(t),\ t > 0$ - некоторое семейство нелинейных функций (границ) от растущего параметра $a > 0$.

Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, n \geq 1$$

- случайное блуждание и

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : S_n > f_a(n)\} \qquad (1)$$

- момент первого выхода случайного блуждания S_n за нелинейную границу $f_a(t),\ t > 0$ (всегда будем считать $\inf\{\varnothing\} = \infty$).

Граничные задачи для случайных блужданий, связанные с нелинейным моментом первого выхода τ_a, изучены во многих работах. $[1],[2],[5-7]$ (см. также монографии $[4]$, $[10]$ и диссертацию $[8]$). В работе

$[4]$ для случая $f_a(t) = f(t)$ изучены асимптотики вероятности $P(\tau > n)$ при $n \to \infty$ и найдены достаточные условия для существования математического ожидания $E\tau$.В работах $[6],[7]$ изучены интегральные и локальные предельные теоремы для τ_a. Вопрос существования предельного распределения перескока $\chi_a = S_{\tau_a} - f_a(\tau_a)$ изучен в работах $[8]$ и $[11]$.

В работе $[1]$ изучено предельное поведение условной вероятности $P(\tau_a \geq n | S_n = x)$ пересечения нелинейных границ случайным блужданием при $x = x(a) \to \infty$ и $a \to \infty$. Аналогичные задачи изучены в работе $[2]$ для одного класса возмущенных случайных блужданий, описываемых нелинейной функцией от случайного блуждания S_n.

В настоящей работе с помощью результата работы $[1]$ доказывается теорема об асимптотическом поведении плотности совместного распределения момента первого выхода τ_a и перескока $\chi_a = S_{\tau_a} - f_a(\tau_a)$ при $a \to \infty$ случайного блуждания с бесконечной дисперсией ($DS_1 = \infty$). Подобные задачи для случая конечной дисперсии ($DS_1 < \infty$) изучены в работах $[6]$ и $[10]$.

Условия и формулировка основных результатов. Будем предполагать, что $\mu = E\xi_1 > 0$ и распределение случайной величины ξ_1 принадлежит области притяжения устойчивого закона $G_\alpha(x)$ с параметром $\alpha \in (1,2]$, т.е. имеет место

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{A(n)} \leq x\right) = G_\alpha(x), \tag{2}$$

где $A(t) = t^{1/\alpha} L(t),\ t > 0$ и $L(t)$-медленно меняющаяся функция на бесконечности $[12]$.

Кроме того, предположим, что выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| M e^{it\xi_1} \right|^m dt < \infty \tag{3}$$

для некоторого $m \geq 1$.

Из условия (3) вытекает, что существует ограниченная и непрерывная плотность распределения $P_n(x)$ суммы S_n при $n \geq m$ $[12]$.

Относительно границы $f_a(t)$ будем предполагать, что выполняются следующие условия регулярности:

1) для каждого a функция $f_a(t)$ монотонно возрастает, непрерывно-дифференцируема при $t > 0$, причем $f_a(1) \uparrow \infty$ при $a \to \infty$;

2) для достаточно больших a функция $\frac{f_a(t)}{t}$ монотонно убывает к нулю при $t \to \infty$;
3) для любой функции $n = n(a) \to \infty$ при $n \to \infty$ такой, что $\frac{f_a(n)}{n} \to \mu$ выполняется $f_a^{'}(n) \to \theta \in [0, \mu)$ при $a \to \infty$;
4) для любых функций $n = n(a) \to \infty$ и $m = m(a) \to \infty$ при $a \to \infty$ таких, что $\frac{n}{m} \to 1$ выполняется $\frac{f_a(n)}{f_a(m)} \to 1$ при $a \to \infty$.

Обозначим через W класс семейств границ $f_a(t)$, удовлетворяющих условиям 1)-4).

Отметим, что из условий 1), 2) вытекает, что уравнение $f_a(n) = n\mu$ имеет единственное решение $N_a = N_a(\mu)$, причем $N_a \to \infty$ при $a \to \infty$.

Нетрудно проверить, что семейство параболических границ вида $f_a(t) = at^{\beta}, 0 \le \beta < 1, a > 0$, входит в W и для этого семейства имеем $N_a = (a/\mu)^{\frac{1}{1-\beta}}$.

Положим

$w_a(n,r) = \frac{d}{dr} P(\tau_a = n, \chi_a \le r)$ - τ_a и χ_a - плотность совместного распределения;

$h(r) = \frac{P(S_{\tau_+} - \tau_+\theta > r)}{E(S_{\tau_+} - \theta\tau_+)}$-плотность предельного распределения случайного блуждания $S_n - n\theta, n \ge 1$ за бесконечно удаленный барьер, где $\tau_+ = \inf\{n \ge 1 :\ S_n - n\theta > 0\}$ [10]. Положим также $\lambda = \mu - \theta$.

Обозначим через $g_\alpha(x)$ плотность устойчивого распределения $G_\alpha(x)$ и через $h_a(r)$ плотность маргинального распределения перескока χ_a.

Теорема 1. Пусть $f_a(t) \in W$, выполняются условия (2), (3) и

$$n = n(a) = N_a + \upsilon_a A(N_a), \tag{4}$$

причем $\upsilon_a \to \upsilon \in R = (-\infty, \infty)$ при $a \to \infty$. Тогда

$$w_a(n,r) \sim \frac{\lambda}{A(n)} g_\alpha(-\upsilon\lambda) h(r)$$

при $a \to \infty$ равномерно по υ из ограниченного множества в R.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда

$$\int_0^\infty |h_a(r)-h(r)|dr \to \infty \text{ при } a\to\infty .$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1.Тогда

$$P(\tau_a = n) \sim \frac{\lambda}{A(n)} g_\alpha(-\upsilon\lambda) \text{ при } a\to\infty .$$

Следствие. При выполнении условий теоремы 1 имеет место:

$$h_a(r/n)\to h(r) \text{ при } a\to\infty ,$$

где $h_a(r/n)$ есть условная плотность перескока χ_a при условии, что $\tau_a = n$.

Доказательство основных результатов. Сначала нам понадобятся следующие факты, сформулированные в виде лемм.

Лемма 1. Пусть выполняются условия (2) и (3). Тогда

$$P_n(x) = \frac{1}{A(n)} g_\alpha\left(\frac{x-n\mu}{A(n)}\right) + o(1/A(n)) \text{ при } n\to\infty .$$

Это лемма вытекает из локальной предельной теоремы для суммы S_n ([9]).

Лемма 2.Пусть $f_a(t)\in W$ и выполняется условие (2). Тогда

$$\lim_{a\to\infty} P\left(\frac{\tau_a - N_a}{A(N_a)} \le x\right) = 1 - G_\alpha(-\lambda x) \text{ , } \lambda = \mu-\theta .$$

Утверждение леммы 1 содержится в работе [7] (см. также [8]).

Лемма 3. Пусть для неотрицательных и измеримых функции $\psi_n(x), n\ge 1$ и $\psi(x), x\in R$ выполняется сходимость $\psi_n(x)\to\psi(x)$ при $n\to\infty$ почти всюду по мере Лебега.

Если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)dx \to \int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x)dx,$ то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)-\psi(x)|dx \to 0$ при $n\to\infty$.

Лемма 3 является частным случаем известной теоремы Шеффе [3] (см. также [10]).

Доказательство теоремы 1. Положим $\chi_n = S_n - f_a(n)$. Учитывая, что событие $\{\tau_a > n\}$ влечет за собой событие $\{S_n < f_a(n)\}$, по формуле полной вероятности имеем:

$$P(\tau_a \ge n, \chi_n \ge r) = P(\tau_a \ge n, S_n \ge r + f_a(n)) =$$

$$= \int\limits_{\frac{r+f_a(n)}{n}}^{\infty} P\left(\tau_a \ge n \middle| \overline{S}_n = x\right) n P_n(nx)\, dx, \qquad \overline{S}_n = \frac{S_n}{n} .$$

По формуле дифференцирования из последнего равенства находим, что

$$w_a(n,r) = P\left(\tau_a \ge n \,\middle|\, \bar{S}_n = \frac{r + f_a(n)}{n}\right) P_n(r + f_a(n)). \tag{5}$$

Согласно лемме 1

$$P_n(r + f_a(n)) = \frac{1}{A(n)} g_\alpha\left(\frac{r + f_a(n) - n\mu}{A(n)}\right) + o(1/A(n)). \tag{6}$$

Далее, имеем:

$$f_a(n) - n\mu = \mu(N_a - n) - (f_a(N_a) - f_a(n)) = (n - N_a)(f_a'(\nu_a) - \mu),$$

где ν_a -промежуточная точка между точками n и N_a.

В силу (4), из последнего равенства получаем, что

$$f_a(n) - n\mu = \upsilon_a A(N_a)(f_a'(\nu_a) - \mu). \tag{7}$$

Докажем, что $f_a'(\nu_a) \to \theta$ при $a \to \infty$. Действительно, не нарушая общности, можем полагать, что $n \le \nu_a \le N_a$. Тогда из условия 2) относительно границы $f_a(t)$ имеем:

$$\mu = \frac{f_a(N_a)}{N_a} \le \frac{f_a(\nu_a)}{\nu_a} \le \frac{f_a(n)}{n}. \tag{8}$$

Из (4) следует, что $\frac{n}{N_a} \to 1$ при $a \to \infty$. Поэтому из условия 4) относительно границы $f_a(t)$ вытекает, что $\frac{f_a(n)}{n} \to \mu$ при $a \to \infty$. Тогда из (8) следует, что

$$\frac{f_a(\nu_a)}{\nu_a} \to 1 \text{ при } a \to \infty.$$

Таким образом, из условия 3) относительно границы $f_a(t)$ получаем, что $f_a'(\nu_a) \to \theta < \mu$ при $a \to \infty$.

Подставляя (7) в (6) получаем, что

$$P_n(r + f_a(n)) = \frac{1}{A(n)} g_\alpha(-\upsilon\lambda) + o(1/A(n)) \text{ при } n \to \infty. \tag{9}$$

В силу следствия 3.2 из работы [1] имеем

$$P(\tau_a \ge n \mid S_n = r + f_a(n)) \to (\mu - \theta)h(r) \text{ при } a \to \infty. \tag{10}$$

Теперь из (5), (9) и (10) вытекает утверждение теоремы 1.

Замечание 1. Из процесса доказательства теоремы ясно, что ее утверждение выполняется равномерно по $n : |n - N_a| \le cA(N_a)$, где $0 < c < \infty$.

Доказательство теоремы 2. Имеем для $c > 0$

$$h_a(r) = \sum_n \omega_a(n,r) = h_{a,1}(r) + h_{a,2}(r), \tag{11}$$

где

$$h_{a,1}(r)=\sum_{n:|n-N_a|\le c\sqrt{N_a}}\omega_a(n,r),\qquad h_{a,2}(r)=\sum_{n:|n-N_a|>c\sqrt{N_a}}\omega_a(n,r).$$

В силу теоремы 1 и замечания 1 для каждого $c>0$ имеет место

$$h_{a,1}(r)\to h(r)[G_\alpha(\lambda c)-G_\alpha(-\lambda c)] \text{ при } a\to\infty.$$

Отсюда для $c=c(a)\to\infty$ при $a\to\infty$ получаем

$$h_{a,1}(r)\to h(r) \text{ при } a\to\infty. \tag{12}$$

Из леммы 2 следует, что для функции $c=c(a)\to\infty$ при $a\to\infty$

$$\int_0^\infty h_{a,2}(r)dr=P\left(\left|\frac{\tau_a-N_a}{\sqrt{N_a}}\right|>c\right)\to 0. \tag{13}$$

Из (11) имеем:

$$1=\int_0^\infty h_a(r)dr=\int_0^\infty h_{a,1}(r)dr+\int_0^\infty h_{a,2}(r)dr.$$

Отсюда, в силу (13) получаем:

$$\int_0^\infty h_{a,1}(r)dr\to 1=\int_0^\infty h_a(r)dr \quad \text{при } a\to\infty. \tag{14}$$

Согласно лемме 3 из (12) и (14) имеем:

$$\int_0^\infty |h_{a,1}(r)-h(r)|dr\to 0 \text{ при } a\to\infty.$$

Тогда из (11) , (13) и из следующей оценки

$$\int_0^\infty |h_a(r)-h(r)|dr\le\int_0^\infty |h_{a,1}(r)-h(r)|dr+\int_0^\infty h_{a,2}(r)dr$$

получаем утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Для каждого $c>0$ можно написать

$$A(n)P(\tau_a=n)=J_{c,1}(a,n)+J_{c,2}(a,n), \tag{15}$$

где

$$J_{c,1}=A(n)\int_0^c w_a(n,r)dr$$

и

$$J_{c,2}(a,n)=A(n)\int_c^\infty w_a(n,r)dr.$$

В силу теоремы о можарируемой сходимости из утверждения теоремы 1 получаем, что для каждого $c>0$

$$J_{c,1}(a,n)\to H(c)\lambda g_\alpha(-\lambda\upsilon) \text{ при } a\to\infty. \tag{16}$$

Докажем, что $J_{c,2}(a,n)\to 0$ при $c=c(a)\to\infty$ и $a\to\infty$.

Имеем для $c>0$:

$$\begin{aligned} J_{c,2}(a,n) &= A(n)P(\tau_a=n,\chi_n>c)=A(n)P(\tau_a\ge n,\chi_n>c)\le \\ &\le A(n)P(S_{n-1}\le f_a(n-1),S_n>c+f_a(n))= \\ &= A(n)P(c-\xi_n+f_a(n)<S_{n-1}\le f_a(n-1),\ \xi_n>c)+ \\ &+ A(n)P(c-\xi_n+f_a(n)<S_{n-1}\le f_a(n-1),\ \xi_n\le c). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь в неравенстве учтено, что событие $\{\tau_a\ge n\}$ влечет за собой событие $\{S_{n-1}\le f_a(n-1)\}$. В силу монотонности границы $f_a(t)$ второй член в последнем равенстве (17) равен нулю и, поэтому

$$\begin{aligned} J_{c,2}(a,n) &\le A(n)P(c-\xi_n+f_a(n)<S_{n-1}\le f_a(n-1),\ \xi_n>c)= \\ &= A(n)\int_c^\infty P(c+f_a(n)-x<S_{n-1}\le f_a(n-1))dF(x), \end{aligned} \tag{18}$$

где $F(x)=P(\xi_1\le x)$ и учтено, что случайная величина ξ_1 не зависит от суммы S_{n-1}.

Согласно лемме 1 и в силу ограниченности $g_\alpha(x)$ имеет место:

$$\begin{aligned} &A(n)P(c+f_a(n)-x<S_{n-1}\le f_a(n-1))\le \\ &\le A(n)P(c-x+f_a(n)<S_{n-1}\le f_a(n))\le M(x-c)<Mx, \end{aligned}$$

где $M>0$ некоторая константа.

Из (18) вытекает, что

$$J_{c,2}(a,n)\le M\int_c^\infty xdF(x).$$

Отсюда, в силу того, что $E|\xi_1|<\infty$ имеем

$$J_{c,2}(a,n)\to 0 \text{ при } c\to\infty.$$

Теперь, из (15) и (16) при $c\to\infty$ ($H(c)\to 1$) получаем утверждение теоремы 3.

Отметим, что утверждение следствия, в силу теорем 1 и 3, вытекает из следующего равенства

$$h_r(r|n)=\frac{w_a(n,r)}{P(\tau_a=n)}.$$

Замечание. Из следствия и известной теоремы Шеффе ([3], [10]) вытекает, что условное распределение перескока χ_a при условии, что $\tau_a=n$, сильно сходится к безусловному предельному распределению

$H(r)=\int_0^r h(r)dr$. Это значит, что хорошо известное свойство асимптотической независимости величин χ_a и τ_a при $a \to \infty$ ($[10]$) сохраняется и для сильной сходимости вероятностных мер ($[3]$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev S., Hashimova T. Asymptotic behavior of the conditional probability of the nonlinear boundary crossing by a random walk// Theory of Stoch. process, 2010, 16 (32), №1, p. 12-17.
2. Aliev S., Rahimov F., Navidi M.M. On asymptotic behavior of conditional probability of crossing the nonlinear boundary by a perturbed random walk // Theory stoch. process, 2011, 17 (33), №1, p. 5-11.
3. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 484 с.
4. Gut A. Stopped Random Walks. Limit theorems and applications. Springer, 1988, 200 p.
5. Новиков А.А. О времени пересечения односторонней нелинейной границы суммами независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1982, т. XXVII, № 4, с. 643-656.
6. Rahimov F.G., Gashimova T.E., Navidi M.M. On asymptotic behavior of local probability of linear boundary crossing by perturbed random walk // Transaction of NAS of Azerb., 2011, v. XXXI, №1, p. 107-116.
7. Рагимов Ф.Г. Интегральные предельные теоремы для времени пересечения нелинейных границ суммами независимых величин // Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, с. 158-161.
8. Рагимов Ф.Г. Предельные теоремы для нелинейных граничных функционалов возмущенного случайного блуждания и их приложения в статистическом последовательном анализе. Дисс.док.физ-мат.наук, Баку, 2008, 249 с.
9. Ибрагимов К.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
10. Woodroofe M. Nonlinear renewal theory in sequential analysis. SIAM, 1982, 119 p.
11. Zhang C.H. A nonlinear renewal theory//Ann. Probab. 1988, v. 16, № 2, p. 793-824.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения М.: Мир, 1984, 751 с.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики – Грант № EİB-2011-1(3)-82/30/1.

TƏSADÜFİ DOLAŞMANIN QEYRİ-XƏTTİ SƏRHƏDDƏN BİRİNCİ DƏFƏ KƏNARA ÇIXMA ANININ VƏ EKSSESSASININ BİRGƏ PAYLANMA SIXLIĞININ ASİMPTOTİKASI

F.H.RƏHİMOV , M.M.NAVİDİ

XÜLASƏ

İşdə təsadüfi dolaşmanın qeyri-xətti sərhəddən birinci dəfə kənara çıxma anının və ekssessasının birgə paylanmasının sıxlığının asimptotikası haqqında teorem isbat edilmişdir. Bu teoremin köməyilə ekssessanın marginal və şərti sıxlığının limiti öyrənilmiş və həmçinin birinci dəfə kənara çıxma anı üçün lokal limit teoremi isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: Təsadüfi dolaşma, birinci dəfə kənara çıxma anı, ekssessa, paylanmanın sıxlığı.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF DENSITY OF JOINT DISTRIBUTION OF FIRST PASSAGE TIME AND OVERSHOOT OF RANDOM WALK FOR NONLINEAR BOUNDARY

F.H.RAHIMOV, M.M.NAVIDI

SUMMARY

In the work the theorem on the asymptotic behavior of density of joint distribution of first passage time and overshoot of random walk for nonlinear boundary is proved. By using the theorem, the limit behavior of marginal and conditional density of overshoot is studied. The local limit theorem for first passage time of random walk for nonlinear boundary is proved as well.

Key words: Random walk, first passage time, overshoot, density of distribution.

Поступила в редакцию: 16.12.2011 г.
Принято к печати: 05.03.2012 г.