

УДК 524.7

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ МОДЕЛЕЙ ХАОТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г.Т.АРАЗОВ, А.Г.НОВРУЗОВ

Бакинский Государственный Университет

НИИ Прикладной Математики

arazov_h@yahoo.com

В работе рассматриваются неуловимые хаосы в динамических системах, связанные с точностями малых величин порядка значений погрешностей различных возмущений, т.е. с неуловимыми неопределенностями вариаций возмущений (оценок погрешностей измерений и наблюдений). На примерах оценок точности методов Эйлера и Рунге-Кутты; величин гравитационного постоянного G и элементов орбиты V спутника Юпитера показаны, что их эволюции со временем связаны с неуловимыми эволюциями распределения масс и энергии, как в центральном теле, так и в близлежащем пространстве. Иначе говоря, суммы бесконечно малых неуловимых возмущений, за бесконечно большие промежутки времени, являются источниками неуловимых изменений в динамических системах.

Ключевые слова: неуловимые погрешности, эволюция суммы неуловимых возмущений.

Известно, что нелинейные динамические процессы могут быть представлены системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(\frac{dx}{dt}, f(x)\right) + g(t)$$

где $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $t_i \in [t_i, t_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$); $F\left(\frac{dx}{dt}, f(x)\right)$ представляет сумма возмущений, которая допускает моделирование, т.е. получить решения задачи, в замкнутом виде; и $g(t)$ сумма, как правило, бесконечно малых возмущений, которая является причиной различных хаосов в динамических процессах. В частности, таковыми являются динамические процессы: землетрясения, извержения вулканов, ..., и самые сложные хаотические динамические процессы происходят в мозгу живых существ, которые обеспечивают их существования. При предопределениях решений

динамических процессов особое значение имеют следующие величины: 1) точность используемой численной схемы, т.е. точность аппроксимации первого приближения; 2) точность используемых начальных данных; 3) точность используемых параметров, т.е. характеристических показателей задачи; 4) точность используемых ограничений; 5) точность эволюции этих величин со временем. Таковы основные составляющие суммы неуловимых бесконечно малых неопределенностей. Известные закономерности природы верны только с точностью тех статистических данных и методов их определения, которыми использованы при их установлении. Из года в год они уточняются. Одновременно уточняются и им соответствующие теории [1-17]. Поэтому численные и аналитические схемы моделей, которые допускают учет различных аппроксимаций и эволюций возмущений всевозможных ограничений очень ценны. Однако, в соответствии выше указанным причинам решения модельных задач всегда заметно отличаются от решений реально наблюдаемых проблем.

При исследовании природных явлений, часто пользуются методами Эйлера, Рунге-Кутта и т.д. Первый из них отличается простотой, а остальные высокой точностью вычислений.

Суть метода Эйлера заключается в определении решения дифференциального уравнения типа:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad (t > 0); \quad u(0) = 0 \quad (1)$$

в виде

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t u' + \frac{(\Delta t)^2}{2!} u'' + \frac{(\Delta t)^3}{3!} u''' + \dots = u(t) + \Delta t f + O(\Delta t^2). \quad (2)$$

Оно представляет решение уравнения (1) с точностью первого порядка относительно Δt . Тейлеровое разложение в ряды допускает исключение членов с Δt^3 или членов более высокого порядка. Таким образом, легко получить выражение и метода Рунге-Кутта с точностью второго порядка относительно Δt :

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t f + \frac{\Delta t^2}{2!} f' + O(\Delta t^3) = u(t) + \Delta t \left\{ f + \frac{\Delta t}{2} (f_t + f f_u) \right\} + O(\Delta t^3). \quad (3)$$

Аналогично, формула метода Рунге-Кутта с точностью Δt^4 может быть представлена выражением:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \frac{\Delta t}{6} (s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \quad (4)$$

$$\text{где } s_1 = f(t, u), \quad s_2 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, u + s_1 \frac{\Delta t}{2}\right),$$

$$s_3 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, u + s_2 \frac{\Delta t}{2}\right), \quad s_4 = f(t + \Delta t, u + s_3 \Delta t).$$

Заметим, что эллиптическое движение, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω тела, может быть представлено равенствами:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t. \quad (5)$$

Дифференциальные уравнения этого движения имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a\omega \sin \omega t = -\frac{a}{b} \omega y, \\ \frac{dy}{dt} &= b\omega \cos \omega t = -\frac{b}{a} \omega x. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

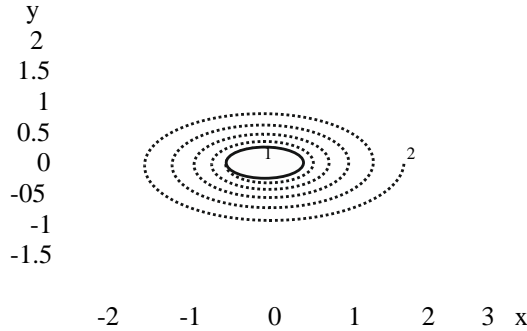


Рис.1. Качественное поведение вариации орбит: 1-эллиптическое движение с постоянной угловой скоростью вычисленной методом Эйлера.
2- орбита вычисленная методом Рунге – Кутта.

Допуская [1;15], $a = 1, b = 0,6$ в случае, когда угловая скорость вращения тела в орбите $\omega = 2\pi$; используя шаг интегрирования равным 0,01, применяя методы Эйлера и Рунге – Кутта полученные геометрические изображения решений уравнений (6) показаны на рис.1.

Наблюдаемые, промежуточные и Эйлеровы орбиты находятся внутри спиралей 1, 2 и 3. Они представлены на рис.2. Существуют многочисленные методы вычисления промежуточных орбит. Они находятся между орбитами, вычисленными по формулам Кеплера и реальными - наблюдаемыми траекториями. Методы Винты, Кислика, Аксенова, Гребенникова, Демина и т.д. являются таковыми [16,17]. Они отличаются друг от друга как по точности определения орбит, так и по компактности решений.

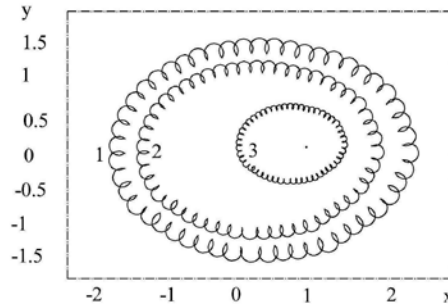


Рис. 2. Эволюции: реальных- наблюдаемых, промежуточных и эйлеровых орбит находятся внутри спиралей 1,2 и 3, соответственно.

Эволюция логарифмических погрешностей этих решений дана на рис. 3. Эволюция погрешностей оценивается следующим образом. Рис.3 представляет изменения логарифма погрешностей со временем, и их возможные влияния на оценки состояний системы (6).

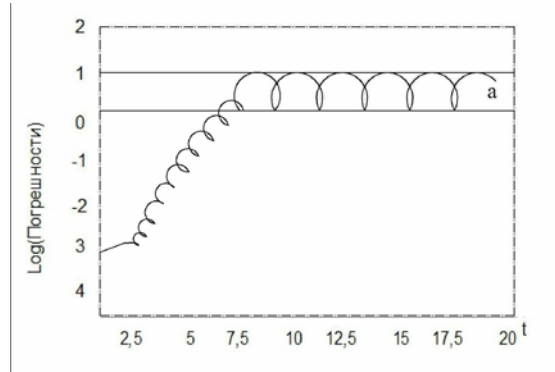


Рис.3. Качественное поведение неуправляемых возмущений орбит: погрешности наблюдаемых и промежуточных орбит, оставаясь внутри спирали а, вносят хаотичность в динамику орбит.

Образование, рождения, движения и эволюция импульсивных (мгновенно возмущающих - остро чувствительных) хаотических динамических процессов, типа извержения вулканов, оползни, землетрясения, и т.д., могут быть представлены системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t+1) = f(t, x(t)), \quad (7)$$

где $t \in J = (t_0, +\infty)$ ($t_0 \geq 0$), $x \in R^n$ являются переменными положений, $f : J \times R^n \rightarrow R^n$, мгновенные значения непрерывной вектор функции.

Чувствительность системы (7), в частности, может быть представлена формулой.

$$\dot{x}_{k+1} = \{t_k, u_k(x(t_k))\}. \quad (8)$$

Она представляет эффекты мгновенных изменений положений рассматриваемой системы в моменты

t_k , где $t_1 < t_2, \dots, t_k < \dots, \lim t_k = \infty$ и $t_1 > t_0$, так что

$$u_k(x(t_k)) = \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-) \quad (9)$$

где $x(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}} x(t)$, $x(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_{k-1}} x(t)$.

Мгновенные возмущения ценны тем, что они могут превратить нестабильные, неустойчивые хаотические динамические системы в стабильные управляемые устойчивые системы, которые не могут быть сведены к линейным устойчивым системам обще известными методами.

Оценки вариаций погрешностей констант хаотических динамических систем в природе очень ценны. К таким величинам относится и погрешности изменения значений постоянной гравитации G . Им соответствующие значения отношений \dot{G}/G приведены в таблице 1. Она составлена используя данные в работе Havard B. Sandvik [3]. Они свидетельствуют о вариациях ограниченностей распределения масс и энергии со временем, в системах в которых они определены

Таблица 1

	$\dot{G}/G \cdot 10^{12}$	Источник
1	2 ± 4	R.W.Hellings, et. al., Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 1609
2	$(1.0 \pm 2.3)10^1$	T.Damour, et. al., Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 1152
3	0.1 ± 10.4	J. Muller, et.al., Astrophys.J. 382 (1991) L 101
4	$4 \pm 5; -9 \pm 18$	V.M.Kaspi, et.al. Astrophys. J. 428 (1994) 713
5	1 ± 8	J.G.Williams, et.al., Phys. D 53 (1996) 6730
6	0.6 ± 2.0	S.E. Thorsett, Phys. Rev. Lett., 77 (1996) 14 321435

Одним из таких примеров является и V спутник Юпитера. Этот спутник будучи самым близким к центральному телу ($r/a = 2,5$ где r - экваториальный радиус Юпитера, a - большая полуось орбиты V спутника) подвергается к самым сильным возмущениям в Солнечной системе. Значительность погрешностей возмущений многих исследователей наводили на мысль об искусственности этого спутника. Наблюдаемые пределы изменения координат V спутника ξ и η равны [11]:

$$-59^0,66 \leq \xi_0 \leq 60^0,65; [n_\xi = 1096; (t - t_0)_\xi = 8428,88660 \text{ Ю.Д.}] \quad (10)$$

$$-02^0,46 \leq \eta_0 \leq 02^0,37; [n_\eta = 0123; (t - t_0)_\eta = 9635.95966 \text{ Ю.Д.}], \quad (11)$$

где ξ_0 - наблюдаемое иовицентрическое угловое расстояние от центра Юпитера до V спутника, η_0 - наблюдаемое иовицентрическое угловое расстояние от экваториальной плоскости Юпитера до V спутника; в

скобках указаны число наблюдений n_ξ и n_η . Нами использованы результаты наблюдений Э.Барнарда, Г.Струве и В.Вуркома [14]. Они охватывают, соответственно, интервалы времени $(t-t_0)_\xi$ и $(t-t_0)_\eta$, в юлианских днях.

Оценки разностей:

$$-0,022 \leq \xi_0 - \xi_c \leq 0,81; \quad (12)$$

$$-0,61 \leq \eta_0 - \eta_c \leq 0,53; \quad (13)$$

где ξ_c и η_c результаты вычислений, соответствующих к моментам наблюдаемым значениям координат спутника (10) и (11), на базе формул математической модели задачи многих активно гравитирующих центров [11]. Оценки разностей (12) и (13) соответствуют к погрешностям наблюдаемых значений координат ξ и η .

Заключение. Рассмотрены неуловимые погрешности возмущений в хаотических динамических системах. Они зависят от точности методов исследования, от точности величин начальных данных, а так же и от точности погрешностей измерений и наблюдений. Показано, что отбрасываемые члены при аппроксимациях, в различных моделях [1-17], в рядах всегда меньше оценок точности используемых начальных данных, от оценок точности параметров модели, а также и от оценок точности определения погрешностей граничных ограниченностей. Все они определяются распределением масс и энергии в динамической системе, все элементы которой все время находятся в движении, т.е. в процессе эволюции. Эволюция чувствительности к погрешностям возмущений привлекательны, тем, что они, оставаясь в определенных пределах изменения неуловимых сумм малых возмущений, могут внести хаотичность в природу многих наблюдаемых процессов и управляют многими природными процессами. В качестве примеров оценок неуловимых вариаций рассмотрены точности методов Эйлера и Рунге-Кутты, величин гравитационного постоянного G и элементов орбиты V спутника Юпитера. Показаны, что их эволюции со временем связаны с изменениями распределения масс и энергии как в центральном теле, так и в близлежащем пространстве. Иначе говоря, суммы бесконечно малых неуловимых возмущений, за бесконечно большие промежутки времени, являются источниками заметных изменений в динамических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Takeshi Yanagino and Shinnosuke Oharu. Sensitivity of Numerical Schemes for Lorenz Systems / Advances in Mathematical Sciences and Applications, v. 18, № 2, 2008, p. 675-707.
2. Аразов Г.Т., Ганиева С.А., Новрузов А.Г. Эволюция внешней формы и внутренней структуры Земли. Баку: Элм, 2006, 193 с.

3. Havard B. Sandvik. Constants of Nature / Novello, Marrio (ed) et al., The tenth Marcel Grossmann meeting. Rio de Janeiro, Brazil, 20-26 July 2003, 3 vols. Hackenack, N.J: World Scientific, 2006, p.258-277.
4. Alejo B. Blaya, Victor J. Lopez. The Smallest Amount of Chaos // Rocky mountain Journal of Mathematics, 2010, v. 40, №1, p. 27-49.
5. Benest D., Froeschle C., Lega E., Hamiltonian systems and Fourier analysis, New prospects for gravitational dynamics. Advances in Astronomy and Astrophysics. Cambridge Scientific Publishers. 2005, 308 p.
6. Arazov G.T. By variations of the elements in mathematical models of the dynamical systems. / The 4th Congress of the Turcic World Mathematical Society (TWMS) Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011, p. 421.
7. Kening Lu., Qiudong Wang. Chaos in differential equations driven by a nonautonomous force // Nonlinearity 23, 2010, p.2935-2975.
8. Аразов Г.Т., Новрузов А.Г. О структуре геодинимической модели Земли. / N.Tusi and Modern Astronomy, p. 177-182 (2002).
9. Аразов Г.Т., Новрузов А.Г. Формулы выражающие изменения параметров сжимающейся геодинимической модели Земли / Труды межд. Научной конф. «Исследование Солнечной системы», 2004, 114-117 .
10. Аразов Г.Т., Новрузов А.Г. О связях динамической системы Якоби с геодинимическими моделями Ю.Баркина и С.Кери // НАН Азербайджана, Циркуляр ШАО, №109, 2005, p. 16-20.
11. Аразов Г.Т. Аналитическая теория движения пятого спутника Юпитера // Известия АН Аз. ССР Сер. физ. – тех. и мат. Наук 1972, № 2, с. 75-81.
12. Ueoka Y., Suzuki T., Yamamoto S. Analysis on the efficiency of statistical measures to identify network structure of chaos coupled systems // International Journal of Modern Physics C. v.21, № 8, 2010, p.1065-1079.
13. Brown R and Jain V.A new approach to chaos // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems series A: Math. Analysis 16, 2009, p. 863-890.
14. Van Woerkom A.J. Astron. Papers, Prepared for the use of the American ephemeris and nautical Almanac, v. XIII, 1950. 250 p.
15. Аразов Г.Т., Новрузов А.Г., Фарханг Ю.Б. Об эволюции чувствительности численных схем моделей нелинейных хаотических динамических систем / Bakı Dövlət Universiteti Fizika problemləri institutu, Fizikanın Müasir Problemləri V Respublika Konfransı, Materiallar 16-17 dekabr, Bakı, 2011, с.232-237.
16. Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Недра, 1968, 352 с.
17. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977, 360 с.

XAOTİK DİNAMİKİ SİSTEM TƏKAMÜLÜNÜN HƏSSASLIĞI

H.T.ARAZOV, A.H.NOVRUZOV

XÜLASƏ

İşdə dinamik sistemlərdə sonsuz kiçik sarsınmaları cəminin təkamüllərinin həssaslıqları öyrənilir. Onlar - baxılan sistemlərin başlanğıc şərtlərinin, onların xarakteristik göstəricilərinin, sistemlərə qoyulan məhdudiyətlərin, istifadə olunan metodların və nəhayət, müşahidə nəticələrinin dəqiqliklərindən asılıdırlar. Müqayisəli analizlər: Eyler, Runge-Kutt və aralıq

orbitlərin hesablaşma metodları; cazibə sabitinin müxtəlif müəlliflər tərəfindən tapılmış qiymətlər və Yupiterin V peyk elementlərinin təkamülləri üçün aparılmışdır.

Açar sözlər: Kiçik sarsınmalar, sarsınma xətalari cəminin təkamülü

EVOLUTION OF THE SENSITIVITY OF NUMERICAL SCHEMES OF CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS

H.T.ARAZOV, A.H.NOVRUZOV

SUMMARY

In this paper the smallest amount of chaos in dynamical systems is analyzed. They are connected to the accuracies of definition of perturbations in the chaotic dynamical system. Firstly, it involves the accuracy of the initial values, secondly, the accuracy of parameters of the system and thirdly, the accuracy of boundary constraints of values. Comparative analysis of the accuracy of Euler and Runge-Kutta methods has been considered as an example. Experimental and observational constraints of the gravitational constant and the accuracy in the motion of V satellite of Jupiter have also been studied.

Key words: Small perturbations, the smallest amount of chaos.

Поступила в редакцию: 27.11.2011 г.

Принята к печати: 05.03.2012 г.