BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2012*

УДК 517.95

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА - ГОРДОНА

М.А.КУЛИЕВ, А.М.ЭЛ-ХАДИДИ
Бакинский Государственный Университет
guliyevm.43@mail.ru, mahsoup79@yahoo.com

Рассматривается вопрос разрешимости многомерных обратных краевых задач для уравнений Клейна-Гордона. Предлагается метод, с помощью которого обратная краевая задача сводится к некоторым нелинейным бесконечным системам дифференциальных уравнений и доказывается теорема о существовании и единственности решений многомерных обратных краевых задач в классах функций конечной гладкости.

Ключевые слова: обратная краевая задача, существование и единственность, система уравнений.

Отметим, что уравнение, которое рассмотрено в статье, называется уравнением Клейна-Гордона. Это релятивистическое инвариантное квантовое уравнение, описывающее бесспиновые скалярные или псевдоскалярные частицы: играет роль одного из фундаментальных уравнений квантовой теории поля. Предполагается, что неизвестные коэффициенты зависят от аргумента x. А именно, в области $D_T = \overline{\Omega} \times [0,T]$ рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} - A\big(U(x,t)\big) = a(x)U(x,t) + b(x)V(x,t) + f(x,t) \ , \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} - A\big(V(x,t)\big) = a_1(x)U(x,t) + b_1(x)V(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in D_T \ , \tag{2}$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad U_t(x,0) = 0, \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

$$V(x,0) = \psi(x), \quad V_t(x,0) = 0, \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$U(x',t) = F(x',t), \ V(x',t) = G(x',t), \quad (x',t) \in \Gamma = S \times [0,T] \ , \tag{5}$$

$$U(x,T) = h(x), \quad V(x,T) = q(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{6}$$

$$U_t(x,T) = 0, \quad V_t(x,T) = 0, \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{7}$$

где Ω - ограниченная область в R^n, $S=\partial\Omega\in C^2$, $n\le 3$,

$$A(U(x,t))=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)U_{x_i}(x,t))_{x_j}, \qquad a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in C^4(\overline{\Omega}),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\mu|\xi|^2,\ \mu>0,\ \varphi(x),\ \psi(x),\ f(x,t),\ g(x,t),$$

$$F(x,t),\ G(x,t),\ h(x),\ q(x)\ -$$

заданные, а $a(x),\ b(x),\ a_1(x),\ b_1(x),\ U(x,t),\ V(x,t)$ - искомые функции.

Определение. Систему $\{U(x,t),\ V(x,t),\ a(x),\ b(x),\ a_1(x),\ b_1(x)\}$ назовем решением задачи (1)-(7), если они удовлетворяют следующим условиям:

1.Функции $a(x),\ b(x),\ a_1(x), b_1(x)\in W_2^2(\Omega)$.

2.Функции $U(x,t)$, и $V(x,t)$ непрерывны в замкнутой области D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнения (1) и (2).

3. Условия (1)-(7) удовлетворяются в обычном смысле.

Предположим, что оператор A и функции $\varphi(x),\ \psi(x),\ f(x,t),\ g(x,t),F(x,t),\ G(x,t),\ h(x),\ q(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $\forall U\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\bigcap W_2^2(\Omega)$

$$\int_\Omega|A(U(x,t))|^2dx\ge\mu_1\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n}U_{x_1x_j}^2(x,t)+U^2(x,t)\right]dx, \qquad \mu_1>0$$

2. $f(x,t),\ g(x,t),\ D_t^6f(x,t),\ D_t^6g(x,t)\in L^2((0,T);\ W_2^2(\Omega))$,

$f(x,T),\ g(x,T),\in W_2^2(\Omega),\ D_t^kf(x,t)\big|_{t=0}=D_t^kf(x,t)\big|_{t=T}=0,$

$D_t^kg(x,t)\big|_{t=0}=D_t^kg(x,t)\big|_{t=T}=0,\quad (k=1,3,5)$.

3. $F(x,t),G(x,t),\ D_t^8F(x,t),\ D_t^8G(x,t)\in L^2((0,T);\ W_2^{7/2}(S))$,

$D_t^kF(x,t)\big|_{t=0}=D_t^kF(x,t)\big|_{t=T}=0,\quad D_t^kG(x,t)\big|_{t=0}=D_t^kG(x,t)\big|_{t=T}=0$

$(k=1,3,5,7)$;

4. $\varphi(x),\psi(x)\in W_2^4(\Omega),\quad A(Ah(x)),\ A(Ag(x))\in L_2(\Omega)$,

$\forall x\in\Omega\quad \varphi(x)\ne\psi(x),\quad h(x)\ne q(x)$;

$F(x,t)\big|_{t=o}=\varphi(x)\big|_S,\ G(x,t)\big|_{t=o}=\psi(x)\big|_S,\ F(x,t)\big|_{t=T}=h(x)\big|_S,$

$G(x,t)\big|_{t=T}=q(x)\big|_S$

5. $|\Delta(x)|=|\varphi(x)q(x)-\psi(x)h(x)|\ge\delta>0$.

Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть $\{U(x,t), V(x,t), a(x), b(x), a_1(x), b_1(x)\}$ - любое решение обратной задачи (1)-(7). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$a(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\left\{q(x)U_{tt}(x,t)\Big|_{t=0}-\psi(x)U_{tt}(x,t)\Big|_{t=T}+\Phi_0(x)\right\},$$

$$b(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\left\{\varphi(x)U_{tt}(x,t)\Big|_{t=T}-h(x)U_{tt}(x,t)\Big|_{t=0}+\Phi_1(x)\right\},$$

$$a_1(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\left\{q(x)V_{tt}(x,t)\Big|_{t=0}-\psi(x)V_{tt}(x,t)\Big|_{t=T}+\Phi_2(x)\right\},$$

$$b_1(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\left\{\varphi(x)V_{tt}(x,t)\Big|_{t=T}-h(x)V_{tt}(x,t)\Big|_{t=0}+\Phi_3(x)\right\},$$

где

$$\Phi_0(x)=\left(-A\varphi(x)-f(x,o)\right)q(x)+\left(Ah(x)+f(x,T)\right)\psi(x),$$
$$\Phi_1(x)=\left(A\varphi(x)+f(x,o)\right)h(x)-\varphi(x)\left(Ah(x)+f(x,T)\right),$$
$$\Phi_2(x)=\left(Aq(x)+g(x,T)\right)\psi(x)-q(x)\left(A\psi(x)+g(x,0)\right),$$
$$\Phi_3(x)=h(x)\left(A\psi(x)+g(x,o)\right)-\varphi(x)\left(Aq(x)+g(x,T)\right).$$

Доказательство леммы 1 следует из (1)-(7).

Лемма 2. Если функции $\tilde{U}_k(x), \tilde{V}_k(x),\ (k=0,1,2,,,)$ являются решениями в области Ω задач

$$-\lambda_k^2\tilde{U}_k(x)-A\tilde{U}_k(x)=\frac{\tilde{U}_k(x)}{\Delta(x)}\left\{-q(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2\tilde{U}_m(x)+\psi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2\tilde{U}_m(x)+\right.$$
$$\left.+\Phi_0(x)\right\}+\frac{\tilde{V}_k(x)}{\Delta(x)}\left\{-\varphi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2\tilde{U}_m(x)+h(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2\tilde{U}_m(x)+\Phi_1(x)\right\}+f_k(x),$$

$$-\lambda_k^2\tilde{V}_k(x)-A\tilde{V}_k(x)=\frac{\tilde{U}_k(x)}{\Delta(x)}\left\{-q(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2\tilde{V}_m(x)+\psi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2\tilde{V}_m(x)+\right.$$
$$\left.+\Phi_2(x)\right\}+\frac{\tilde{V}_k(x)}{\Delta(x)}\left\{-\varphi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m\tilde{V}_m(x)+h(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2\tilde{V}_m(x)+\Phi_3(x)\right\}+g_k(x)\quad(8)$$

$$\tilde{U}_k(x)\Big|_S=F_k(x),\quad \tilde{V}_k(x)\Big|_S=G_k(x),\quad (k=0,1,2,...)\qquad(9)$$

из класса

$$\sum_{m=0}^{\infty}\int_\Omega\lambda_m^{12}\left|\tilde{U}_m(x)\right|^2dx+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^{12}\int_\Omega\left|\tilde{V}_m(x)\right|^2dx+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^8\int_\Omega\left[A\tilde{U}_m(x)\right]^2dx+$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^8\int_\Omega\left[A\tilde{V}_m(x)\right]^2dx+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^6\left\|A\tilde{U}_m(x)\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^6\left\|A\tilde{V}_m(x)\right\|^2_{W_2^1(\Omega)}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2\left\|A\left(A\widetilde{U}_m(x)\right)\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2\left\|A\left(A\widetilde{V}_m(x)\right)\right\|_{L_2(\Omega)}^2<+\infty, \qquad (10)$$

то функции

$$\widetilde{U}(x,t)=\sum_{k=o}^{\infty}\widetilde{U}_k(x)\cos\lambda_k t, \qquad \widetilde{V}(x,t)=\sum_{k=o}^{\infty}\widetilde{V}_k(x)\cos\lambda_k t,$$

$$a(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\left\{-q(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^2\widetilde{U}_k(x)+\psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k^2\widetilde{U}_k(x)+\Phi_0(x)\right\},$$

$$b(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\left\{-\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k^2\widetilde{U}_k(x)+h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^2\widetilde{U}_k(x)+\Phi_1(x)\right\},$$

$$a_1(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\left\{-q(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^2\widetilde{V}_k(x)+\psi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k^2\widetilde{V}_k(x)+\Phi_2(x)\right\},$$

$$b_1(x)=\frac{1}{\Delta(x)}\left\{-\varphi(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lambda_k^2\widetilde{V}_k(x)+h(x)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^2\widetilde{V}_k(x)+\Phi_3(x)\right\}$$

являются решением обратной задачи (1)-(7), где $\lambda_k=\dfrac{k\pi}{T}$,

$$f_k(x)=\frac{2}{T}\int_0^T f(x,t)\cos\lambda_k t dt, \qquad g_k(x)=\frac{2}{T}\int_0^T g(x,t)\cos\lambda_k t dt,$$

$$F_k(x)=\frac{2}{T}\int_0^T F(x,t)\cos\lambda_k t dt,$$

$$G_k(x)=\frac{2}{T}\int_0^T G(x,t)\cos\lambda_k t dt, \quad (k=0,1,2,....).$$

Доказательство. Из (8)-(10) следует (1), (2), (5) и

$$\widetilde{U}_t(x,t)\Big|_{t=0}=0,\ \ \widetilde{U}_t(x,t)\Big|_{t=T}=0,\ \ \widetilde{V}_t(x,t)\Big|_{t=0}=0\ \ \ \widetilde{V}_t(x,t)\Big|_{t=T}=0.$$

Поэтому, чтобы доказать лемму 2, требуется установить, что

$$\widetilde{U}_t(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x)\ \ \ \widetilde{U}_t(x,t)\Big|_{t=T}=h(x),\ \ \widetilde{V}_t(x,t)\Big|_{t=0}=\psi(x)\ \ \ \widetilde{V}_t(x,t)\Big|_{t=T}=q(x).$$

Пусть $\widetilde{U}_t(x,t)\Big|_{t=0}=\widetilde{\varphi}(x)$, $\widetilde{V}_t(x,t)\Big|_{t=0}=\widetilde{\psi}(x)$. Тогда для функции $\widetilde{\varphi}(x)-\varphi(x)=Z(x)$, $\widetilde{\psi}(x)-\psi(x)=\widetilde{Z}(x)$ из (8), (9) имеем

$$AZ(x)=\frac{Z(x)}{\Delta(x)}\left\{\psi(x)U_{tt}(x,t)\Big|_{t=T}-q(x)U_{tt}(x,t)\Big|_{t=0}-\Phi_0(x)\right\}+$$

$$+\frac{\widetilde{Z}(x)}{\Delta(x)}\left\{h(x)U_{tt}(x,t)\Big|_{t=0}-\varphi(x)U_{tt}(x,t)\Big|_{t=T}-\Phi_1(x)\right\},$$

$$A\widetilde{Z}(x)=\frac{Z(x)}{\Delta(x)}\left\{\psi(x)V_{tt}(x,t)\Big|_{t=T}-q(x)V_{tt}(x,t)\Big|_{t=0}-\Phi_2(x)\right\}+ \qquad (11)$$

$$+\frac{\widetilde{Z}(x)}{\Delta(x)}\left\{h(x)V_{tt}(x,t)\big|_{t=0}-\varphi(x)V_{tt}(x,t)\big|_{t=T}-\Phi_3(x)\right\}$$

$$Z(x)\big|_S=0,\qquad \widetilde{Z}(x)\big|_S=0. \tag{12}$$

Единственность решения задачи (11), (12) мы установим ниже, после того, как докажем разрешимость задачи (8), (9).

Аналогично будет показываться, что $U(x,t)\big|_{t=T}=h(x),\ \ V(x,t)\big|_{t=T}=q(x).$
Исследуем разрешимость задачи (8), (9).

Определим функции $r_k(x)$ и $æ_k(x)$ $(k=0,1,2....)$ как решения, соответственно, следующих задач:

$$A\,r_k(x)=0,\ r_k(x)\big|_S=F_k(x)\ \ (k=0,1,2...),\ \|r_k(x)\|^2_{C(\overline{\Omega})}\le C_1\|F_k(x)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}, \tag{13}$$

$$A\,\boldsymbol{æ}_k(x)=0,\ \boldsymbol{æ}_k(x)\big|_S=G_k(x)\ \ (k=0,1,2...),\ \|æ_k(x)\|^2_{C(\overline{\Omega})}\le C_1\|G_k(x)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}. \tag{14}$$

Обозначим $\widetilde{U}_k(x)=U_k(x)+r_k(x),\quad \widetilde{V}_k(x)=V_k(x)+æ_k(x)$.
Тогда из (8), (9) имеем

$$-\lambda_k^2U_k(x)-AU_k(x)=\frac{U_k(x)+r_k(x)}{\Delta(x)}\left\{-q(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2U_m(x)+\psi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2U_m(x)+\right.$$
$$\left.+\Phi_0(x)-q(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2r_m(x)+\psi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2r_m(x)\right\}+$$
$$+\frac{V_k(x)+æ_k(x)}{\Delta(x)}\left\{-\varphi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2U_m(x)+h(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2U_m(x)+\right.$$
$$\left.+\Phi_1(x)-\varphi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2r_m(x)+h(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2r_m(x)\right\}+f_k(x)+\lambda_k^2r_k(x),$$
$$-\lambda_k^2V_k(x)-AV_k(x)=\frac{U_k(x)+r_k(x)}{\Delta(x)}\left\{-q(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2V_m(x)+\psi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2V_m(x)+\right.$$
$$\left.+\Phi_2(x)-q(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2æ_m(x)+\psi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2æ_m(x)\right\}+\frac{V_k(x)+æ_k(x)}{\Delta(x)}\times$$
$$\times\left\{-\varphi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2V_m(x)+h(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2V_m(x)+\Phi_3(x)-\right.$$
$$\left.-\varphi(x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\lambda_m^2æ_m(x)+h(x)\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m^2æ_m(x)\right\}+g_k(x)+\lambda_k^2æ_k(x), \tag{15}$$

$$U_k(x)\big|_S=0,\quad V_k(x)\big|_S=0\quad (k=0,1,2,...). \tag{16}$$

Обозначим через $Z_l, g_l(x)$ собственные числа и собственные функции следующей задачи

$$Ag_l(x)=-Z_l^2g_l(x),\qquad g_l(x)\big|_S=0. \tag{17}$$

Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что $Z_l \to \infty$, $l \to \infty$ и $g_l(x)$ образуют полную систему в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \bigcap W_2^2(\Omega)$.

Условие I. Пусть T и область Ω таковы, что для любых целых n и l выполнено следующее неравенство:

$$\left| Z_l^2 - \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \right| \geq \frac{C_\circ(\alpha)}{Td} = \delta_1,$$

где $\alpha = diam\Omega$, Z_l - собственные числа задачи (17) (см.[2]).

Лемма 3. Пусть выполнено условие I и

$$\Phi_k(x) \in L_2(\Omega), \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{T}, \quad (k = 1,2,......).$$

Тогда для $\forall k$ существует решение задачи Дирихле

$$Ab_k(x) + \lambda_k^2 b_k(x) = \Phi_k(x), \quad b_k(x)\big|_S = 0,$$

для которого верна оценка

$$\int_\Omega b_k^2(x)dx \leq \frac{1}{\delta_1^2} \int_\Omega \Phi_k^2(x)dx.$$

Теперь исследуем задачу (15), (16). Рассмотрим следующее множество функций:

$$B = \Big\{ \big(U_0(x), U_1(x), ..., U_k(x), ...,\big), \big(V_0(x), V_1(x), ..., V_k(x), ...\big), \ U_k(x)\big|_S = 0,$$

$$V_k(x)\big|_S = 0 \quad (k = 0,1,2,...), \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{12} \|U_k(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|U_0(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq$$

$$\leq \frac{R}{4}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{12} \|V_k(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|V_0(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{R}{4}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{8} \|AU_k(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 +$$

$$+ \|AU_0(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq R, \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{8} \|AV_k(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|AV_0(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq R \Big\}.$$

Покажем, что при подходящем выборе R, задача (15),(16) разрешима в B.

Пусть $\big(\omega_0(x), \omega_1(x), ..., \omega_k(x), ...\big)$, $\big(\tilde{\omega}_0(x), \tilde{\omega}_1(x), ..., \tilde{\omega}_k(x), ...\big)$ - произвольный элементы из B и подставим его в правую часть (15), тогда получим функцию, которая принадлежит пространству $L_2(\Omega)$. Тогда, учитывая лемму 3, имеем:

$$\int_\Omega U_k^2(x)dx \leq \frac{22}{\delta_1^2} \int_\Omega \Bigg[2N_0^2 \omega_k^2(x) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \omega_m(x) \right)^2 + 2N_0^2 \omega_k^2(x) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 r_m(x) \right)^2 +$$

$$+ 2N_0^2 r_k^2(x) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \omega_m(x) \right)^2 + 2r_k^2(x) N_0^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 r_m(x) \right)^2 + \omega_k^2(x) \left(\frac{\Phi_0(x)}{\Delta(x)} \right)^2 +$$

$$+r_k^2(x)\left(\frac{\Phi_0(x)}{\Delta(x)}\right)^2+2N_0^2\tilde{\omega}_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2\omega_m(x)\right)^2+2N_0^2\tilde{\omega}_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 r_m(x)\right)^2+$$

$$+2N_0^2æ_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2\omega_m(x)\right)^2+2N_0^2æ_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 r_m(x)\right)^2+f_k^2(x)+\lambda_k^4 r_k^2(x)+$$

$$\left.+\tilde{\omega}_k^2(x)\left(\frac{\Phi_1(x)}{\Delta(x)}\right)^2+æ_k^2(x)\left(\frac{\Phi_1(x)}{\Delta(x)}\right)^2\right]dx\ , \qquad (18)$$

$$\int_\Omega V_k^2(x)dx\le\frac{22}{\delta_1^2}\int_\Omega\left[2N_0^2\omega_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_k^2\tilde{\omega}_m(x)\right)^2+2N_0^2\omega_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_k^2æ_m(x)\right)^2+\right.$$

$$+2N_0^2r_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2\tilde{\omega}_m(x)\right)^2+2N_0^2r_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2æ_m(x)\right)^2+\omega_k^2(x)\left(\frac{\Phi_2(x)}{\Delta(x)}\right)^2+$$

$$+r_k^2(x)\left(\frac{\Phi_2(x)}{\Delta(x)}\right)^2+2N_0^2\tilde{\omega}_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2\tilde{\omega}_m(x)\right)^2+2N_0^2\tilde{\omega}_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2æ_m(x)\right)^2+$$

$$+2N_0^2æ_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2æ_m(x)\right)^2+2N_0^2æ_k^2(x)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2\tilde{\omega}_m(x)\right)^2+\tilde{\omega}_k^2(x)\left(\frac{\Phi_3(x)}{\Delta(x)}\right)^2+$$

$$\left.+æ_k^2(x)\left(\frac{\Phi_3(x)}{\Delta(x)}\right)^2+g_k^2(x)+\lambda_k^4æ_k^2(x)\right]dx,\quad (k=0,1,2,...)\,, \qquad (19)$$

где $$N_0=\max\left\{\left\|\frac{q(x)}{\Delta(x)}\right\|_{c(\bar{\Omega})},\left\|\frac{\psi(x)}{\Delta(x)}\right\|_{c(\bar{\Omega})},\left\|\frac{\varphi(x)}{\Delta(x)}\right\|_{c(\bar{\Omega})},\left\|\frac{h(x)}{\Delta(x)}\right\|_{c(\bar{\Omega})}\right\}.$$

Из соотношение (19) получаем следующее:

$$\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\lambda}_k^{12}U_k^2(x)dx\le\frac{44N_0^2C_1C_2}{\delta_1^2}\left[\frac{R^2}{2}+L_0R+2L_0^2\right]+\frac{11}{\delta_1^2}KR+\frac{44}{\delta_1^2}KL_0+\frac{44}{\delta_1^2}L_0, \qquad (20)$$

$$\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\lambda}_k^{12}V_k^2(x)dx\le\frac{44N_0^2C_1C_2}{\delta_1^2}\left[\frac{R^2}{2}+L_0R+2L_0^2\right]+\frac{11}{\delta_1^2}KR+\frac{44}{\delta_1^2}KL_0+\frac{44}{\delta_1^2}L_0, \qquad (21)$$

$$\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\lambda}_k^{8}\left|AU_k(x)\right|^2dx\le2\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\lambda}_k^{12}U_k^2(x)dx+44N_0^2C_1C_2\left[\frac{R^2}{2}+L_0R+2L_0^2\right]+$$

$$+11KR+44KL_0+44L_0\,, \qquad (22)$$

$$\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\lambda}_k^{8}\left|AV_k(x)\right|^2dx\le2\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\lambda}_k^{12}V_k^2(x)dx+44N_0^2C_1C_2\left[\frac{R^2}{2}+L_0R+2L_0^2\right]+$$

$$+11KR+44KL_0+44L_0\,, \qquad (23)$$

где $K=\max\left\{\left\|\frac{\Phi_0(x)}{\Delta(x)}\right\|_{c(\overline{\Omega})},\left\|\frac{\Phi_1(x)}{\Delta(x)}\right\|_{c(\overline{\Omega})},\left\|\frac{\Phi_2(x)}{\Delta(x)}\right\|_{c(\overline{\Omega})},\left\|\frac{\Phi_3(x)}{\Delta(x)}\right\|_{c(\overline{\Omega})}\right\}$,

$$\overline{\lambda}_k=\begin{cases}1, & k=0,\\ \lambda_k, & k=1,2,\dots .\end{cases}$$

$$L_0=\frac{2}{T}\int_0^T\left(\|F(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}+\|D_t^8F(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}\right)dt+\frac{2}{T}\int_0^T\left(\|G(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}+\right.$$
$$+\|D_t^8G(x,t)\|^2_{W_2^{7/2}(S)}+\|f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|D_t^6f(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}+$$
$$\left.+\|g(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\|D_t^6g(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right)dt\,.$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия 1-5, I и $\frac{1}{\delta_1^2}\le\frac{22}{35}$,

$$44N_0^2C_1C_2\left[\frac{R}{2}+L_0\right]+11KR=\frac{R}{8},\quad 88N_0^2C_1C_2L_0^2+44KL_0+44L_0\le\frac{3}{11},$$

$$\left(\frac{1}{\delta_1^2}+1\right)\left[204N_0^2C_1C_2\left(\frac{3R}{2}+2L_0\right)+204K(C_1+1)\right]<1.$$

Тогда существует решение задачи (15), (16) из B и

$$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{12}\|U_k(x)\|^2_{L_2(\Omega)}\le\frac{R}{4},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{12}\|V_k(x)\|^2_{L_2(\Omega)}\le\frac{R}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}^8\|AU_k(x)\|^2_{L_2(\Omega)}\le R,\quad ,\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}^8\|AV_k(x)\|^2_{L_2(\Omega)}\le R.$$

Доказательство. Запишем систему (15) в виде

$$Z_k=L(Z_k), \tag{24}$$

где $Z_k(x)=\{U_k(x),V_k(x)\}$, $L(Z_k)=\{L_1(U_k(x),V_k(x)),\ L_2(U_k(x),V_k(x))\}$ $(k=0,1,2,\dots)$, причем компоненты $L_i(U_k(x),V_k(x))$ $(i=1,2)$ оператора $L(Z_k)$ равны правым частям уравнения (15), соответственно. Возьмем произвольную вектор-функцию $(\omega_0(x),\dots,\omega_k(x),\dots)$, $(\tilde{\omega}_0(x),\dots,\tilde{\omega}_k(x),\dots)\in B$ и подставим в правую часть (15). Тогда для решения $U_k(x)=L_1(\omega_k(x),\tilde{\omega}_k(x))$, $V_k(x)=L_2(\omega_k(x),\tilde{\omega}_k(x))$ получим оценки (20)-(23). Отсюда, при условиях леммы 4, получаем, что $((U_k(x),\dots,U_k(x)\dots),(V_0(x),\dots,V_k(x)\dots))\in B$. Докажем, что оператор L является сжимающим.

Пусть $(\omega_{1,k}(x),\ \tilde{\omega}_{1,k}(x))$ и $(\omega_{2,k}(x),\ (\tilde{\omega}_{2,k}(x))$ $(k=0,1,2,..)\in B$. Тогда им соответствуют решения

$$U_{1,k}(x)=L_1(\omega_{1,k}(x),\tilde{\omega}_{1,k}(x)),\ V_{1,k}(x)=L_2(\omega_{1,k}(x),\tilde{\omega}_{1,k}(x)),$$
$$U_{2,k}(x)=L_1(\omega_{2,k}(x),\tilde{\omega}_{2,k}(x)),V_{2,k}(x)=L_2(\omega_{2,k}(x),\tilde{\omega}_{2,k}(x)).$$

Обозначим $U_k(x)=U_{1,k}(x)-U_{2,k}(x),\ V_k(x)=V_{1,k}(x)-V_{2,k}(x),$

$$\omega_k(x)=\omega_{1,k}(x)-\omega_{2,k}(x),\ \tilde{\omega}_k(x)=\tilde{\omega}_{1,k}(x)-\tilde{\omega}_{2,k}(x).$$

Запишем соотношение (15) для $U_{1,k}(x),\ V_{1,k}(x),\ \omega_{1,k}(x),\ \tilde{\omega}_{1,k}(x)$ и $U_{2,k}(x),$ $V_{2,k}(x),\ \omega_{2,k}(x),\ \tilde{\omega}_{2,k}(x)$; далее, вычитая из первого соотношения второе, при условиях леммы 4, получим следующую оценку:

$$\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{12}U_k^2(x)dx+\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{12}V_k^2(x)dx+\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{8}\left(AU_k(x)\right)^2dx+\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{8}\left(AV_k(x)\right)^2dx\le$$
$$\le\alpha\left[\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{12}\omega_k^2(x)dx+\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{12}\tilde{\omega}_k^2(x)dx+\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{8}\left(A\omega_k(x)\right)^2dx+\right.$$
$$\left.+\int_\Omega\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{8}\left(A\tilde{\omega}_k(x)\right)^2dx\right], \tag{25}$$

где $\alpha=\left(\dfrac{1}{\delta_1^2}+1\right)\left[204N_0^2C_1C_2\left(\dfrac{3R}{2}+2L_0\right)+204KC_1\right].$

Отсюда и следует справедливость леммы.

Теорема. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда существует единственное решение задачи (15), (16) (обратной задачи (1)-(7)), для которой справедливы оценки

$$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{12}\left\|U_k(x)\right\|_{L_2(\Omega)}^2\le\frac{R}{4},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{12}\left\|V_k(x)\right\|_{L_2(\Omega)}^2\le\frac{R}{4},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{8}\left\|AU_k(x)\right\|_{L_2(\Omega)}^2\le R,\quad ,\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{8}\left\|AV_k(x)\right\|_{L_2(\Omega)}^2\le R,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{6}\left\|AU_k(x)\right\|_{W_2^1(\Omega)}^2+\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{2}\left\|A\left(AU_k(x)\right)\right\|_{L_2(\Omega)}^2\le RC,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{6}\left\|AV_k(x)\right\|_{W_2^1(\Omega)}^2+\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{2}\left\|A\left(AV_k(x)\right)\right\|_{L_2(\Omega)}^2\le RC.$$

Доказательство. Из леммы 4 следует разрешимость в B задачи (15), (16) тем самым, справедлива первая оценка теоремы. Умножая (15), соответственно, на $\overline{\lambda}_k^5U_k(x)$ и $\overline{\lambda}_k^5V_k(x)$, суммируя по k от 0 до ∞, интегрируя по области Ω и используя первую оценку, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{10}\left\|U_k(x)\right\|_{W_2^1(\Omega)}^2\le Const.R,\ \sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}_k^{10}\left\|V_k(x)\right\|_{W_2^1(\Omega)}^2\le Const.R.$$

Тогда, из (10) и этой оценки, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\lambda}_k^6 \left\| AU_k(x) \right\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le Const.R, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\lambda}_k^6 \left\| AV_k(x) \right\|^2_{W_2^1(\Omega)} \le Const.R.$$

Аналогично доказывается следующая оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\lambda}_k^2 \left\| A\left(AU_k(x)\right) \right\|^2_{L_2(\Omega)} \le Const.R, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\lambda}_k^2 \left\| A\left(AV_k(x)\right) \right\|^2_{L_2(\Omega)} \le Const.R.$$

Для завершения доказательства теоремы нам осталась доказать, что решения задачи (11), (12) есть тождественный нуль. Действительно, при условиях теоремы имеем

$$\int_{\Omega} \left|AZ(x)\right|^2 dx + \int_{\Omega} \left|A\overline{Z}(x)\right|^2 dx \le 12\left[N_0^2 C_1 C_2 \frac{R}{2} + KC_1 \right] \cdot \left[\int_{\Omega} \left|AZ(x)\right|^2 dx + \int_{\Omega} \left|A\widetilde{Z}(x)\right|^2 dx \right].$$

Тогда $AZ(x) = 0, \quad Z(x)\big|_S = 0$ и $A\widetilde{Z}(x) = 0, \quad Z(x)\big|_S = 0,$ следовательно, $Z(x) = 0, \ \widetilde{Z}(x) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шитатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука,1980, 283с.
2. Бубнов Б.А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. Новосибирск, 1987, Препринт № 713, 41с.
3. Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа в ограниченной области // Труды Инс. прикладной мат. и мех. НАНУ, т.9, Донецк , 2004, с.131-140.
4. Кулиев М.А. Многомерная обратная краевая задача для линейных гиперболического уравнений типа в ограниченной области // Вестник БГУ, № 2, 2007, с.5-15.
5. Кулиев М.А., Ел-Хадиди А.М. Многомерная обратная краевая задача для систем гиперболического уравнений в ограниченной области // НАНУ Инс. Прикладной мат. и мех., «Нелинейные Граничные Задачи», т.20, 2011, с.91-103.

ÇOXÖLÇÜLÜ KLEYN-QORDON TƏNLİYİ ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

M.Ə.QULİYEV, Ə.M.EL-HƏDİDİ

XÜLASƏ

İşdə Çoxölçülü Kleyn-Qordon tənliyi üçün tərs sərhəd məsələsinin həllinin varlığı tədqiq olunmuşdur. Burada qoyulmuş tərs sərhəd məsələsi sonsuz diferensial tənliklər sisteminə gətirilmiş həllin varlıq və yeganəliyi isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: tərs sərhəd məsələsi, varlıq və yeganəlik, tənliklər sistemi.

MULTIDIMENSIONAL INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF KLEIN-GORDON EQUATION

M.A.GULIYEV, A.M. EL-HADIDI

SUMMARY

In the paper we investigate the solvability of the inverse multidimensional boundary value problem for the Klein-Gordon equation. We propose a method by which the inverse boundary value problem is reduced to some nonlinear infinite systems of differential equations and the existence and uniqueness theorems for the solution of multidimensional inverse boundary value problems in classes of functions of finite smoothness are proved.

Key words: inverse boundary value problem, existence and uniqueness, systems of equations.

Поступила в редакцию: 29.12.2011 г.
Принята к печати: 05.03.2012 г.