BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2012***

İNFORMATİKA

УДК 519.86/87+219.248

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОРТФЕЛЯ АКЦИЙ

Э.Г.ОРУДЖЕВ*, А.Р.МИРЗОЕВА**

* ***Бакинский Государственный Университет***

***** Государственная Нефтяная Академия***

elsharorucov63@mail.ru; anna_qayfutdinova@hotmail.com

В работе рассматривается определение оптимальной структуры условного портфеля акций с использованием эффективных вычислительных процедур пакета Excel. По результатам численных реализаций предложены инвестиционные рекомендации.

Ключевые слова: акции, оптимальный портфель, риск, доходность.

В данной статье решается задача построения оптимального портфеля акций для заданного уровня доходности. Для решения задачи были применены два метода: команда Поиск решений из прикладной программы Excel и метод множителей Лагранжа. Причем первый метод рассматривается для обоих случаев, когда короткие продажи акций разрешены и запрещены. Применение второго метода описывается только для случая возможности коротких продаж, так как условие неотрицательности переменных при использовании метода Лагранжа не соблюдается. Сравнение эффективности этих продуктов во всех случаях может быть выполнено сопоставлением конечных результатов управления портфелем – изменение совокупной стоимости при управлении структурой тем или иным способом за весь выборочный период. Эффективность управления можно повысить, например, за счет построения предикторов со знаком доходности акций.

Пусть в портфеле инвестора имеется N видов акций. Необходимо решить, какой удельный вес должна иметь каждая из этих бумаг, чтобы инвестор мог получить желаемую доходность, а риск портфеля при этом сводился бы к минимуму. Как известно [1,2], для решения данной задачи понадобятся ожидаемая доходность каждой из ценных бумаг и их матрица попарной ковариации. Вся задача сводится к минимизации дисперсии портфеля:

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j \operatorname{cov}_{ij}, \qquad (1)$$

при двух ограничениях:

1) ожидаемая доходность портфеля ($\bar{r}_p$) равна:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i \bar{r}_i = \bar{r}_p , \qquad (2)$$

где $\bar{r}_i$ - доходность i-й ценной бумаги, а θ_i - её удельный вес в портфеле.

2) сумма удельных весов всех активов равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1 . \qquad (3)$$

В данной работе мы в продолжение к нашей работе [3] рассматриваем некоторые важные задачи для численно-компьютерного расчета оптимальных портфелей акций. Из тридцати портфелей рассмотренных в [3] возьмем один. Пусть это будет портфель № 5, состоящий из акций A2,A5,A9 и A10 (см. таблица 2 в работе [3]). Также произвольно зададим для этого портфеля доходность, которую мы хотим от него получить, например 4%. Там же определены ожидаемая доходность акций, их ковариационная матрица и получены следующие вероятностно-количественные данные:

Мат.ожидание доходности за весь период	
A2	0,03
A5	1,16
A8	0,04
A10	0,05

Матрица попарной ковариации акций				
Акции	A2	A5	A9	A10
A2	0,07	0,04	0,07	0,07
A5	0,04	16,88	0,46	0,15
A9	0,07	0,46	0,14	0,1
A10	0,07	0,15	0,10	0,08

Для наших целей используем прикладную программу Excel [4], которая позволяет решать оптимизационную задачу определения оптимальных портфелей из данного количества ценных бумаг для заданного уровня доходности.

Открываем документ MS Excel. Расположим в ячейках A4, A5, A6 и A7 значения ожидаемых доходностей, соответственно, первой (0,03), второй (1,16), третьей (0,04) и четвертой (0,05) акций; в диапазоне A4:E7 – ковариационную матрицу доходностей. Необходимо еще задать удельные веса акциям для некоторого начального портфеля. Задаем их произвольно. Это необходимо для того, чтобы связать все удельные веса бумаг в портфеле в единую формулу и приравнять их к единице. В последующем при задании разного уровня доходности портфеля, удельные веса в данных ячейках будут изменяться, показывая решение задачи. Пусть удельный вес акции A2 – 1, A5 – 0, A9 – 0 и A10 – 0. Соответственно, расположим их в ячейках G4:G7. В ячейке G8 представим сумму G4:G7. В ячейку G1 помещаем значение ожидаемой доходности портфеля, то есть печатаем:

=СУММПРОИЗВ(A4:A7; G4:G7)/

В ячейках с B9 по E9 расположим транспонированный столбец удельных весов акций. Для этого выделим диапазон B9:E9 и введем формулу:

=ТРАНСП (G4:G7).

После этого одновременно нажимаем клавиши Ctrl, Shift и Enter. Теперь перемножим строку B9:E9 и ковариационную матрицу C4:F7. Поэтому выделим для получения ответа диапазон C10:F10 и введем формулу:

=МУМНОЖ (C9:F9; B4:E7)

и опять одновременно нажимаем клавиши Ctrl, Shift и Enter. Теперь перемножим полученную в ячейках B10:E10 строку на столбец в ячейках G4:G7, для этого в ячейку G2 введем формулу:

=МУМНОЖ (B10:E10; G4:G7).

Умножение дает нам риск портфеля. После этого переходим к использованию команды **Поиск решения**.

В диалоговом окне команды Поиск решения в качестве целевой ячейки выбираем G2. В ней отражается риск портфеля. Затем в строке **Равной** выбираем поле «максимальному значению». Далее идет строка, которая называется **Изменяя ячейки.** В поле под данной строкой вводим диапазон G4:G7. Ниже расположено поле **Ограничения**. Туда вводим ограничения нашей модели.

Первое ограничение заключается в том, что сумма всех удельных весов наших акций должна быть равна единице. Для этого в диалоговом окне **Добавление ограничения** (которое появляется после того как мы нажмем кнопку добавить) в поле «Ссылка на ячейку» выбираем ячейку H8, затем выбираем знак «=», а в поле «Ограничение» вводим единицу.

Следующее ограничение состоит в том, что удельные веса акций в портфеле не должны быть отрицательными. Алгоритм добавления данного ограничения описан выше, только теперь в поле «Ссылка на ячейку» выбираем диапазон G4:G7, затем знак «=» и в поле «Ограничение» вводим 0.

Вводим третье ограничение: доходность портфеля равна 0,04 или 4%. То есть, иными словами G1=0,04.

После того как все ограничения введены, нажимаем команду ОК и опять возвращаемся к диалоговому окну «Поиск решения». В этом окне нажимаем команду выполнить, и в ячейках появляется решение нашей задачи, то есть удельные веса акций в портфеле с доходностью 4%. В ячейке G2 появилось значение риска данного портфеля.

В результате решения задачи в ячейках G4:G7, G2 были получены, соответственно, следующие цифры: 0,893; 0,007; 0; 0,1; 0,07. при этом доходность портфеля составит 4%, а риск 7%.

Таким образом, для получения оптимального портфеля с 4%-ой ожидаемой доходностью следует: 89,3 % средств инвестировать в акции А2, 0,7 % средств – в А5, 10% средств – в А10, а в акции типа А9 и вовсе инвестировать не стоит. Риск портфеля при этом составит 7%.

Так, например, если мы хотим инвестировать 10 000 д.е., то получим следующий результат:

Акция	Процент	Сумма инвестиций
А2	89,3%	8930
А5	0,7%	70
А9	0,0%	0
А10	10,0%	1000

Теперь допустим, что акции А2 котируется по цене 20 д.е за акцию, А5 по цене 8 д.е за акцию, А9 по цене 7 д.е и А10 по цене 16 д.е. за акцию. Тогда следует купить 446 акций типа А2, 8 акций типа А5 и 62 акции типа А10.

В Excel результат будет выглядеть следующим образом:

портфель№5					***доходность***	0,04
					риск	0,07
	А2	А5	А9	А10		***структура***
0,03	0,07	0,04	0,07	0,07	А2	0,893
1,16	0,04	16,88	0,46	0,15	А5	0,007
0,08	0,07	0,46	0,14	0,1	А9	0,000
0,05	0,07	0,15	0,10	0,08	А10	0,100
						1,00
	0,89	0,01	0,00	0,10		
	0,07	0,17	0,08	0,07		

Мы нашли риск и удельные веса акций оптимального портфеля для одного значения доходности. Если повторить решение для разных ожидаемой доходности, то получим ряд значений уровней риска, которые позволят построить эффективную границу для данного набора бумаг. Если, например, захотим найти минимальный уровень риска для ожидаемой доходности равной 6%, 10%, 14%, 16%, то повторив все ранее описанные действия получим следующую картину для оптимального набора:

порт-фель№5					***доход-ность***	0,04	0,06	0,10	0,14	0,16
					риск	0,07	0,08	0,09	0,15	0,26
	A2	A5	A9	A10		***структура***				
0,03	0,07	0,04	0,07	0,07	A2	0,893	0,587	0,000	0,000	0,000
1,16	0,04	16,88	0,46	0,15	A5	0,007	0,020	0,045	0,081	0,091
0,08	0,07	0,46	0,14	0,1	A9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,312
0,05	0,07	0,15	0,10	0,08	A10	0,100	0,393	0,955	0,919	0,598
						1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,89	0,01	0,00	0,10						
	0,07	0,17	0,08	0,07						
	0,59	0,02	0,00	0,39						
	0,07	0,41	0,09	0,08						
	0,59	0,02	0,00	0,39						
	0,07	0,41	0,09	0,08						
	0,00	0,05	0,00	0,95						
	0,07	0,90	0,12	0,08						
	0,00	0,09	0,31	0,60						
	0,07	1,76	0,15	0,09						

В задаче одним из ограничений выступила не отрицательность удельных весов акций в портфеле. Если данное условие не вводить, то есть исключить второе ограничение G4:G7>=0, то получим решение оптимизационной задачи, допускающей короткие продажи акций.

Для случая, когда короткие продажи активов разрешены, аналитически эффективную границу можно также найти с помощью метода множителей Лагранжа. Данные множители дают дополнительную информацию об изменении риска в зависимости от ожидаемой доходности и инвестиционных вложений.

Искусственно создается и минимизируется функция Лагранжа в форме:

$$L = G + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 ,$$

где L – функция Лагранжа; G – целевая функция; λ_1, λ_2 - множители Лагранжа для первого и второго ограничений, причем их инвестиционная интерпретация следующая: λ_1 – это скорость изменения дисперсии при изменении ожидаемых прибылей, а λ_2 представляет собой скорость изменения риска при увеличении и уменьшении инвестиций [6, стр. 280]; C_1, C_2 - первое и второе ограничения.

Целевая функция представлена функцией (1), первое ограничение – равенством (2), второе – (3). В функцию Лагранжа первое и второе ограничения включаем в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i \bar{r}_i - \bar{r}_p = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \theta_i - 1 = 0.$$

В общем виде функция Лагранжа запишется как:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \theta_i \theta_j \operatorname{cov}_{ij} + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i \bar{r}_i - \bar{r}_p \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i - 1 \right) \tag{4}$$

Найдем частные производные функции (4) по θ_i (i=1,2,3,4), λ_1, λ_2 и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Решение системы уравнений (5) дает ответ на вопрос, в каких удельных весах необходимо включить бумаги в портфель, чтобы он являлся эффективным, т.е. имел минимальную дисперсию для заданного уровня ожидаемой доходности. Следует подчеркнуть, что в рассмотренном виде решение дается для ситуации, когда короткие продажи разрешены.

Для поставленной в самом начале задачи функция Лагранжа и ее ограничения будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} L = {} & 0{,}07\theta_1^2 + 16{,}88\theta_2^2 + 0{,}14\theta_3^2 + 0{,}08\theta_4^2 + 2\theta_1\theta_2 * 0{,}04 + 2\theta_1\theta_3 * 0{,}07 \\ & + 2\theta_1\theta_4 * 0{,}07 + 2\theta_2\theta_3 * 0{,}46 + 2\theta_2\theta_4 * 0{,}15 + 2\theta_3\theta_4 * 0{,}1 + \lambda_1(0{,}03\theta_1 \\ & + 1{,}16\theta_2 + 0{,}04\theta_3 + 0{,}05\theta_4 - 0{,}04) + \lambda_2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 1). \end{aligned} \tag{6}$$

$$
\begin{cases}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0,14\theta_1 + 0,08\theta_2 + 0,13\theta_3 + 0,14\theta_4 + 0,03\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 17,78\theta_2 + 0,08\theta_1 + 0,92\theta_3 + 0,3\theta_4 + 1,16\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 0,28\theta_3 + 0,14\theta_1 + 0,92\theta_2 + 0,2\theta_4 + 0,04\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_4} = 0,16\theta_4 + 0,14\theta_1 + 0,3\theta_2 + 0,2\theta_3 + 0,05\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0,03\theta_1 + 1,16\theta_2 + 0,04\theta_3 + 0,05\theta_4 - 0,04 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 1 = 0.
\end{cases} \quad (7)
$$

Решение данной задачи методом множителей Лагранжа можно реализовать на таком языке программирования как Pascal [5]. Код программы приведен в самом конце, в приложении 1. Для решения системы уравнений был применен метод Гаусса. Программа работает следующим образом: пользователь вводит с клавиатуры число активов, находящихся в портфеле, вектор ожидаемых доходностей этих активов и их ковариационную матрицу, а программа в ответ выдает оптимальную структуру для такого портфеля.

Так, например, если введем все необходимые параметры вышеуказанного портфеля, то программа выдаст нам следующий результат:

Корни системы: $x_1 = 0,893$, $x_2 = 0,007$, $x_3 = 0,000$, $x_4 = 0,0998$

Как видим, данный результат полностью совпадает с результатом, полученным с помощью Excel. Если же подставим полученные корни в систему (7), то имеем, что $\lambda_1 = 0,84$, $\lambda = -0,1851$

Теперь, возьмем еще два портфеля из [1]. Пусть это будут портфели № 2 и №10.

№ портфеля	Номера акций
2	A3,A6,A8,A10
10	A1,A6,A7,A8

Используя один из двух вышеописанных методов, найдем оптимальный состав обоих портфелей для ожидаемой доходности 6%, 10%, 14%, 16%. Результат отобразим с помощью таблиц:

Портфель № 2

доходность	0,04	0,06	0,10	0,14	0,16
риск	0,13	0,08	0,11	0,20	0,26
	структура				
A3	0,000	1,000	0,688	0,805	0,756
A6	0,000	0,000	0,103	0,195	0,244
A8	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000

A10	0,000	0,000	0,210	0,000	0,000

Портфель № 10

доходность	0,04	0,06	0,10	0,14	0,16
риск	0,13	0,07	0,12	0,22	0,28
	структура				
A1	0,000	0,940	0,702	0,465	0,345
A6	0,000	0,024	0,119	0,214	0,262
A7	0,000	0,036	0,179	0,321	0,393
A8	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Проведенный средне-дисперсионный анализ портфелей № 2, № 5 и № 10 позволяет сделать следующие выводы: *если инвестор желает получить доходность в 4% и сохранить при этом риск на минимальном уровне, то ему следует инвестировать в портфель № 5. Если ему требуется доходность в 6%, то целесообразно выбрать портфель № 10, так как у других двух портфелей при данном уровне доходности наблюдается более высокий риск (8%). Если повысить уровень требуемой доходности до 10% или даже до 14%, то, несомненно, лучшим вариантом для инвестирования окажется портфель № 5. У этого портфеля, как видно из таблиц, в обоих случаях риск заметно ниже, чем у остальных. И наконец, для случая, когда инвестору необходимо получить прибыль на уровне 16%, у него имеются две альтернативы: портфель №5 или портфель № 2, так оба портфеля при данном уровне доходности имеют одинаковый риск.*

Приложение 1.

```
uses crt;
const
  e=10;
  f=8;
var
    a:array[1..e,1..e] of real;//массив коэффициентов и 
свободных членов
    c:array [1..f,1..f] of real;// массив ковариаций
    b:array[1..e] of real;//массив свободных членов
    x:array[1..e] of real;  //массив корней уравнения
    r:array [1..f] of real; // массив доходностей акти-
вов
   n,i,j,k:integer;
   z,rp,g,sum:real;
begin
 clrscr;
  writeln ('Введите количество видов акций’);
   write (‘n=’);
   readln (n);
```

```
   writeln ('введите ковариационную матрицу и вектор
доходностей');
  for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
   begin
    write (' cov[',i,j,']=');
    readln(c[i,j]);
   end;
  for i:=1 to n do
   begin
     for j:=1 to n+1 do
     write('r[',i,']=');
     readln(r[i]);
   end;
  writeln('введите доходность портфеля');
  write('rp=');
  read(rp);
 clrscr;
 for i:=1 to n do
  begin
   for j:=1 to n do
    a[i,j]:=2*c[i,j];
    a[i,n+1]:=r[i];
    a[i,n+2]:=1;
  end;
 i:=n+1;
  for j:=1 to n do
   a[i,j]:=r[j];
   a[i,n+1]:=0;
   a[i,n+2]:=0;
 i:=n+2;
  for j:=1 to n do
   a[i,j]:=1;
   a[i,n+1]:=0;
   a[i,n+2]:=0;
 for i:=1 to n do
   b[i]:=0;
   b[n+1]:=rp;
   b[n+2]:=1;
 for k:=1 to n+2 do \\ прямой ход Гаусса
   begin
    for j:=k+1 to n+2 do
      begin
        z:=a[j,k]/a[k,k];
         for i:=k to n+2 do
           begin
             a[j,i]:=a[j,i]-z*a[k,i];
```

```
          end;
        b[j]:=b[j]-z*b[k];
      end;
   end;
 for k:=n+2 downto 1 do //обратный ход Гаусса,
```

вычисление корней

```
 begin
     z:=0;
     for j:=k+1 to n+2 do
       begin
        g:=a[k,j]*x[j];
        z:=z+g;
      end;
     x[k]:=(b[k]-z)/a[k,k];
    end;
 writeln('Корни системы:');
   for i:=1 to n do
    write('x[',i,']=',x[i]:0:4,' ');
    writeln;
 writeln('Proverka:');
 sum=0;
 for i:=1 to n do
  sum:=sum+x[i];
 if sum=1 then writeln('решение верное!')
 else  writeln('решение неверное');
 readln;
 end.
```

ЛИТЕРАТУРА

1. Фабоцци Ф. Управление инвестициями: Пер. с англ. М.: Инфра-М, 2000, XXVIII, с. 82-87.
2. Шарп У., Александр Г., Бейли Дж. Инвестиции: Пер. с англ. М.: Инфра-М, 2007, XII, с. 195-199.
3. Оруджев Э.Г., Гайфутдинова А.Р. Количественно-информативный анализ и построение параметрической модели условного рынка акций. Bakı Universitetinin Xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2011, №1, s.94-105.
4. Дмитрий Жаров Финансовое моделирование в Excel: Альпина Бизнес Букс, 2008, 176 с.
5. Фаронов В.В. Turbo Pascal: БХВ – Петербург, 2004, 1056 с.
6. Ральф Винс Математика управления капиталом: Альпина Бизнес Букс, 2007, 402 с.

SƏHM PORTFELİNİN STRUKTURUNUN OPTİMALLAŞDIRILMASI

E.Q.ORUCOV, A.R.MİRZƏYEVA

XÜLASƏ

İşdə şərti götürülmüş səhm portfelinin optimal stukturunun müəyyənləşdirilməsi üçün Excel proqram paketi vasitəsilə effektiv hesablama əməliyyatları prosedurları göstərilmiş, ədədi realizasiyaların nəticələrinə görə investisiya qoyuluşları üçün tövsiyələr verilmişdir.

Açar sözlər: səhm, optimal portfel, risk, gəlirlik.

STOCK PORTFOLIO OPTIMIZATION

E.G.ORUJOV, A.R.MIRZAYEVA

SUMMARY

The paper studies a problem on building an optimal portfolio for given annual returns of some companies' stocks. For solving this problem two methods were used: Solver tool in MS Excel and the method of Lagrange multipliers. The first method is considered in two cases: when short sales of stocks are permitted. Application of the second method is described only in case of short sale.

Key words: stock, optimal portfolio, risk, yield.

Поступила в редакцию: 05.10.2011 г.
Принята к печати: 05.03.2012 г.