

МЕХАΝІКА

УДК 05.19.23

СМЕШАННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ТЕОРИИ
ПОЛЗУЧЕСТИ С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ,
КОРРОЗИИ И ОБЪЕМНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯР.Ю.АМЕНЗАДЕ, И.Т.ПИРМАМЕДОВ
Бакинский Государственный Университет
mexanika.bsu.az@mail.ru

Дается формулировка и доказательство смешанного вариационного принципа для теории ползучести при одновременном учете процесса повреждаемости, нестационарной коррозии и объемного изменения. Учитывается мгновенная упруго-пластическая деформация типа теории течения. Используются точные выражения для компонент тензора деформации через перемещения.

Ключевые слова: ползучесть, диффузия, повреждаемость, объемное изменение, вариация, напряжение, деформация.

В настоящее время определение напряженно-деформируемого состояния в твердых телах при ползучести с учетом повреждаемости и коррозии привлекает все большее внимание. Это, в первую очередь, объясняется высокими требованиями, предъявляемыми к качеству и надежности конструкций или их отдельных элементов в условиях длительного высокотемпературного нагружения, пребывающих в агрессивной окружающей среде. В силу математических сложностей получение здесь аналитических решений весьма затруднительно, а порою невозможно. Это связано с необходимостью нахождения решений нелинейных краевых задач. Поэтому возникает необходимость в разработке и применении к таким задачам эффективных вариационных методов решения.

Вариационные принципы механики и связанный с ними комплекс физических идей и математических методов имеют актуальное значение в различных научных и технических проблемах. Они находят применение в широком круге вопросов теоретической физики, механики сплошной среды, теории ползучести и т.д. В последние годы существенно изменилась точка зрения на вариационные методы в механике деформи-

руемого твердого тела. Возможности построения вариационных принципов разного рода, т.е. нахождение функционалов, для которых уравнения задачи являются уравнениями Эйлера, оказались значительно более широкими, чем это казалось раньше. Выявлена возможность достаточно свободного выбора независимых функциональных аргументов [1-3].

Настоящая работа развивает метод, опубликованной в [4], где был сформулирован вариационный принцип смешанного типа для ползучести с одновременным учетом коррозии и повреждаемости. Однако при этом процесс физико-химических превращений сопровождается объемным изменением тела. В связи с этим здесь приводится теорема для случая одновременного учета всех перечисленных выше факторов.

1. Краевая задача. В трехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами x_k рассмотрим тело объемом V , ограниченное достаточно гладкой поверхностью S и находящееся в состоянии ползучести под действием поверхностных сил \bar{T}_i , приложенных на части поверхности S_σ . На остальной части поверхности S_u зададим перемещение \bar{u}_i ($S = S_\sigma \cup S_u$). Предположим, что при этом в материале возникает мгновенная упруго-пластическая деформация ε_{ij}^M , описываемая уравнениями состояния типа теории течения [5]. Для краткости записи условимся опускать знак суммы, подразумевая, что по повторяющимся индексом производится суммирование от 1 до 3. Тогда в случае анизотропии

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^M = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}, \quad (1.1)$$

где $\dot{\sigma}_{ij}$ - тензор скоростей напряжения, а H_{ijkl} - тензор механических характеристик, который не зависит от скоростей деформаций и напряжения. В (1.1) и далее точкой сверху обозначается дифференцирование соответствующей величины по физическому времени t . Учитывая объемную деформацию и деформацию ползучести p_{ij} , для полной деформации имеем:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^M + p_{ij} + \theta \delta_{ij}.$$

Здесь δ_{ij} - тензор Кронекера в метрике недеформируемого тела. Учитывая в последнем равенстве зависимость (1.1), в скоростях запишем

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{p}_{ij} + \dot{\theta} \delta_{ij}.$$

Для моделирования процессов нестационарной коррозии, длительной прочности и их взаимосвязей, основываясь на представлении Ю.Н.Работнова [4], запишем

$$\dot{p}_{ij} = \dot{p}_{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta}, \omega, c),$$

кинетическое уравнение диффузии

$$\dot{c} = \text{div}(D\nabla c)$$

и кинетическое уравнение повреждаемости

$$\dot{\omega} = \varphi(\sigma_{\alpha\beta}, \omega, c).$$

Здесь ω - параметр повреждаемости, c - величина, характеризующая уровень концентрации агрессивной среды, $D = D(\sigma_{\alpha\beta}, \omega, c)$ - коэффициент коррозии, а ∇ - оператор Гамильтона. Будем допускать, что объемное изменение θ - задаваемая функция, которая определяется экспериментальным путем и зависящая от физических параметров среды.

В ряде случаев, например, в задачах устойчивости и выпучивания, бывает недостаточно считать производные от перемещений малыми и удерживать только линейные члены в выражениях для компонент тензора деформации через перемещения. Поэтому будем пользоваться точными выражениями для компонент деформации. Пренебрегая массовыми силами, рассмотрим теперь равновесие установленного выше тела. Запишем условия, которым должны удовлетворять искомые функции. Для геометрически нелинейной теории, в декартовых координатах, они описываются нелинейными дифференциальными уравнениями равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \sigma_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (k = \overline{1,3}), \quad (1.2)$$

уравнением состояния

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{p}_{ij} + \dot{\theta} \delta_{ij}, \quad (1.3)$$

геометрическими соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (1.4)$$

нелинейными граничными условиями

$$\bar{T}_k = \sigma_{ij} n_j \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad \forall x_k \in S_\sigma, \quad (1.5)$$

где n_j - нормаль к поверхности недеформируемого тела и

$$\bar{u}_k = u_k \quad \forall x_k \in S_u, \quad (1.6)$$

а также кинетическими уравнениями

$$\dot{c} = \text{div}(D\nabla c), \quad (1.7)$$

$$\dot{\omega} = \varphi(\sigma_{\alpha\beta}, \omega, c). \quad (1.8)$$

Если все перечисленные условия выполнены, то мы имеем точное решение задачи ползучести с учетом повреждаемости, коррозии и объемного изменения. Однако вопрос о существовании и единственности решения математически достаточно сложен и остается открытым.

2. Вариационный принцип смешанного типа. Составим функционал

$$\begin{aligned}
 J = \int_V \left\{ \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + 2\dot{p}_{ij} + \dot{\theta} \delta_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} + \right. \\
 \left. + \lambda_\omega \left(\frac{1}{2} \dot{\omega}^2 - \dot{\omega} \varphi \right) + \lambda_c \left[\frac{1}{2} \dot{c}^2 - \dot{c} \operatorname{div}(D\nabla c) \right] \right\} dV - \\
 - \int_{S_\sigma} \dot{T}_i \dot{u}_i dS - \int_{S_u} \dot{T}_i (\dot{u}_i - \bar{u}_i) dS.
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Докажем утверждение, что рассматриваемую задачу (1.2)-(1.8) можно сформулировать с помощью вариационной теоремы следующим образом: стационарное значение функционала (2.1)

$$\delta J = 0$$

при условиях (1.3) и (1.4) в качестве уравнений Эйлера приводит к уравнению равновесия (1.2), граничным условиям (1.5), (1.6) и кинетическим уравнениям (1.7) и (1.8). Здесь независимыми варьируемыми величинами являются $\dot{\sigma}_{ij}$, \dot{u}_i , $\dot{\omega}$ и \dot{c} , а

$$\lambda_\omega = \lambda_\omega(\sigma_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}) \quad \text{и} \quad \lambda_c = \lambda_c(\sigma_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta})$$

весовые функции, значения которых подбираются в зависимости от вида интерполяционных функций для уточнения приближений.

Найдем вариацию функционала (2.1). Учитывая, что оператор варьирования δ действует на скорости величин, из (2.1) получим:

$$\begin{aligned}
 \delta J = \int_V \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij} \delta \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right) - \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij}^M - \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + 2\dot{p}_{ij} + 2\dot{\theta} \delta_{ij}) \delta \dot{\sigma}_{ij} + \lambda_\omega (\dot{\omega} - \varphi) \delta \dot{\omega} + \right. \\
 \left. + \lambda_c [\dot{c} - \operatorname{div}(D\nabla c)] \delta \dot{c} \right\} dV - \int_{S_\sigma} \dot{T}_i \delta \dot{u}_i dS - \int_{S_u} [(\dot{u}_i - \bar{u}_i) \delta \dot{T}^i] dS.
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

При этом учитывался тот факт, что по определению

$$\delta \dot{p}_{ij} = 0, \quad \delta \dot{\theta} = 0,$$

а для выполнения граничных условий принимались равенства

$$\delta \dot{T}^i = 0 \quad \text{на} \quad S_\sigma$$

и

$$\delta \dot{u}_i = 0 \quad \text{на} \quad S_u.$$

Поскольку тензор H_{ijkl} не зависит от скоростей, то

$$\delta \dot{\varepsilon}_{ij}^M = H_{ijkl} \delta \dot{\sigma}_{kl}.$$

Умножим последнее равенство на $\dot{\sigma}_{ij}$

$$\dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij}^M = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\sigma}_{kl}.$$

Замечая, что

$$H_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{kl}^M,$$

находим:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^M \delta \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij}^M. \quad (2.3)$$

Отдельно рассмотрим четвертое слагаемое в выражении (2.2). Из симметрии тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, имеем:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right).$$

Отсюда вытекает равенство третьего и четвертого слагаемых в (2.2). Это обстоятельство и формула (2.3) позволяют упростить выражение (2.2) и записать его следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_V \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij} \delta \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) - (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij} + \dot{\theta} \delta_{ij}) \delta \dot{\sigma}_{ij} + \right. \\ \left. + \lambda_\omega (\dot{\omega} - \varphi) \delta \dot{\omega} + \lambda_c [\dot{c} - \text{div}(D\nabla c)] \delta \dot{c} \right\} dV - \\ - \int_{S_\sigma} \dot{T}_i \delta \dot{u}_i dS - \int_{S_u} [(\dot{u}_i - \dot{u}_i) \delta \dot{T}_i] dS. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Производные от компонент деформации по времени вычисляются с помощью (1.4), а именно

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right\},$$

а ее вариация записывается как

$$\delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) + \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right) \right\}.$$

Теперь второе слагаемое в (2.4) перепишем в форме, удобной для последующих выкладок

$$\dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\sigma}_{ij} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) + \dot{\sigma}_{ij} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right) + \dot{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) + \dot{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right) \right\}.$$

Переставим в этой формуле индексы i и j . Тогда, пользуясь свойством симметрии тензора σ_{ij} , будем иметь:

$$\dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} \left\{ \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) \right\}. \quad (2.5)$$

В свою очередь,

$$\dot{u}_i = \dot{u}_k \delta_{ki}$$

и из (2.5) следует

$$\dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} \left\{ \delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right).$$

Тогда вариационное уравнение (2.4) запишется посредством равенства

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_V \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij} \delta \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} \left[\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) - \right. \\ & - (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij} + \dot{\theta} \delta_{ij}) \delta \dot{\sigma}_{ij} + \lambda_\omega (\dot{\omega} - \varphi) \delta \dot{\omega} + \lambda_c [\dot{c} - \text{div}(D\nabla c)] \delta \dot{c} \Big\} dV - \\ & - \int_{S_\sigma} \dot{T}_i \delta \dot{u}_i dS - \int_{S_u} [(\dot{u}_i - \dot{u}_i) \delta \dot{T}_i] dS. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отдельно рассмотрим интеграл

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij} \left\{ \delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) dV.$$

Преобразуя его по формуле Гаусса-Остроградского, получим:

$$\begin{aligned} \int_V \dot{\sigma}_{ij} \left\{ \delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) dV = & \int_S \left\{ \dot{\sigma}_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) n_j \delta \dot{u}_k \right\} dS - \\ & - \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\dot{\sigma}_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] \delta \dot{u}_k \right\} dV. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Аналогично вычислим третий интеграл, для которого запишем:

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) dV = \int_S \sigma_{ij} n_j \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \delta \dot{u}_k dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right) \delta \dot{u}_k dV. \quad (2.8)$$

Разбивая в формулах (2.7) и (2.8) интегралы по S на сумму интегралов по S_σ и S_u и учитывая, что поверхностные интегралы отличны от нуля только на поверхности S_σ ($\delta \dot{u}_k = 0$ на S_u), их можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_V \dot{\sigma}_{ij} \left\{ \delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) dV = & \int_{S_\sigma} \left\{ \dot{\sigma}_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) n_j \delta \dot{u}_k \right\} dS - \\ & - \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\dot{\sigma}_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] \delta \dot{u}_k \right\} dV, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \delta \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_j} \right) dV = \int_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \delta \dot{u}_k dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right) \delta \dot{u}_k dV. \quad (2.10)$$

Внеся преобразованные значения интегралов (2.9) и (2.10) в (2.6) и собирая члены при одинаковых независимых вариациях, найдем:

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_V \left\{ \left[\dot{\varepsilon}_{ij} - (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij} + \dot{\theta} \delta_{ij}) \right] \delta \dot{\sigma}_{ij} - \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\dot{\sigma}_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right) \right] \delta \dot{u}_k + \lambda_\omega (\dot{\omega} - \varphi) \delta \dot{\omega} + \lambda_c [\dot{c} - \text{div}(D\nabla c)] \delta \dot{c} \right\} dV + \\ & + \int_{S_\sigma} \left\{ \left[\dot{\sigma}_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right] n_j - \dot{T}^k \delta \dot{u}_k \right\} dS - \int_{S_u} (\dot{u}_k - \dot{\bar{u}}_k) \delta \dot{T}_k dS. \end{aligned}$$

Имея очевидное равенство

$$\left[\dot{\sigma}_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] + \left(\sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_i} \right) = \left\{ \sigma_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right\}^{\bullet}$$

для выражения δJ находим:

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_V \left\{ \left[\dot{\varepsilon}_{ij} - (\dot{\varepsilon}_{ij}^M + p_{ij} + \theta \delta_{ij}) \right]^{\bullet} \delta \dot{\sigma}_{ij} - \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right]^{\bullet} \delta \dot{u}_k + \right. \\ & \left. + \lambda_\omega (\dot{\omega} - \varphi) \delta \dot{\omega} + \lambda_c [\dot{c} - \text{div}(D\nabla c)] \delta \dot{c} \right\} dV + \\ & + \int_{S_\sigma} \left[\sigma_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) n_j - \bar{T}^k \right]^{\bullet} \delta \dot{u}_k dS - \int_{S_u} (\dot{u}_k - \dot{\bar{u}}_k) \delta \dot{T}_k dS = 0. \end{aligned}$$

Учитывая основную лемму вариационного исчисления и формулу (1.5), из условия обращения в нуль δJ , в качестве уравнений Эйлера получим:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] \right\}^{\bullet} = 0, \quad (2.11)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^M + \dot{p}_{ij} + \dot{\theta} \delta_{ij}, \quad (2.12)$$

$$\dot{\omega} = \varphi, \quad (2.13)$$

$$\dot{c} = \text{div}(D\nabla c), \quad (2.14)$$

$$\dot{T}_k = \dot{\bar{T}}_k \quad \text{на } S_\sigma, \quad (2.15)$$

$$\dot{\bar{u}}_k = \dot{u}_k \quad \text{на } S_u. \quad (2.16)$$

После интегрирования по t уравнений (2.11) и граничных условий (2.15) и (2.16), окончательно запишем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{ij} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \dot{p}_{ij} + \dot{\theta} \delta_{ij},$$

$$\dot{\omega} = \varphi, \quad \dot{c} = \text{div}(D\nabla c); \quad \forall x^k \in V$$

$$\bar{T}_k = T_k \quad \forall x_k \in S_\sigma; \quad \bar{u}_k = u_k \quad \forall x_k \in S_u.$$

Отсюда следует сформулированное выше утверждение. В случае химически активной среды уравнение диффузии (1.7) принимает вид

$$\dot{c} = \text{div}(D\nabla c) - kc,$$

где постоянная k - характерная скорость химической реакции, а kc - скорость распада химических реакций под действием агрессивной среды. Здесь, в вариационной постановке, последний член объемного интеграла в (2.2) необходимо заменить на

$$\lambda_c \left[\frac{1}{2} \dot{c}^2 - \dot{c} \text{div}(D\nabla c) - kc\dot{c} \right].$$

Отметим, что при решении конкретных задач надо задавать начальное условие для ω и начальное и граничное условие относительно c .

В заключении заметим, что предложенный вариационный метод может быть применен и для случая нелинейной теории упругости. Действительно, если мгновенная деформация нелинейно-упругая, то [6]

$$\varepsilon_{ij}^M = \varphi_{ij}(\sigma_{kl})$$

или в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^M = \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} = A_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}.$$

Отсюда следует, что постановка краевых задач в скоростях будет такой же, как и выше, с той лишь разницей, что вместо тензора H_{ijkl} фигурируют величины A_{ijkl} другой физической природы.

Таким образом, приходим к весьма важному выводу, что различные по существу задачи в вариационной постановке (2.2) математически идентичны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М: Наука, 1979, 744 с.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М: Наука, 1966, 687 с.
3. Амензаде Р.Ю., Мехтиева Г.Ю., Фатуллаева Л.Ф. Вариационный метод нелинейной наследственной механики твердых тел. Вестник Чувашского Государственного Педагогического Университета им. И.Я.Яковлева. Серия «Механика предельного состояния», 2010, № 2 (8), с.42-53.

4. Ализаде А.Н., Амензаде Р.Ю. Вариационный метод теории ползучести с учетом повреждаемости и коррозии. Доклады РАН, 2004, т. 397, № 6, с.772-775.
5. Ишлинский, А.Ю. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003, 704 с.
6. Седов, Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. М.: Наука, 1976, 536 с.

ZƏDƏLƏNMƏNİ, KORROZİYANI VƏ HƏCMİ DEFORMASIYANI NƏZƏRƏ ALMAQLA SÜRÜNCƏKLİK NƏZƏRİYYƏSİNİN QARIŞIQ VARIASIYA PRİNSİPİ

R.Y.ƏMƏNZADƏ, İ.T.PİRMƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Məqalədə xarab olma prosesi, qeyri-stasionar korroziya və həcmi dəyişilməni eyni zamanda nəzərə almaqla, sürüncəklik nəzəriyyəsi üçün qarışıq variasiya prinsipinin qoyuluşu və isbatı verilmişdir. Burada axın nəzəriyyəsi tipli ani elastiki-plastiki deformasiya nəzərə alınmışdır. Deformasiya tenzoru komponentlərinin yerdəyişmədən asılılığının dəqiq ifadələri istifadə olunmuşdur.

Açar sözlər: sürüncəklik, diffuziya, zədələnmə, həcmi dəyişilmə, variasiya, gərginlik, deformasiya.

THE MIXED VARIATION PRINCIPLE OF THE THEORY OF CREEP TAKING INTO ACCOUNT DAMAGEABILITY, CORROSION AND VOLUME DEFORMATION

R.Y.AMANZADEH, I.T.PIRMAMMADOV

SUMMARY

The formulation and the proof of the mixed variation principle for the creep theory are given at the simultaneous account of the process of damageability, non-stationary corrosion and volume change. Instant elastic-plastic deformation of the type of the current theory is considered. Exact expressions for components of tensor deformations through replacement are used.

Keywords: creep, diffusion, damageability, volume change, a variation, pressure, deformation.

Поступила в редакцию: 30.12.2011 г.

Принята к печати: 05.03.2012 г.