BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2012

УДК. 517.95

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р.Ф.САФАРОВ
Бакинский Государственный Университет
seferovrovshan@mail.ru

В данной работе для некоторых краевых задач операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа с операторными коэффициентами найдены условия существования и единственности голоморфных решений в некоторых секторах. Эти условия выражены свойствами коэффициентов данного операторно-дифференциального уравнения и операторами, входящими в краевые условия.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, самосопряженный оператор.

Пусть H-сеперабельное гильбертово пространство, A- положительно определённый самосопряженный оператор, а $H_\gamma = D(A^\gamma)$ гильбертово пространство со скалярным произведением $(A^\gamma x, A^\gamma y)$, $\gamma \ge 0$. При $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$.

Обозначим через $L_2(R_+;H)$ гильбертово пространство всех функций $f(t)$, определённых почти всюду в $R_+ = (0,+\infty)$, со значениями в H, для которых

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2} < \infty .$$

Следуя монографии [1] определим гильбертово пространство

$$W_2^2(R_+;H) = \left\{u(t) : u''(t) \in L_2(R_+;H), A^2 u(t) \in L_2(R_+;H)\right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} = \left(\|u''\|^2_{L_2(R_+;H)} + \|A^2 u\|^2_{L_2(R_+;H)}\right)^{1/2}.$$

Здесь производные понимаются в смысле теории распределений [1].

Далее обозначим через $H_{2,\alpha}$ линейное множество всех функций $f(z)$ со значениями в H, которые голоморфны в секторе

$$S_\alpha = \{z : |\arg z| \le \alpha\} \quad , \quad 0 \le \alpha < \pi/2 \ ,$$

причем $f(te^{i\psi}) \in L_2(R_+; H)$, при $|\psi| < \alpha$ и $\sup\limits_{|\psi|<\alpha} \| f(te^{i\psi}) \|_{L_2(R_+;H)} \le const$.

Функции из $H_{2,\alpha}$ имеют граничные значения $f_{\pm\alpha}(t) \in L_2(R_+; H)$ на лучах $\Gamma_{\pm\alpha} = te^{\pm i\alpha}, t > 0$, в смысле сходимости почти всюду в H или в $L_2(R_+; H)$. Множество $H_{2,\alpha}$ превращается в гильбертово пространство [2] относительно нормы

$$\| f \|_{H_{2,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\| f_\alpha(t) \|^2_{L_2(R;H)} + \| f_{-\alpha}(t) \|^2_{L_2(R;H)} \right)^{1/2} .$$

При $\alpha = 0$ считаем, что $S_0 = R = (0, \infty)$, производные понимаются в смысле распределений и $H_{2,0} = L_2(R_+; H)$.

Далее введем гильбертовы пространства

$$W^2_{2,\alpha} = \{u(z) : u''(z) \in H_{2,\alpha}, A^2 u(z) \in H_{2,\alpha}\}$$

и

$$W^2_{2,\alpha}(K) = \left\{ u(z) : u(z) \in W^2_{2,\alpha}, \ \ u'(0) = Ku(0), K \in L\left(H_{3/2}, H_{1/2} \right) \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W^2_{2,\alpha}} = \left(\|u''(z)\|^2_{H_{2,\alpha}} + \|A^2 u(z)\|^2_{H_{2,\alpha}} \right)^{1/2} .$$

Отметим, что эти пространства определены корректно, поскольку при $u \in W^2_{2,\alpha}(R_+; H)$ граничные значения $u_{\pm\alpha}(t) \in W^2_2(R_+; H)$, $u(0) \in H_{3/2}$, $u'(0) \in H_{1/2}$, $A^{2-j} u^{(j)}(z) \in H_{2,\alpha}$, причем

$$\left\| A^{2-j} u^{(j)} \right\|_{2,\alpha} \le c_j \|u\|_{W^2_{2,\alpha}} , \quad \left\| u^{(j)}(0) \right\|_{2-j-1/2} \le \tilde{c}_j \|u\|_{W^2_{2,\alpha}} \quad j = 0,1 \ .$$

Рассмотрим краевую задачу

$$P(d/dz)u(z) = -u''(z) + A^2 u(z) + A_1 u'(z) = 0, \qquad z \in S_\alpha , \qquad (1)$$

$$u'(0) - Ku(0) = \varphi, \qquad \varphi \in H \ . \qquad (2)$$

Определение 1. Если при $\varphi \in H_{1/2}$ существует вектор–функция $u(z) \in W^2_{2,\alpha}$, удовлетворяющая уравнению (1) тождественно в S_α, то будем говорить, что $u(z)$ есть регулярное решение уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $\varphi \in H_{1/2}$ существует регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию (2) в смысле сходимости

$$\lim_{\substack{z\to 0,\\ |\arg z|<\alpha}} \|u'(z)-Ku(z)\|=0\,,$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W^2_{2,\alpha}} \le const\|\varphi\|_{1/2}\;\;,$$

то задача (1),(2) называется регулярно разрешимой.

В данной работе мы находим условия регулярной разрешимости задачи (1),(2). Аналогичные вопросы рассмотрены в работах [2-6] в различных ситуациях. Отметим, что при $\alpha=0$ в определении 1 требуется, чтобы функция $u(t)$ удовлетворяла уравнению почти всюду в R_+, а в определении 2 считается, что $t\to+0$ и $W^2_{2,0}=W^2_2(R_+;H)$.

Сперва рассмотрим в H краевую задачу

$$P_0(d/dz)u(z)=-u''(z)+A^2u(z)=0,\qquad z\in S_\alpha\,, \tag{3}$$

$$u'(0)-Ku(0)=\varphi,\qquad\quad \varphi\in H\,. \tag{4}$$

Лемма 1. Уравнение (3) имеет регулярное решение вида $u_0(z)=e^{-zA}x$, причем $x\in H_{3/2}$, а e^{-zA}-голоморфная полугруппа ограниченных операторов порождённая оператором $(-A)$.

Доказательство. Очевидно, что уравнение $P_0(d/dz)u(z)=0$ имеет общее решение из $H_{2,\alpha}$ в виде $u_0(z)=e^{-zA}x$, где $x\in H$. Покажем, что $e^{-zA}x\in W^2_{2,\alpha}$ тогда и только тогда, когда $x\in H_{3/2}$. Действительно, если $e^{-zA}x\in W^2_{2,\alpha}$, то граничные функции $e^{-te^{\pm i\alpha}}x\in W^2_2(R_+;H)$. Тогда по теореме о следах [1] $u(0)=x\in H_{3/2}$. Докажем обратного. Пусть $x\in H_{3/2}$. Тогда существует вектор $y\in H$ такой, что $A^{3/2}x=y$. По определению

$$\begin{aligned}\|e^{-zA}x\|^2_{W^2_{2,\alpha}} &=\|e^{-te^{i\alpha}A}x\|^2_{W^2_2(R_+,H)}+\|e^{-te^{-i\alpha}A}x\|^2_{W^2_2(R_+,H)}=\\ &=2\left(\|A^2e^{-te^{i\alpha}A}x\|^2_{L_2(R_+,H)}+\|A^2e^{-te^{-i\alpha}A}x\|^2_{L_2(R_+,H)}\right)=\\ &=2\left(\|A^{1/2}e^{-te^{i\alpha}A}y\|^2_{L_2(R_+,H)}+\|A^{1/2}e^{-te^{-i\alpha}A}y\|^2_{L_2(R_+,H)}\right).\end{aligned}\tag{5}$$

Используя спектральное разложение оператора A получаем:

$$\left\| A^{1/2} e^{-te^{i\alpha}A} y \right\|^2_{L_2(R_+,H)} = \int_0^\infty \left(\int_{\mu_0}^\infty \left(\mu^{1/2} e^{-te^{\pm i\alpha}\mu} dE_\mu y,\ \mu^{1/2} e^{-te^{\pm i\alpha}\mu} dE_\mu y \right) \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{\mu_0}^\infty \mu e^{-2(\cos\alpha\mu)t} dE_\mu y, dE_\mu y \right) dt = \int_{\mu_0}^\infty \mu \left(\int_0^\infty e^{-2(\cos\alpha\mu)t} dt \right) (dE_\mu y, dE_\mu y) =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha} \|y\|^2 = \frac{1}{2\cos\alpha} \left\| A^{3/2} x \right\|^2 = \frac{1}{2\cos\alpha} \|x\|^2_{3/2}. \tag{6}$$

Учитывая (6) в равенстве (5) находим, что

$$\left\| e^{-zA} x \right\|^2_{W^2_{2,\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} \|x\|^2_{3/2}. \tag{7}$$

Следовательно, $e^{-zA} x \in W^2_{2,\alpha}$ при $x \in H_{3/2}$.

Следствие 1. Пусть A-положительно-определённый самосопряженный оператор, оператор $E + A^{-1}K$ обратим в пространстве $H_{3/2}$. Тогда задача (3), (4) имеет единственное регулярное решение

$$u_0(z) = -e^{-zA} \left(E + A^{-1}K \right)^{-1} A^{-1}\varphi, \quad \varphi \in H_{1/2}.$$

Действительно, из леммы 1 следует, что регулярное решение уравнения (1) имеет вид: $u_0(z) = e^{-zA}x$, где $x \in H_{3/2}$ принадлежит к определению. Из условия (4) следует, что $-(A+K)x = \varphi$ или $-\left(E + A^{-1}K\right)x = A^{-1}\varphi$, тогда $x = -\left(E + A^{-1}K\right)^{-1} A^{-1}\varphi \in H_{3/2}$ при $\varphi \in H_{1/2}$.

Следовательно,

$$u_0(z) = -e^{-zA} \left(E + A^{-1}K \right)^{-1} A^{-1}\varphi.$$

В общем случае имеет место

Теорема 1. Пусть A-положительно-определённый самосопряженный оператор, оператор $E + A^{-1}K$ обратим в $H_{3/2}$, $B = A_1 A^{-1}$ ограничен в H, причем $\|B\| \le \beta_k^{-1}$, где

$$\beta_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2\cos\alpha} & \text{при} \quad \operatorname{Re} A^{-1}K \ge 0 \quad \text{в} \quad \mathrm{H}_{3/2}, \\[2ex] \dfrac{1}{2\cos\alpha} \left(1 - 4 \left| \inf\limits_{\|y\|_{3/2}=1} \dfrac{\operatorname{Re}\left(A^{-1}Ky, y\right)}{1 + \left\| A^{-1}Ky \right\|^2_{3/2}} \right|^2 \right)^{-1/2}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда задача (1),(2) регулярно разрешима.

Доказательство. Пусть $\varphi \in H_{1/2}$. Тогда по следствию 1 $u_0(z) = -e^{-zA}\left(E + A^{-1}K\right)^{-1} A^{-1}\varphi$ есть регулярное решение задачи (3), (4). Теперь будем искать регулярное решение задачи (1), (2) в виде $u(z) = u_0(z) + u_1(z)$, где $u_1(z) \in W_{2,\alpha}^2(K)$, т.е. $u_1'(0) - Ku_1(0) = 0$. Таким образом, для $u_1(z) \in W_{2,\alpha}^2(K)$ получаем следующее уравнение

$$P(d/dz)u_1(z) = -A_1 \frac{du_0(z)}{dz}, \quad z \in S_\alpha . \tag{8}$$

Применяя лемму 1, получаем:

$$\|g(z)\|_{H_{2,\alpha}} = \left\| - A_1 \frac{du_0(z)}{dz} \right\|_{H_{2,\alpha}} = \left\| A_1 A e^{-zA}\left(E + A^{-1}K\right)^{-1} A^{-1}\varphi \right\|_{H_{2,\alpha}} \le$$

$$\le \|B\| \left\| A^2 e^{-zA}\left(E + A^{-1}K\right)^{-1} A^{-1}\varphi \right\|_{H_{2,\alpha}} \le \|B\| \left\| e^{-zA}\left(E + A^{-1}K\right)^{-1} A^{-1}\varphi \right\|_{W_{2,\alpha}^2} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} \left\| \left(E + A^{-1}K\right)^{-1} A^{-1}\varphi \right\|_{3/2} \le const \left\| A^{-1}\varphi \right\|_{3/2} = const \|\varphi\|_{1/2}, \tag{9}$$

т.е. $g(z) \in H_{2,\alpha}$. Таким образом, для определения $u_1(z)$ получаем следующую краевую задачу

$$P(d/dz)u_1(z) = g(z), \quad z \in S_\alpha, \tag{10}$$

$$u_1'(z) - Ku_1(0) = 0. \tag{11}$$

Из результатов работы [5] следует, что задача (9), (10) имеет единственное регулярное решение $u_1(z)$ из пространства $W_{2,\alpha}^2(K)$ при любом $g(z) \in H_{2,\alpha}$ и $\|u_1(z)\|_{W_{2,\alpha}^2} \le const \|g(z)\|_{H_{2,\alpha}}$. Таким образом, $u(z) = u_0(z) + u_1(z)$ будет регулярным решением задачи (1), (2) и из (9) следует, что

$$\|u(z)\|_{W_{2,\alpha}^2} \le \|u_0(z)\|_{W_{2,\alpha}^2} + \|u_1(z)\|_{W_{2,\alpha}^2} \le const \|\varphi\|_{1/2}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, причем $\|B\| < N_0^{-1}$, где

$$N_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{при} \quad \operatorname{Re} A^{-1}K \ge 0 \quad \text{в} \quad \mathrm{H}_{3/2}, \\ \dfrac{1}{2}\left(1 - 4\left| \inf\limits_{\|y\|_{3/2}=1} \dfrac{\operatorname{Re}\left(A^{-1}Ky, y\right)_{3/2}}{1 + \left\|A^{-1}Ky\right\|_{3/2}^2} \right|^2\right)^{-1/2}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда задача

$$P(d/dt)u(t)=0, \quad t\in R_+ \ , \tag{12}$$
$$u(0)-Ku'(0)=\varphi\,. \tag{13}$$
регулярна разрешима.

Так как $\beta_k^{-1} < N_0^{-1}$ при всех $\alpha \in \left(0, \pi/2\right)$, то из теоремы 1 следует

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 задача (12),(13) регулярно разрешима.

Следствие 3. При любом $u(t)\in W_2^2\left(R_+;H\right)$ и с условием в нуле $u'(0)-Ku(0)=0$ имеет место неравенство

$$\left\|P(d/dt)u(t)\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \ge const\left\|u(t)\right\|^2_{W_2^2(R_+;H)}\,. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $u(t)\in W_2^2\left(R_+;H\right)$ и $u'(0)-Ku(0)=0$. Обозначим через $P(d/dt)u(t)=g(t)$. Так как $u(t)$-регулярное решение задачи $P(d/dt)u(t)=g(t)$, $u'(0)-Ku(0)=0$, то из [3] следует, что

$$\left\|u(t)\right\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const\left\|g(t)\right\|_{L_2(R_+;H)}\,.$$

Отсюда следует неравенство (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Гасымов М.Г. О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений // ДАН СССР, 1977, т.235, №3, с.505-508.
3. Мирзоев С.С., Сафаров Р.Ф. О голоморфных решениях некоторых краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа //Украинский математический журнал, 2011, т.63, №3, с. 416-420.
4. Мирзоев С.С., Велиев С.Г. О решениях одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в классе голоморфных вектор-функций // Украинский математический журнал, 2010, т.62, №6, с.801-813.
5. Мирзоев С.С., Гулиева Ф.Г. О решениях одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами // Математические заметки, 2009. т.86, №5, с.797-800.
6. Mirzoev S.S., Veliev S.G. On the estimations of the norm of intermediate derivatives in some abstract space //J. Math. Phys., Anal. and Geom., 2010, v. 6, №1, p.73-83.

İKİTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HOLOMORF HƏLLƏRİNİN XASSƏLƏRİ HAQQINDA

R.F.SƏFƏROV

XÜLASƏ

Məqalədə operator əmsallı ikinci tərtib elliptik tip diferensial tənliklər üçün bəzi sərhəd məsələlərinin şərtinə operator əmsallar daxil olduqda, onların müəyyən sektorlarda holomorf

hƏllƏrinin varlığı vƏ yeganƏliyini tƏmin edƏn şƏrtlƏr tapılmışdır. Bu şƏrtlƏr operator-diferensial tƏnliyin Əmsalları vƏ sƏrhƏd şƏrtinƏ daxil olan operatorların xassƏlƏri ilƏ ifadƏ edilmişdir.

Açar sözlƏr: Hilbert fƏzası, operator-diferesial tƏnlik, öz-özünƏ qoşma operator.

ON SOME PROPERTIES OF HOLOMORPHIC SOLUTIONS OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

R.F.SAFAROV

SUMMARY

In the work, the conditions of uniqueness and existence of the holomorphic solutions in some sectors are found for some boundary problems for the second order elliptic type differential equations with operator coefficients. These conditions are expressed by the properties of the coefficients of the operator-differential equations and operators involved in the boundary condition.

Key words: Hilbert space, operator-differential equation, self-adjoint operator.

Поступила в редакцию: 30.09.2011 г.
Принята к печати: 05.03.2012 г.