BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2012*

УДК 02.25.19

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА

Р.А.АЛИЕВ, А.Ф.АМРАХОВА
Бакинский Государственный Университет
aliyevrashid@hotmail.ru

В работе сингулярный интегральный оператор с ядром Гильберта и регулярный интегральный оператор аппроксимируется последовательностями операторов специального вида, доказывается, что для сингулярного оператора аппроксимирующие операторы сохраняют свойства, аналогичные основным свойствам этого оператора, и поэтому полученные оценки с точки зрения скорости сходимости дают более точные результаты.

Ключевые слова: *сингулярный интеграл, регулярный интеграл, ядро Гильберта, аппроксимирующие операторы, скорости сходимости.*

Пусть $L_2 = L_2(0, 2\pi)$ пространство квадратично-суммируемых 2π-периодических функций. Рассмотрим в L_2 сингулярный интегральный оператор с ядром Гильберта

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\tau - t}{2}\varphi(\tau)d\tau$$

и регулярный интегральный оператор

$$(\text{к }\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

где функция $K(t,\tau)$ 2π-периодична по обоим аргументам и непрерывна в $[0;2\pi]^2$.

В работе операторы S и к аппроксимируется последовательностями операторов вида

$$(R_n\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k^{(n)}(t)\varphi\left(t + \frac{\pi k}{n}\right),$$

где $\alpha_k^{(n)}(t)$-постоянные функции в случае S и непрерывные функции, выраженные через ядро, в случае к. Для сингулярного оператора S аппроксимирующие операторы сохраняют свойства (см. теорему 1), аналогичные основным свойствам этого оператора, и поэтому полученные оценки с точки зрения скорости сходимости дают более точные результаты, нежели оценки, полученные ранее другими методами (см. [1]-[5]). Для сингулярного интегрального оператора с ядром Коши аналогичные аппроксимации и их применения к сингулярным интегральным уравнениям приведены в [6].

Следующее утверждение хорошо известно и вытекает из соответствующих результатов [7]-[9].

Теорема А ([7]-[9]). Операторы S и к действуют из L_2 в L_2, при этом

$$\|S\|_{L_2\to L_2}=1,\ \|\text{к}\|_{L_2\to L_2}\le\|\mathrm{K}\|_\infty\overset{def}{=}\max_{t,\tau\in[0;2\pi]}\left|K(t,\tau)\right|$$

и для любого $\varphi\in L_2$

$$(S^2\varphi)(t)=-\varphi(t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)d\tau\,.$$

Рассмотрим последовательность операторов

$$(S_n\varphi)(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}ctg\left(-\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)\varphi\left(t+\frac{\pi(2k+1)}{n}\right),\quad n=2,3,\ldots$$

Вычислим $S_n(\cos mt)$ и $S_n(\sin mt)$ для любого $m\in Z$ (Z множество целых чисел):

$$S_n(\cos mt)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}ctg\left(-\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)\cdot\cos\left(mt+\frac{\pi(2k+1)m}{n}\right)=$$

$$=-\frac{1}{n}\cos mt\cdot\sum_{k=0}^{n-1}ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\cdot\cos\frac{\pi(2k+1)m}{n}+$$

$$+\frac{1}{n}\sin mt\sum_{k=0}^{n-1}ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)m}{n}=$$

$$=-\frac{1}{n}\cos mt\cdot J_{1,m}^{(n)}+\frac{1}{n}\sin mt\cdot J_{2,m}^{(n)},\tag{1}$$

$$S_n(\sin mt)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}ctg\left(-\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)\cdot\sin\left(mt+\frac{\pi(2k+1)m}{n}\right)=$$

$$=-\frac{1}{n}\sin mt\cdot\sum_{k=0}^{n-1}ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\cdot\cos\frac{\pi(2k+1)m}{n}-$$

$$-\frac{1}{n}\cos mt\sum_{k=0}^{n-1}ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)m}{n}=$$

$$=-\frac{1}{n}\sin mt\cdot J_{1,m}^{(n)}-\frac{1}{n}\cos mt\cdot J_{2,m}^{(n)},\tag{2}$$

где

$$J_{1,m}^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\cdot\cos\frac{\pi(2k+1)m}{n},$$

$$J_{2,m}^{(n)}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\cdot\sin\frac{\pi(2k+1)m}{n}.$$

Далее, имеем

$$J_{1,m}^{(n)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\cdot\cos\frac{\pi(2k+1)m}{n}+\sum_{l=n-1}^{0} ctg\frac{\pi(2l+1)}{2n}\cdot\cos\frac{\pi(2l+1)m}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\cdot\cos\frac{\pi(2k+1)m}{n}+\right.$$

$$\left.+ctg\left(\pi-\frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)\cos\left(2\pi m-\frac{\pi(2k+1)m}{n}\right)\right)=0,\quad m\in Z; \tag{3}$$

$$J_{2,0}^{(n)}=0, \tag{4}$$

$$J_{2,m}^{(n)}=J_{2,m-1}^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1} ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}\left[\sin\frac{\pi(2k+1)m}{n}-\sin\frac{\pi(2k+1)(m-1)}{n}\right]=$$

$$=J_{2,m-1}^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1} ctg\frac{\pi(2k+1)}{2n}2\sin\frac{\pi(2k+1)m}{2n}\cos\frac{\pi(2k+1)(2m-1)}{2n}=$$

$$=J_{2,m-1}^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1} 2\cos\frac{\pi(2k+1)}{2n}\cos\frac{\pi(2k+1)(2m-1)}{2n}=$$

$$=J_{2,m-1}^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{\pi(2k+1)m}{n}+\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{\pi(2k+1)(2m-1)}{2n},\quad m\in Z. \tag{5}$$

Учитывая, что при $m\neq np\quad (p\in Z)$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{\pi(2k+1)m}{n}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi m}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}2\sin\frac{\pi m}{n}\cos\frac{\pi(2k+1)m}{n}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi m}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sin\frac{\pi(2k+2)m}{n}-\sin\frac{\pi\cdot 2km}{n}\right]=\frac{1}{2\sin\frac{\pi m}{n}}\left[\sin\frac{\pi\cdot 2nm}{n}-\sin\frac{\pi\cdot 0}{n}\right]=0,$$

а при $m=np\quad (p\in Z)$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{\pi(2k+1)m}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\pi(2k+1)p=n\cdot(-1)^p,$$

из (4), (5) следует

$$J_{2,m}^{(n)} = \begin{cases} 0, \text{ при } & m = np \quad (p \in Z) \\ n, \text{ при } & m \in \overline{2pn+1,\ n(2p+1)-1} \quad (p \in Z); \\ -n, \text{ при } & m \in \overline{(2p+1)n+1,\ (2p+2)n-1} \quad (p \in Z) \end{cases} \tag{6}$$

Имея в виду (3), (6) из (1), (2) получим, что для любого $m \in Z$

$$S_n(\cos mt) = \lambda_m^{(n)} \sin mt, \quad S_n(\sin mt) = -\lambda_m^{(n)} \cos mt, \tag{7}$$

где

$$\lambda_m^{(n)} = \begin{cases} 0, \text{ при } & m = np \quad (p \in Z) \\ 1, \text{ при } & m \in \overline{2pn+1,\ n(2p+1)-1} \quad (p \in Z); \\ -1, \text{ при } & m \in \overline{(2p+1)n+1,\ (2p+2)n-1} \quad (p \in Z) \end{cases}$$

Теорема 1. Операторы S_n, $n = 2,3,\ldots$ действуют в L_2, при этом

$$\left\| S_n \right\|_{L_2 \to L_2} = 1,$$

для любого тригонометрического полинома $T_{n-1}(t)$ порядка не выше $n-1$

$$\left(S_n T_{n-1} \right)(t) = (S T_{n-1})(t), \tag{8}$$

для любого $\varphi \in L_2$

$$\left(S_n^2 \varphi \right)(t) = -\varphi(t) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(t + \frac{2\pi k}{n} \right). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Тогда, учитывая (7), получим

$$(S_n \varphi)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(n)} (a_k \sin kt - b_k \cos kt).$$

Так как коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$ равны ± 1 или 0 для всех $k \in N$, то из неравенства

$$\left\| S_n \varphi \right\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \lambda_k^{(n)} \right|^2 \cdot (a_k^2 + b_k^2) \le \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \left\| \varphi \right\|_{L_2}^2$$

и из равенства

$$S_n(\cos t) = \sin t,$$

следует, что

$$\left\| S_n \right\|_{L_2 \to L_2} = 1.$$

Для любого полинома

$$T_{n-1}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

в силу (7) вытекает равенство

$$(S_nT_{n-1})(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(n)}(a_k\sin kt-b_k\cos kt)=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\sin kt-b_k\cos kt)=(ST_{n-1})(t)\,.$$

Докажем равенство (9). Введем вспомогательный оператор $H_n:L_2\to L_2$ по формуле

$$(H_n\varphi)(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(t+\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Тогда для любого $m\in Z$ при $m\neq np\quad(p\in Z)$ имеем

$$(H_n\cos mt)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(mt+\frac{2\pi mk}{n}\right)=\frac{1}{2n\sin\frac{\pi m}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}2\sin\frac{\pi m}{n}\cos\left(mt+\frac{2\pi mk}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2n\sin\frac{\pi m}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\sin\left(mt+\frac{\pi m(2k+1)}{n}\right)-\sin\left(mt+\frac{\pi m(2k-1)}{n}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\sin\frac{\pi m}{n}}\left[\sin\left(mt+\frac{\pi m(2n-1)}{n}\right)-\sin\left(mt-\frac{\pi m}{n}\right)\right]=0,$$

$$(H_n\sin mt)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(mt+\frac{2\pi mk}{n}\right)=\frac{1}{2n\sin\frac{\pi m}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}2\sin\frac{\pi m}{n}\sin\left(mt+\frac{2\pi mk}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2n\sin\frac{\pi m}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\cos\left(mt+\frac{\pi m(2k-1)}{n}\right)-\cos\left(mt+\frac{\pi m(2k+1)}{n}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\sin\frac{\pi m}{n}}\left[\cos\left(mt-\frac{\pi m}{n}\right)-\cos\left(mt+\frac{\pi m(2n-1)}{n}\right)\right]=0,$$

а при $m=np\quad(p\in Z)$, получим

$$(H_n\cos mt)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(mt+\frac{2\pi npk}{n}\right)=\cos mt,$$

$$(H_n\sin mt)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(mt+\frac{2\pi npk}{n}\right)=\sin mt.$$

Поэтому

$$(H_n\varphi)(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{p=1}^{\infty}(a_{pn}\cos pnt+b_{pn}\sin pnt)\,. \qquad (10)$$

Учитывая (7) и (10) получим

$$(S_n^2\varphi)(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{(n)}\right)^2(-a_k\cos kt-b_k\sin kt)=-\sum_{k=1,k\neq pn}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=$$

$$=-\varphi(t)+\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1,k=pn}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=-\varphi(t)+(H_n\varphi)(t).$$

Теорема доказана.

Пусть

$$E_{n-1}^{(2)}(\varphi)=\inf\left\|\varphi(\cdot)-T_{n-1}(\cdot)\right\|_{L_2},$$

где infimum берется по всем тригонометрическим полиномам порядка не выше $n-1,\ n\in N$.

Теорема 2. Последовательность операторов $\{S_n\}$ сильно сходится к оператору S в L_2, при этом для любого $\varphi\in L_2$ справедлива оценка

$$\left\|S\varphi-S_n\varphi\right\|_{L_2}\le 2E_{n-1}^{(2)}(\varphi). \qquad (11)$$

Доказательство. Пусть

$$T_{n-1}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

тригонометрический полином наилучшего приближения для функции $\varphi\in L_2$ в L_2, т. е.

$$E_n^{(2)}(\varphi)=\left\|\varphi(\cdot)-T_{n-1}(\cdot)\right\|_{L_2}.$$

Тогда из теоремы 1 и из теоремы А следует, что

$$\left\|S\varphi-S_n\varphi\right\|_{L_2}=\left\|S(\varphi-T_{n-1})-S_n(\varphi-T_{n-1})\right\|_{L_2}\le\left(\left\|S\right\|_{L_2\to L_2}+\left\|S_n\right\|_{L_2\to L_2}\right)\cdot\left\|\varphi-T_{n-1}\right\|_{L_2}=2E_{n-1}^{(2)}(\varphi)$$

Теорема доказана.

Рассмотрим последовательность операторов

$$(\text{к}_n\,\varphi)(t)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}K\left(t,t+\frac{\pi k}{n}\right)\varphi\left(t+\frac{\pi k}{n}\right).$$

Пусть

$$E_{n-1}^{(2)}(K)=\inf\left\|K(t,\tau)-P_{n-1}(t,\tau)\right\|_{L_2\left((0,2\pi)^2\right)},$$

где

$$P_{n-1}(t,\tau)=\frac{\alpha_0(t)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k(t)\cos k\tau+\beta_k(t)\sin k\tau)$$

и **infimum** берется по всем тригонометрическим полиномам $\alpha_k(t),\ k=\overline{0,n-1},\ \ \beta_k(t),\ k=\overline{1,n-1}$, порядка не выше n, $n\in N$.

Теорема 3. Последовательность операторов $\{к_n\}$ сильно сходится к оператору к в L_2, при этом для любого $\varphi\in L_2$ справедлива оценка

$$\|к\varphi\text{-}к_n\,\varphi\|_{L_2}\le\|K\|_\infty\cdot E_{n-1}^{(2)}(\varphi)+2E_{n-1}^{(2)}(K)\cdot\left\{E_{n-1}^{(2)}(\varphi)+\|\varphi\|_{L_2}\right\}. \qquad (12)$$

Доказательство. Пусть

$$E_{n-1}^{(2)}(\varphi)=\|\varphi(\cdot)-T_{n-1}(\cdot)\|_{L_2},\quad E_{n-1}(K)=\|K(\cdot,\cdot)-P_{n-1}(\cdot,\cdot)\|_{L_2\left((0,2\pi)^2\right)},$$

где $P_{n-1}(t,\tau)=\dfrac{\alpha_0(t)}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k(t)\cos k\tau+\beta_k(t)\sin k\tau)$.

Учитывая, что для любого полинома

$$r_{2n-2}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{2n-2}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

справедливо равенство (см. (10))

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}r_{2n-2}\left(t+\frac{\pi k}{n}\right)=(H_{2n}r_{2n-2})(t)=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}r_{2n-2}(t)dt,$$

имеем

$$(к\varphi)(t)\text{-}(к_n\,\varphi)(t)=(к\text{-}к_n)(\varphi-T_{n-1})(t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[K(t,\tau)-P_{n-1}(t,\tau)\right]T_{n-1}(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\left[K\left(t,t+\frac{\pi k}{n}\right)-P_{n-1}\left(t,t+\frac{\pi k}{n}\right)\right]\cdot T_{n-1}\left(t+\frac{\pi k}{n}\right).$$

Отсюда, в силу неравенств

$$\|к\|_{L_2\to L_2}\le\|K\|_\infty,\ \ \|к_n\|_{L_2\to L_2}\le\|K\|_\infty,\ \ \|T_{n-1}\|_{L_2}\le\|\varphi\|_{L_2}+E_{n-1}^{(2)}(\varphi)$$

следует оценка (12). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1968, 324 с.
2. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Казанский университет, 1980, 411 с.
3. Кадушин В.П., Шакиров А.И. Об одном прямом методе решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта // Известия вузов. Математика, 2009, №6, с. 65-70.
4. Ермолаева Л.Б. Решение сингулярных интегральных уравнений методом осциллирующих функций // Известия вузов. Математика, 2009, №12, с. 28-38.
5. Jinyuan Du. On the collocation methods for singular integral equations with Hilbert kernel // Mathematics of computation, 2009, v. 78, № 266, p. 891-928.
6. Алиев Р.А. Новый конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений // Матем. заметки. 2006, т. 79, в. 6, с. 803-824.
7. Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М.-Л.: Гостехиздат, 1951, 210 с.

8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, т. I, 1965, 630 с.
9. Michlin S.G., Prößdorf S. Sinqulare Integraloperatoren.- Berlin: Akademic-Verlag, 1980, 420 p.

HİLBERT NÜVƏLİ SİNQULYAR İNTEQRALIN APPROKSİMASİYASI HAQQINDA

R.Ə ƏLİYEV, A.F. ƏMRAHOVA

XÜLASƏ

İşdə Hilbert nüvəli sinqulyar inteqral operator və requlyar inteqral operator xüsusi şəkildə olan operatorlar ardıcıllığı ilə approksimasiya olunurlar. İsbat olunur ki, sinqulyar operator üçün approksimasiya operatorları bu operatorun əsas xassələrini saxlayırlar və buna görə də alınan qiymətləndirmələr yığılma sürəti nöqteyi-nəzərincə daha dəqiq nəticələr verir.

Açar sözlər: sinqulyar inteqral, requlyar inteqral, Hilbert nüvəsi, approksimasiya operatorları, yığılma sürəti.

APPROXIMATION OF THE SINGULAR INTEGRAL WITH HILBERT KERNEL

R.A.ALIYEV, A.F.AMRAHOVA

SUMMARY

This article deals with a singular integral operator with Hilbert kernel and a regular integral operator can be approximated by sequences of operators of special form; it is proved that for a singular operator, approximating operators retain properties similar to the basic properties of this operator, and therefore the estimates obtained in terms of speed of convergence give more accurate results.

Key words: singular integral, regular integral, Hilbert kernel, approximating operators, speed of convergence.

Поступила в редакцию: 26.10.2011 г.
Принята к печати: 05.03.2012 г.