BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

MEXANİKA

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ О ФЛАТТЕРЕ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ МАЛОГО РАСТВОРА

М.А.НАДЖАФОВ

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет

В математической модели аэроупругих колебаний и устойчивости оболочек вследствие нелинейности наиболее сложным является вопрос об определении избыточного давления. Во многих работах показано, что в большинстве случаях формула поршневой теории оказывается довольно грубым приближением; прежде всего это относится к случаям, когда параметры невозмущенного потока неравномерны.

В данной работе в случае умеренных сверхзвуковых скоростей получено уточненное выражение для избыточного давления, более полно учитывающее неравномерность основного потока в задаче о флаттере конической оболочки.

Пусть $\theta = \theta_0, r \in [r_0, \infty]$ - коническая поверхность в сферической системе координат r, θ, ψ; ее часть $[r_1 > r_0, r_2]$ занимает тонкая упругая оболочка, остальная часть поверхности считается жесткой. Угол θ_0 мал, так что $\theta_0^2 << 1, \sin\theta_0 \sim \theta_0, \cos\theta_0^2/2 \sim 1$. Внутри этой конструкции протекает газ, параметры которого в невозмущенном состоянии (как если бы оболочка покосилась) обозначим $u_0(r), p_0(r), \rho_0(r), a_0(r)$ - соответственно, скорость, давление, плотность, скорость звука.

Возмущенное течение с хорошим приближением считаем потенциальным [4], поэтому

$$\bar{u} = \{u_r, u_\theta, u_\psi\} = \left\{u_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \frac{\partial\varphi}{r\delta\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right\}. \quad (1)$$

Обозначим $a = a_0 + a'$ - скорость звука в возмущенном потоке, тогда из интеграла Коши – Лагранжа найдем

$$a' = -\frac{\gamma - 1}{2a_0}\left(u_0\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \quad (2)$$

здесь γ - показатель политропы. Потенциал φ подчиняется известному уравнению [4]

$$a^2\overline{\nabla}\cdot\overline{a}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t}+2\overline{u}\cdot\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\overline{u}\cdot\left[\left(\overline{u}\cdot\overline{\nabla}\right)\overline{u}\right], \qquad (3)$$

в котором $\overline{\nabla}$ - оператор Гамильтона.

Введем безмерную переменную $r'=r/\ell, \ell=r_2-r_1$, положим $\varphi=\varphi_1\exp(\omega t)\cos m\psi$, оставив прежние обозначения; подставим (1) и (2) в (3) и линеаризуем по малым возмущениям, получим в результате

$$\begin{gathered}\left(M^2-1\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\left[2M\frac{\ell\omega}{a_0}+2\frac{M}{a_0}\frac{\partial u_0}{\partial r}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)-\frac{2}{r}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\\ \left[\frac{\ell^2\omega^2}{a_0^2}+\left(\gamma-1\right)\frac{M^2}{a_0}\frac{\ell\omega}{a_0}\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}\right]\varphi-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{r\delta\theta}\right)=0\end{gathered}. \qquad (4)$$

Обозначим $W_0(r,\psi,t)$ - прогибы оболочки, положим $W_0=W(r)\exp(\omega t)\cos m\psi$ и запишем условие непроницаемости на поверхности оболочки

$$\frac{\partial\varphi}{r\delta\theta}\Big|_{\theta=\theta_0}=u_0\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\ell\omega}{u_0}W-\frac{1}{r}W\right), \qquad (5)$$

на оси оболочки $\theta=0$ скорость u_0 обращается в нуль

$$u_\theta\Big|_{\theta=0}=\frac{1}{\ell}\frac{\partial\varphi}{r\delta\theta}\Big|_{\theta=0}=0. \qquad (6)$$

Для избыточного давления примем $\Delta p=\Delta q\exp(\omega t)\cdot\cos m\psi, \Delta q$ при этом выразится формулой

$$\Delta q=-\frac{\rho_0u_0}{\ell}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\omega\ell}{u_0}\varphi\right)\Big\|_{\theta=\theta_0}. \qquad (7)$$

Возможность приближенного решения задачи (4)-(7) основана на предположении малой конусности, при этом параметры основного состояния – мало и плавно меняющиеся функции радиуса. Наоборот, параметры возмущенного состояния могут быть быстро осциллирующими. Введем новую переменную $\zeta=r\sin\theta$; в пределах оболочки

$d\zeta=\sin\theta dr+r\cos\theta\, d\theta\cong\theta dr+rd\theta\cong rd\theta,\ 2/r<<1$. Из (4) и (5) получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{\zeta}-\frac{m^2}{\zeta^2}\varphi-\left(M^2-1\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-2A(r)\frac{\partial\varphi}{\partial r}-B(r)\varphi=0, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_0}=u_0\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\ell\omega}{u_0}W\right),\ \zeta_0=r\sin\theta_0, \qquad (9)$$

$$A(r) = M\frac{\ell\omega}{a_0} + \frac{M}{a_0}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)\frac{\partial u_0}{\partial r},$$

$$B(r) = \frac{\ell^2\omega^2}{a_0^2} + (\gamma - 1)\frac{M^2}{a_0}\frac{\ell\omega}{a_0}\frac{\partial u_0}{\partial r}.$$

Введем новую переменную соотношением: $r = r_1 + x;$ в области $x \le 0$ возмущения отсутствуют, а в (8) $M^2(x), A(x), B(x) -$ «почти постоянные» параметры, поэтому после преобразования Лапласа по x из (8) получим

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\zeta} - \left(\beta^2 + \frac{m^2}{\zeta^2}\right)\varphi^* = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\varphi^*}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_0} = u_0\left(s + \frac{\ell\omega}{u_0}\right)W^*, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\varphi^{**}}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} = 0. \tag{12}$$

Здесь обозначено: $\beta^2 = \left(M^2 - 1\right)s^2 + A \cdot s + B, s$ - параметр преобразования. Система (10)-(12) имеет решение

$$\varphi^* = u_0\left(s + \frac{\ell\omega}{u_0}\right)\frac{I_m(\beta\zeta)}{\beta I'_m(\beta\zeta_0)}W^*;$$

для избыточного давления из (7) находим

$$\Delta q^{**} = -\frac{\rho_0 u_0^2}{\ell}\left(s + \frac{\ell\omega}{u_0}\right)^2\frac{I_m(\beta\zeta_0)}{\beta I'_m(\beta\zeta_0)}W^{**},$$

здесь I_m - функция Бесселя, штрих-производная по аргументу.

На основании оценок [3] это выражение может быть приближенно заменено его асимптотическим представлением (обозначено $\Omega = \ell\omega / u_0$)

$$\Delta q^{**} \cong -\frac{\rho_0 u_0^2}{\ell\sqrt{M^2 - 1}}\frac{(sM + \Omega)^2 W^*}{(s + s_1)^{1/2}} - \frac{\rho\, u_0^2}{2\zeta_0\ell(M^2 - 1)}\frac{(sM + \Omega)^2 W^*}{(s + s_1)(s + s_2)}$$

$$\left(M^2 - 1\right)s_{1,2} = A \pm \left[A^2 - (M^2 - 1)B\right]^{1/2} \equiv A \pm \sqrt{D}.$$

Оригинал $\Delta q(x)$ легко восстанавливается

$$\begin{aligned}\Delta q = &-\frac{\rho_0 a_0^2 M}{\ell\sqrt{M^2 - 1}}\left[(2\Omega - \alpha_1 M)W + M\frac{\partial W}{\partial \overline{\overline{X}}} + \int_0^x A_v H_v(x - \tau)W(\tau)d\tau\right] - \\ &-\frac{\rho_0 a_0^2}{2\zeta_0\,\ell(M^2 - 1)}\left[M^2 W - \frac{(Ms_1 - \Omega)^2}{s_1 - s_2}\int_0^x e^{-s_1(x-\tau)}W(\tau)d\tau + \frac{(Ms_2 - \Omega)^2}{s_1 - s_2}\int_0^x e^{-s_2(x-\tau)}W(\tau)d\tau\right];\end{aligned} \tag{13}$$

по индексу $v -$ суммирование от нуля до двух. Введены обозначения

$$H_v = I_v(\alpha_2 x)e^{-\alpha_1 x};\ A_0 = \frac{\Omega^2}{M} + \frac{M}{2}\alpha_2^2 - \alpha_1(2\Omega - \alpha_1 M),$$

$$A_1 = 2\alpha_2(\Omega - \alpha_1 M);A_2 = \frac{M}{2}\alpha_2^2;\alpha_1 = \frac{A}{M^2-1};\alpha_2 = \frac{\sqrt{D}}{M^2-1}.$$

При умеренных сверхзвуковых скоростях потока, $M \gtrsim \sqrt{2}$, упростить (13) можно на основании предположения о малой конусности и оценки $(\partial u_0 / \partial x)/a_0 << 1$. Получим :

$$\begin{gathered}
A = M\Omega; B = \Omega^2; D = \Omega^2; s_1 = \frac{\Omega}{M-1}; s_2 = \frac{\Omega}{M+1};\\
\alpha_1 = \frac{M\Omega}{M^2-1};\alpha_2 = \frac{\Omega}{M^2-1};2\Omega - \alpha_1 M = \frac{M^2-2}{M^2-1}\Omega;\\
A_0 = \frac{(M^2+2)\Omega^2}{2M(M^2-1)^2};A_1 = -\frac{2\Omega^2}{(M^2-1)^2};A_2 = \frac{M\Omega^2}{2(M^2-1)^2},\\
\frac{(Ms_1-\Omega)^2}{s_1-s_2} = \frac{(M+1)\Omega}{2(M-1)};\ \frac{(Ms_2-\Omega)^2}{s_1-s_2} = \frac{(M-1)\Omega}{2(M+1)}.
\end{gathered} \tag{14}$$

Как видно, даже при таком упрощении формула для Δq остается достаточно сложной и принципиально отличается от поршневой. При больших сверхзвуковых скоростях, $M >> 1$, роль интегральных слагаемых становится несущественной, и (13) обращается в формулу поршневой теории с добавлением слагаемого - $[\rho_0 a_0^2 /(2\zeta_0 \ell)]\ W$, которое имеет смысл винклеровского основания. Интегральным слагаемым в (13), с учетом обозначений (14), можно с достаточной доли условности приписать некоторый механический смысл. В первом слагаемом – это фиктивная присоединенная масса (сами интегралы довольно сложно зависят от Ω); во втором – это фиктивное аэродинамическое демпфирование (с той же оговоркой).

Обозначим $\Phi_1 = \Phi(x)\exp(\omega t)\cos m\psi$ - функцию напряжений; колебания оболочки будут описываться системой уравнений

$$L_1(W,\Phi) + \rho_1 h\omega^2 W - \Delta q = 0;\quad L_2(W,\Phi) = 0,$$

которые вместе с однородными граничными условиями составляют задачу на собственные значения. Заметим, что $\Omega = \ell\omega / a_0$; по теории одномерного течения $a_0 = a^* f_1(M) = a^* f(x)$, где a^* - скорость звука в некотором фиксированном сечении; поэтому собственным числом следует считать $\Omega^* = \ell\omega / a^*$. Задача флаттера ставится теперь так: определить критические значения параметров из условия $\mathrm{Re}\,\Omega^{*}=0$, которые фиксируют границу областей устойчивых $(\mathrm{Re}\,\Omega^{*}<0)$ и неустойчивых $(\mathrm{Re}\,\Omega^{*}>0)$ колебаний. Сформулированная задача представляет значительный интерес, однако при фактическим исследовании вызывает существенные трудности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Закон плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике и проблема панельного флаттера.// Изв. РАН. Механ. Твердого тела. 1995. №6. 138-142.
2. Кийко И.А. Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и пологой оболочки, обтекаемой потоком газа с большой сверхзвукой скоростью.// Прикл. матем. и механ. 1999. т.63, вып. 2. 305-312.
3. Кийко И.А. Постановка задачи об аэроупругих колебаниях конической оболочки малого раствора, внутри которой с сверхзуковой скоростью протекает газ.// Вест. Моск.ун-та. Сер.1. Математика и механика. 2004.№3. 58-61.
4. Основы газовой динамики. // Под ред. Г. Эммонса. Пер. с английского.М., ИЛ, 1963.
5. Maqsud A.Najafov. Statement of a conical shell flutter problem. Proceedings of Institute of mathematics and mechanics. Baku – 2006. XXIV Volume.

SİVRİ KONİK ÖRTÜK ÜÇÜN FLATTER HAQQINDA MƏSƏLƏNİN QOYULUŞU

M.A.NƏCƏFOV

XÜLASƏ

Qeyri-xəttilik olduğuna görə örtüklərin aeroelastik rəqslərinin və dayanıqlığının riyazi modelində ən çətin məsələ izafi təzyiqin təyinidir. Bir çox işlərdə göstərilib ki, əksər hallarda porşen nəzəriyəsinin düsturu kifayət qədər kobud yaxınlaşma olur və bu, ilk növbədə axının parametrləri qeyri-müntəzəm olan hala aiddir. Bu işdə konik örtüklü flatter məsələsində əsas axın qeyri-müntəzəm olduqda səs sürətindən azacıq yüksək olan halda izafi təzyiq üçün dəqiqləşdirilmiş ifadə alınıb.

ON THE FORMULATION OF THE PROBLEM ABOUT THE FLUTTER OF A CONICAL SHELL WITH THE SMALL SPREAD

M.A.NAJAFOV

SUMMARY

Aeroelastic oscillation and shell stability in consequence of nonlinearity were determined to be the most difficult in the mathematical model.

Question on determination excess pressure in many works showed that in most cases formula of piston theory presents enough rough approximation. First of all this is pertinent to cases, when parameters of undisturbed current are unequal.

In the current research in moderate supersonic velocity case specified expression was obtained. For excess pressure, considered irregularity of main current is more full in the task on flutter of conical shell.