BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

О СУЩЕСТВОВАНИИ МНОГОМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА, ПОРОЖДЕННОГО ОПЕРАТОРОМ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

А.А.АКПЕРОВ
Бакинский Государственный Университет

Систематические исследования по многомерным сингулярным интегралам, порожденными оператором обобщенного сдвига, берет начало с работ Н.А.Кипрянова и М.И.Ключанцева, где, в частности, для них доказаны теоремы типа теорем Привалова. Дальнейшее развитие этих результатов принадлежит С.К.Абдуллаеву, Б.К.Агарзаеву и А.А.Акперову. В данной работе рассматривается вопрос о существовании сингулярного интеграла в пространствах Гельдера с весом, когда оператор обобщенного сдвига берется по произвольному набору переменных.

Пусть R_n-евклидово пространство размерности $n \ge 1$, $R^+_{m+k,k} = \{(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots x_{m+k}) \in R_{m+k} : x_{m+1} > 0,\dots,x_{m+k} > 0\}$,
$S^+_{m+k,k} = \{x \in R^+_{m+k,k} : |x| = 1\}$,

$$T^s u(x) = c_\nu \int_0^\pi \dots \int_0^\pi u\Bigg(x' - s', \sqrt{x^2_{m+1} - 2x_{m+1}s_{m+1}\cdot\cos\alpha_1 + s^2_{m+1}},\dots,$$

$$,\dots,\sqrt{x^2_{m+k} - 2x_{m+k}\cdot s_{m+k}\cdot \cos\alpha_k + s^2_{m+k}}\Bigg) \sin^{2\nu_{m+1}-1}\alpha_1 \dots \sin^{2\nu_{m+k}-1}\alpha_k \, d\alpha_1 \dots d\alpha_k \qquad (1)$$

- оператор обобщенного сдвига (ООС), порожденный оператором Лапласа-Бесселя ([6,1,2]):

$$\Delta_B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=m+1}^{m+k} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2\nu_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

где

$$x = (x', x_{m+1},\dots,x_{m+k}),\; s = (s', s_{m+1},\dots,s_{m+k}),\; x', s' \in R_m,$$

$$\nu_{m+1} > 0,\dots,\nu_{m+k} > 0,\; c_\nu = \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\Big/ \Gamma\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\nu).$$

Положим $\Gamma = \{x \in R_{m+k} : x_{m+1},...x_{m+k} = 0\}$, $r_{\Gamma}(x) = \min\{|x-y|, y \in \Gamma\}$. Очевидно, Γ является границей $R^+_{m+k,k}$. Возьмем весовую функцию $\rho(x) = r_{\Gamma}^{\alpha}(x)(1+|x|)^{\beta-\alpha} \equiv (\min\{x_{m+1},\ldots,x_{m+k}\})^{\alpha} \cdot (1+|x|)^{\beta-\alpha}$, $x \in R_{m+k}$, где $\alpha > 0$, β-действительные числа.

Введем пространства Гельдера с весом $H^{\gamma}_{\alpha\beta}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ ([3,4,7,5]). Пусть $\gamma > 0$. По определению $u \in H^{\gamma}_{\alpha\beta}\left(R^+_{m+k,k}\right)$, если $\lim\limits_{x \to z \in \Gamma} u(x)\rho(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)\rho(x) = 0$ и конечна норма

$$\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}} = \sup_{x,y \in R^+_{m+k,k}} \left(|u(x)\rho(x) - u(y)\rho(x)| \cdot d^{-\gamma}(x,y) \right),$$

$$d^{\gamma}(x,y) = |x-y| \cdot \left((1+|x|)(1+|y|) \right)^{-1}.$$

Ставится задача о существовании сингулярного интеграла $Au(x) \overset{df}{=} \lim\limits_{\varepsilon \to +0} A_{\varepsilon}u(x)$, где

$$A_{\varepsilon}u(x) = \int\limits_{\left\{s \in R^+_{m+k,k} : |s| > \varepsilon\right\}} \frac{f(\theta)}{|s|^{m+k+2\nu}} \left[T^s u(x)\right] \cdot s_{m+1}^{2\nu_{m+1}} \ldots s_{m+k}^{2\nu_{m+k}} \, ds, \tag{2}$$

здесь $\theta = \dfrac{s}{|s|}$, $\nu = \nu_{m+1} + \ldots + \nu_{m+k}$.

Для дальнейших рассуждений нужно следующее легко доказуемое представление

$$\int\limits_{\left\{s \in R^+_{m+k,k} : a < |s| < b\right\}} f\left(\frac{s}{|s|}\right) \cdot |s|^{-m-k-2\nu} \left[T^s u(x)\right] \cdot s_{m+1}^{2\nu_{m+1}} \ldots s_{m+k}^{2\nu_{m+k}} \, ds =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot C_{\nu} \int\limits_{\left\{y \in R_{m+2k} : a < |\tilde{x} - y| < b\right\}} f\left(\tilde{\theta}\right) \cdot |\tilde{x} - y|^{-m-k-2\nu} u\left(y', \sqrt{y_{m+1}^2 + \tilde{y}_{m+1}^2}, \ldots, \sqrt{y_{m+k}^2 + \tilde{y}_{m+k}^2}\right) \times$$

$$\times |\tilde{y}_{m+1}|^{2\nu_{m+1}-1} \ldots |\tilde{y}_{m+k}|^{2\nu_{m+k}-1} \, dy, \tag{3}$$

где $0 < a < b \le \infty$, $x \in R^+_{m+k,k}$,

$\tilde{x} = (x', x_{m+1}, \ldots, x_{m+k}, 0, \ldots, 0)$, $y = (y', y_{m+1}, \ldots, y_{m+k}, \tilde{y}_{m+1}, \ldots, \tilde{y}_{m+k})$,

$$dy = dy_1 \dots d\tilde{y}_{m+k},\; r_{\tilde{x},y} = |\tilde{x} - y|,$$

$$\tilde{\theta} = \left(\frac{x' - y'}{r_{\tilde{x},y}}, \frac{\sqrt{(x_{m+1} - y_{m+1})^2 + \tilde{y}_{m+1}^2}}{r_{\tilde{x},y}}, \dots, \frac{\sqrt{(x_{m+k} - y_{m+k})^2 + \tilde{y}_{m+k}^2}}{r_{\tilde{x},y}} \right).$$

Здесь, полагая $u(x) \equiv 1$ и переходя к полярным координатам, получаем:

$$\int\limits_{S^+_{m+k,k}} f(\theta)\theta_{m+1}^{2\nu_{m+1}} \dots \theta_{m+k}^{2\nu_{m+k}}\, ds(\theta) = \frac{1}{2} \cdot C_\nu \int\limits_{S_{m+2k}} f(\tilde{\theta}) \cdot \left|\tilde{\theta}_{m+1}\right|^{2\nu_{m+1}-1} \dots \left|\tilde{\theta}_{m+k}\right|^{2\nu_{m+k}-1} ds(\theta), \quad (4)$$

где $S_{m+2k} = \{ y \in R_{m+2k} : |y| = 1 \}$.

Как и в случае классических сингулярных интегралов, условие сокращения

$$\int\limits_{S^+_{m+k,k}} f(\theta)\theta_{m+1}^{2\nu_{m+1}} \dots \theta_{m+k}^{2\nu_{m+k}}\, ds(\theta) = 0 \quad (5)$$

является необходимым условием для существования сингулярного интеграла (2).

В дальнейшем, «c» постоянное, точное значение которой для нас несущественно: $a(x) \prec b(x)$ означает, что $a(x) \le c\, b(x)$, где c-постоянное независтит от x. В случае, когда $a(x) \prec b(x)$ и $b(x) \prec a(x)$, запишем $a(x) \asymp b(x)$. Отметим, что пространства $H^\gamma_{\alpha\beta}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ удобно определить и в терминах неравенств. Имеет место

Лемма Н. Если верны неравенства

$$0 < \gamma < 1,\; 0 < \alpha - \gamma < 1,\; 0 < \beta + \gamma < m + k, \quad (6)$$

то $u \in H^\gamma_{\alpha\beta}\left(R^+_{m+k,k}\right)$ тогда и только тогда, когда

а) $\exists c_1(u)$, $\forall x \in R^+_{m+k,k}$, $|u(x)| \le c_1(u) r_\Gamma^{\gamma-\alpha}(x) \cdot (1 + |x|)^{-l}$, где $l = 2\gamma + \beta - \alpha$;

б) $\exists c_2(u)$, $\forall x \in R^+_{m+k,k}$, и $\forall y \in ш_x = \left\{ s \in R^+_{m+k,k} : |s - x| < \frac{r_\Gamma(x)}{2} \right\}$,

$$|u(x) - u(y)| \le c_2(u) \rho^{-1}(x) d^\gamma(x, y),$$

при этом $\|u\| \asymp \max\{c_1(u), c_2(u)\}$.

Доказательство. Из определения $H^\gamma_{\alpha\beta}$ получаем, что если $u \in H^\gamma_{\alpha\beta}$, то $\forall x, y \in R^+_{m+k,k}$

$$|u(x)\rho(x) - u(y)\rho(y)| \le \|u\|_{H^\gamma_{\alpha\beta}} \cdot \left(\frac{|x - y|}{(1 + |x|)(1 + |y|)} \right)^\gamma \quad (7)$$

и

$$\lim_{x\to z\in\Gamma} u(x)\rho(x)=0,\ \lim_{x\to\infty} u(x)\rho(x)=0\,. \tag{8}$$

Пусть $z_x \in \Gamma$ такие, что $r_\Gamma(x)=|x-z_x|$. Тогда устремив в (7) y к z_x, с учетом (8), получаем

$$|u(x)\rho(x)| \le \|u\|_{H^\gamma_{\alpha\beta}} \left(\frac{r_\Gamma(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)}\right)^\gamma, \tag{9}$$

и

$$|u(x)\rho(x)| \le \|u\|_{H^\gamma_{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^\gamma. \tag{10}$$

Таким образом, $\forall x \in R^+_{m+k,k}$

$$|u(x)\rho(x)| \le \|u\|_{H^\gamma_{\alpha\beta}} \cdot \min\left\{\left(\frac{r_\Gamma(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)}\right)^\gamma, \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^\gamma\right\},$$

или же

$$|u(x)| \le \rho^{-1}(x)\cdot \|u\|_{H^\gamma_{\alpha\beta}} \cdot \min\left\{\left(\frac{r_\Gamma(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)}\right)^\gamma, \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^\gamma\right\}.$$

Обозначим

$$\alpha(x) \overset{df}{=} \rho^{-1}(x)\cdot \min\left\{\left(\frac{r_\Gamma(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)}\right)^\gamma, \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^\gamma\right\}.$$

Докажем, что

$$d(x) \prec r^{\gamma-\alpha}_{\Gamma(x)} \cdot (1+|x|)^{-l}.$$

Так как, если $r_\Gamma(x) \le \frac{1+|x|}{2}$, $1+|z_x| = 1+|z_x - x + x| \ge 1+|x|-|x-z| \ge \frac{1+|x|}{2}$, тогда $\frac{r_\Gamma(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)} \le \frac{1}{1+|x|}$.

Поэтому

$$\alpha(x) = \left(\frac{r_\Gamma(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)}\right)^\gamma \cdot \rho^{-1}(x) \prec r_\Gamma^{\gamma-\alpha}(x)(1+|x|)^{-l}.$$

А также, если $r_\Gamma(x) \ge \frac{1+|x|}{2}$, то $r_\Gamma(x) \asymp (1+|x|)$.

Тогда

$$\alpha(x) \asymp \min\left\{\left(\frac{1}{1+|z_x|}\right)^{\gamma},\left(\frac{1}{1+|x|}\right)^{\gamma}\right\}\cdot\rho^{-1}(x) \le (1+|x|)^{-(\gamma+\beta)} \asymp r_\Gamma^{\gamma-\alpha}(x)\cdot(1+|x|)^{-l}.$$

Мы получили, что

$$|u(x)| \le \|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot r_\Gamma^{\gamma-\alpha}(x)\cdot(1+|x|)^{-l}.$$

Таким образом, мы доказали, что если $u \in H^{\gamma}_{\alpha\beta}$, то верно а).

Докажем б). Пусть $|x-y| \le \frac{r_\Gamma(x)}{2}$, тогда

$$|u(x)-u(y)| \le |u(x)\rho(x)-u(y)\rho(y)|\cdot\left|\rho^{-1}(x)\right| +$$

$$+|\rho(x)-\rho(y)|\cdot|u(x)|\cdot\left|\rho^{-1}(x)\right| \prec \|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot d^{\gamma}(x,y)\cdot\rho^{-1}(x),$$

где $|\rho(x)-\rho(y)| \prec \rho(x)\cdot\frac{|x-y|}{r_\Gamma(x)}$ (см. [3,4]).

С этим и доказан б).

Пусть имеет место а) и б). Докажем, что $u \in H^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

Пусть $|x-y| \le \frac{r_\Gamma(x)}{2}$, тогда

$$|u(x)\rho(x)-u(y)\rho(y)| \le \rho(x)\cdot|u(x)-u(y)| + |u(y)|\cdot|\rho(x)-\rho(y)| \le$$

$$\le c_2(u)d^{\gamma}(x,y)+c_1(u)d^{\gamma}(x,y) = \max\{c_1(u),c_2(u)\}\cdot d^{\gamma}(x,y).$$

А также, если $|x-y| \ge \frac{r_\Gamma(x)}{2}$, то

$$|u(x)\rho(x)-u(y)\rho(y)| \le |u(x)\rho(x)| + |u(y)\rho(y)| \le$$

$$\le \rho(x)\rho^{-1}(x)\left(\frac{r_\Gamma(x)}{(1+|x|)^2}\right)^{\gamma} + \rho(y)\rho^{-1}(y)\left(\frac{r_\Gamma(x)}{(1+|y|)^2}\right)^{\gamma} \prec d^{\gamma}(x,y)\cdot c_\lambda(u),$$

т.е. $u \in H^{\gamma}_{\alpha\beta}$. Таким же образом, доказывается, что $\|u\| \asymp \max\{c_1(u),c_2(u)\}$.

Следствие H. Если $u \in H^{\gamma}_{\alpha\beta}\left(R^{+}_{m+k,k}\right)$, то

а) $\left|u\left(y',\sqrt{y_{m+1}^2+\widetilde{y}_{m+1}^2},\ldots,\sqrt{y_{m+k}^2+\widetilde{y}_{m+k}^2}\right)\right| \prec$

$\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot\left(\min\left\{|y_{m+1}|+|\widetilde{y}_{m+1}|,\ldots,|y_{m+k}|+|\widetilde{y}_{m+k}|\right\}\right)^{\gamma-\alpha}(1+|y|)^{-l};$

б) $\forall x \in R^{+}_{m+k,k}$, $\forall y \in ш'_x = \left\{ y \in R_{m+2k} : |\widetilde{x} - y| < \dfrac{r_\Gamma(x)}{2} \right\}$

$$\left| u\left(y', \sqrt{y^2_{m+1} + \widetilde{y}^2_{m+1}}, \ldots, \sqrt{y^2_{m+k} + \widetilde{y}^2_{m+k}} \right) - u(x) \right| \prec \|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}} \cdot \rho^{-1}(x) \cdot d^{\gamma}(\widetilde{x}, y).$$

Теорема. Пусть $f(\theta)$, $\theta \in S^{+}_{m+k,k}$ ограничена, $\int\limits_{S^{+}_{m+k,k}} f(\theta)\theta^{2\nu_{m+1}}_{m+1} \ldots \theta^{2\nu_{m+k}}_{m+k} ds(\theta) = 0$ и выполняются условия (6). Тогда для каждого $u \in H^{\gamma}_{\alpha\beta}\left(R^{+}_{m+k,k}\right)$ сингулярный интеграл (2) существует для всех $x \in R^{+}_{m+k,k}$.

Доказательство. Пусть $u \in H^{\gamma}_{\alpha\beta}\left(R^{+}_{m+k,k}\right)$. Зафиксируем $x \in R^{+}_{m+k,k}$. Обозначим

$$\tau_1(x, ш'_x) = \int\limits_{ш'_x} \frac{f(\widetilde{\theta})}{r^{m+k+2\nu}_{\widetilde{x},y}} \left(u\left(y', \sqrt{y^2_{m+1} + \widetilde{y}^2_{m+1}}, \ldots, \sqrt{y^2_{m+k} + \widetilde{y}^2_{m+k}} \right) - u(x) \right) \times$$

$$\times \left|\widetilde{y}_{m+1}\right|^{2\nu_{m+1}-1} \ldots \left|\widetilde{y}_{m+k}\right|^{2\nu_{m+k}-1} dy;$$

$$\tau_2(x) = \int\limits_{Rm+2k \backslash ш'_x} \frac{f(\widetilde{\theta})}{r^{m+k+2\nu}_{\widetilde{x},y}} u\left(y', \sqrt{y^2_{m+1} + \widetilde{y}^2_{m+1}}, \ldots, \sqrt{y^2_{m+k} + \widetilde{y}^2_{m+k}} \right) \times$$

$$\times \left|\widetilde{y}_{m+1}\right|^{2\nu_{m+1}-1} \ldots \left|\widetilde{y}_{m+k}\right|^{2\nu_{m+k}-1} dy.$$

Сперва докажем абсолютную сходимость интегралов τ_1 и τ_2, тем самым мы докажем существование $A_\varepsilon u(x)$. Учитывая неравенство б) следствия Н получаем

$$|\tau_1(x; ш'_x)| \prec \|f\| \cdot \|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}} \cdot \rho^{-1}(x) \cdot (1 + |x|)^{-2\gamma} \int\limits_{ш'_x} \frac{\left|\widetilde{y}_{m+1}\right|^{2\nu_{m+1}-1} \ldots \left|\widetilde{y}_{m+k}\right|^{2\nu_{m+k}-1} dy}{r^{m+k+2\nu-\gamma}_{\widetilde{x},y}},$$

откуда следует, что

$$|\tau_1(x; ш'_x)| \prec \|f\| \cdot \|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}} \cdot r^{r-\alpha}_{\Gamma}(x) \cdot (1 + |x|)^{-l}. \quad (11)$$

А теперь оценим $\tau_2(x, R_{m+2k} \backslash ш'_x)$ сверху.

Введем множества $A_x = \left\{ y \in R_{m+2k} : |\widetilde{x} - y| \le \dfrac{|y|}{2} \right\} \bigcap \left(R_{m+2k} \backslash ш'_x\right)$,

$$B_x = \left\{ y \in R_{m+2k} : \frac{|y|}{2} \le |\widetilde{x} - y| \le \frac{3|y|}{2} \right\} \bigcap \left(R_{m+2k} \backslash ш'_x\right),$$

$$C_x = \{y \in R_{m+2k} : 3|y| \le |\widetilde{x} - y|\} \bigcap (R_{m+2k} \setminus ш'_x).$$

Очевидно, что

$$|\tau_2(x, R_{m+2k} \setminus ш'_x)| \prec \|f\| \cdot \|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}} [\tau_2(x;A_x) + \tau_2(x;B_x) + \tau_2(x;C_x)]. \qquad (12)$$

Прежде всего, отметим, что при $y \in R_{m+2k} \setminus ш'_x$ $|\widetilde{x} - y| \ge r_\Gamma(x)$.

Теперь оценим сверху интегралы, стоящие в правой части (12). Отметим, что если $y \in A_x$, то $(1+|x|) \asymp (1+|y|)$ и

$$|\widetilde{x} - y| \asymp |x' - y'| + r_\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{k} |x_{m+i} - y_{m+i}| + |\widetilde{y}_{m+1}| + \ldots + |\widetilde{y}_{m+k}|.$$

Тогда

$$\tau_2(x;A_x) \prec (1+|x|)^{-l} \int_0^\infty |\widetilde{y}_{m+k}|^{2\nu_{m+k}-1} d\widetilde{y}_{m+k} \cdots \int_0^\infty |\widetilde{y}_{m+1}|^{2\nu_{m+1}-1} d\widetilde{y}_{m+1} \int_0^\infty dy_{m+k} \cdots \int_0^\infty dy_{m+2} \times$$

$$\times \int_0^\infty (A(y,\widetilde{y}))^{\gamma-\alpha} dy_{m+1} \int_{R_m} \left(|z| + r_\Gamma(x) + \sum_{i=1}^{k} |x_{m+i} - y_{m+i}| + |\widetilde{y}_{m+1}| + \ldots + |\widetilde{y}_{m+k}| \right)^{-m-k-2\nu} dz \prec$$

$$\prec r_\Gamma^{\gamma-\alpha}(x) \cdot (1+|x|)^{-l},$$

где $|z| = |x' - y'|$, $A(y,\widetilde{y}) = \min\{|y_{m+i}| + |\widetilde{y}_{m+i}|, \quad i = \overline{1,k}\}$.

Оценим сверху $\tau_2(x;B_x)$.

Пусть $|x| \ge 1$ и $y \in B_x$. Тогда $|\widetilde{x} - y| \asymp |y| + |x|$. Положим $\mu = (\gamma + \beta) + (k + \gamma - \alpha)$. В силу (5) $\mu > 0$. С учетом этого получаем:

$$\tau_2(x;B_x) \prec \int_0^\infty |\widetilde{y}_{m+k}|^{2\nu_{m+k}-1} d\widetilde{y}_{m+k} \cdots \int_0^\infty |\widetilde{y}_{m+1}|^{2\nu_{m+1}-1} d\widetilde{y}_{m+1} \int_0^\infty dy_{m+k} \cdots \int_0^\infty dy_{m+2} \times$$

$$\times \int_0^\infty (A(y,\widetilde{y}))^{\gamma-\alpha} dy_{m+1} \int_{R_m} (|y'| + |x| + B(y,\widetilde{y}))^{-(m+k+\mu)} dy' \prec r_\Gamma^{\gamma-\alpha}(x) \cdot (1+|x|)^{-l},$$

где $B(y,\widetilde{y}) = \sum_{i=1}^{k} (|y_{m+i}| + |\widetilde{y}_{m+i}|)$.

Пусть $|x| < 1$ и $y \in B_x$. Тогда при $|y| \ge 1$ $|y| \asymp |y| + |x| + 1$, а также при $|y| < 1$ $(1+|y|) \asymp 1$ и $|y| \asymp |y| + |x|$.

Поэтому

$$\tau_2(x;B_x) \prec \int\limits_{\{y\in R_{m+2k}:|y|<1\}} \frac{|\widetilde{y}_{m+k}|^{2\nu_{m+k}-1}\dots|\widetilde{y}_{m+1}|^{2\nu_{m+1}-1}\cdot(A(y,\widetilde{y}))^{\gamma-\alpha}\,dy}{(|y'|+r_\Gamma(x)+B(y,\widetilde{y}))^{m+k+2\nu}}+$$

$$+\int\limits_{\{y\in R_{m+2k}:|y|\geq 1\}} \frac{|\widetilde{y}_{m+k}|^{2\nu_{m+k}-1}\dots|\widetilde{y}_{m+1}|^{2\nu_{m+1}-1}\cdot(A(y,\widetilde{y}))^{\gamma-\alpha}\,dy}{(|x|+|y|+1)^{m+k+2\nu+l}} \prec$$

$$\prec r_\Gamma^{\gamma-\alpha}(x)\cdot(1+|x|)^{-l}.$$

Аналогично доказывается $\tau_2(x;C_x) \prec r_\Gamma^{\gamma-\alpha}(x)\cdot(1+|x|)^{-l}$.

Таким образом, нами доказано

$$|\tau_2(x;R_{m+2k}\setminus ш'_x)| \prec \|f\|\cdot\|u\|_{H^{\gamma}_{\alpha\beta}}\cdot r_\Gamma^{\gamma-\alpha}(x)\cdot(1+|x|)^{-l}. \qquad (13)$$

Из (4), в силу (5), получаем

$$\int\limits_{S^{+}_{m+2k}} f(\widetilde{\theta})\cdot|\widetilde{\theta}_{m+1}|^{2\nu_{m+1}-1}\dots|\theta_{m+2k}|^{2\nu_{m+k}-1}\,ds(\theta)=0. \qquad (14)$$

Пусть $u\in H^{\gamma}_{\alpha\beta}(R^{+}_{m+k,k}),\quad x\in R^{+}_{m+k,k},\quad 0<\varepsilon<\dfrac{r_\Gamma(x)}{2}$.

Тогда из (3) получаем

$$A_\varepsilon u(x)=\frac{1}{2}\cdot C_\nu\left(\int\limits_{S_{m+2k}} f(\widetilde{\theta})\cdot|\widetilde{\theta}_{m+1}|^{2\nu_{m+1}-1}\dots|\widetilde{\theta}_{m+k}|^{2\nu_{m+k}-1}\,ds(\theta)\right)\times$$

$$\times u(x)\ln\frac{r_\Gamma(x)}{2\varepsilon}+\frac{1}{2}C_\nu\tau_1(x;\omega'_x(\varepsilon))+\tau_2(x),$$

где $ш'_x(\varepsilon)=\left\{y\in R_{m+2k}\ :\ \varepsilon<|\widetilde{x}-y|<\dfrac{r_\Gamma(x)}{2}\right\}$.

Теперь, учитывая (14) и абсолютную сходимость интегралов $\tau_1(x;ш'_x)$ и $\tau_2(x;R_{m+2k}\setminus ш'_x)$, и переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to+0} A_\varepsilon u(x)=\frac{1}{2}\cdot C_\nu\left(\tau_1(x;\omega'_x)+\tau_2(x;R_{m+2k}\setminus ш'_x)\right).$$

Теорема доказана.

Автор приносит благодарность проф. С.К.Абдуллаеву за постановку задачи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ключанцев М.И. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига, I. // Сибирский матем.журн., 1970, т.XI, № 4, -с.810-821.
2. Кипрянов Н.А., Ключанцев М.И. О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига, II. // Сибирский матем.журн., 1970, т.XI, № 5, -с.1061-1083.
3. Абдуллаев С.К. Многомерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Гельдера с весом, вырождающимся на некомпактном множестве. //ДАН СССР.-1989, т.308, № 6, -с.1289-1292.
4. Абдуллаев С.К. Многомерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Гельдера с весом. //Ин-т физики АН Азерб.ССР-Препр.-1988, № 8, -50 с.
5. Abdullayev S.K., Agarzayev B.K. Holder weight estimates of singular integrals generated by generalized shift operator. Transactions of NAS of Azerbaijan issue math., and mech.series of physical – technical and mathematical science, XXIV, № 1, Baku-2004, "Elm", s. 8-18.
6. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. // Успехи матем. наук, 6, № 2 (1951), стр.102-143.
7. Абдуллаев С.К., Акперов А.А. Весовые Гельдеровые оценки сингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига. Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2007 г., №3, с. 24-31.

ÜMUMİLƏŞMİŞ SÜRÜŞMƏ OPERATORUNUN DOĞURDUĞU ÇOXÖLÇÜLÜ SİNQULYAR İNTEQRALIN VARLIĞI

A.A.ƏKBƏROV

XÜLASƏ

Ümumiləşmiş sürüşmə operatorunun doğurduğu çoxölçülü sinqulyar inteqralların sistematik araşdlırılması N.A.Kipriyanov və M.İ.Kluçantsevin işlərindən başlamış və xüsusi halda onlar üçün Privalov tipli teoremlər isbat olunmuşdur. Bu nəticələrin sonrakı inkişafı S.K.Abdullayev, B.K.Ağarzayev və A.Ə.Əkbərova məxsusdur. İşdə sinqulyar inteqralın varlığı məsələsi çəkili Nölder fəzalında ümumiləşmiş sürüşmə operatoru ixtiyari sayda dəyişənə nəzərən götürüldüyü halda araşdırılır.

ON THE EXISTENCE OF THE MULTIDIMENSIONAL SINGULAR INTEGRALS GENERATED BY GENERALIZED SHIFT OPERATOR

A.A.AKPEROV

SUMMARY

Systematic investigations of the multidimensional singular integrals generated by generalized shift operator began from the works by N.A.Kipriyanov and M.I.Klyuchantcev, where particularly are proved theorems of the type of Privalovs theorems. Later the generalization of these results received by S.K.Abdullayev, B.K.Agarzayev, A.A.Akperov. In this work the problem of the existence of the singular integral in weighted Holder space, where the shift operator takes on any system of variables is considered.