

RİYAZİYYAT

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО
РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА
С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

И.М.ГУСЕЙНОВ, А.Р.ЛЯТИФОВА

*Бакинский Государственный Университет,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана*

В работе найдено интегральное представление для фундаментального решения матричной системы уравнений Дирака и подробно исследованы свойства ядра этого представления.

Рассмотрим матричное уравнение Дирака

$$BY' + \Omega(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

с условием разрыва в точке $a \in (0, \pi)$:

$$Y(a+0) = MY(a-0). \quad (2)$$

Здесь λ - комплексный параметр,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

M - матрица второго порядка, $\det M \neq 0$, $M \neq I$ (I - единичная матрица). Отметим, что условия разрыва типа (2) возникают при корректном определении операторов Дирака, когда элементы потенциальной матрицы являются, например, распределениями, сосредоточенными в точке a .

Матричное решение $Y(x, \lambda)$ задачи (1)-(2), удовлетворяющее начальному условию

$$Y(0, \lambda) = I, \quad (3)$$

называется фундаментальным решением.

Если $\Omega(x) \equiv 0$, то нетрудно показать, что матричная функция

$$Y_0(x, \lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda Bx}, & 0 < x < a, \\ M^- e^{-\lambda Bx} + M^+ e^{-\lambda B(2a-x)}, & a < x < \pi, \end{cases} \quad (4)$$

где $M^\pm = \frac{1}{2}(M \pm BMB)$, является фундаментальным решением.

При отсутствии условия разрыва (т.е. когда $M = I$) в работах [1, 2] найдены «треугольные» представления различных решений уравнения (1). В настоящей работе выясняется, каким образом условие разрыва влияет на структуру представления фундаментального решения.

Теорема. Пусть евклидова норма матричной функции $\Omega(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\pi \|\Omega(x)\| dx < +\infty. \quad (5)$$

Тогда при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ фундаментальное решение задачи (1)-(3) существует и представимо в виде

$$Y(x, \lambda) = Y_0(x, \lambda) + \int_{-x}^x K(x, t) e^{-\lambda B t} dt, \quad (6)$$

где при каждом $x \in (0, a) \cup (a, \pi)$ элементы $K(x, t)$ принадлежат пространству $L_1(-x, x)$ и справедливо неравенство

$$\int_{-x}^x \|K(x, t)\| dt \leq 2C \left(e^{\sigma(x)} - 1 \right) e^{\sigma(x)}, \quad (7)$$

где $\sigma(x) = \int_0^x \|\Omega(t)\| dt$, $C = \max \left\{ \|M^-\|, \|M^+\|, 1 \right\}$. Кроме того, если матричная

функция $\Omega(x)$ непрерывна, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} BK(x, x) - K(x, x)B &= -\Omega(x), \quad 0 < x < a, \\ BK(x, x) - K(x, x)B &= -\Omega(x)M^-, \quad a < x < \pi, \\ B\{K(x, 2a - x + 0) - K(x, 2a - x - 0)\} + \\ + \{K(x, 2a - x + 0) - K(x, 2a - x - 0)\}B &= -\Omega(x)M^+, \quad a < x < \pi, \\ BK(x, -x) + K(x, -x)B &= 0, \quad x \in (0, a) \cup (a, \pi). \end{aligned} \quad (8)$$

Если $\Omega(x)$ дифференцируема, то $K(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$B \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial t} B + \Omega(x)K(x, t) = 0. \quad (9)$$

Доказательство. Применяя метод вариации произвольных постоянных нетрудно получить следующее эквивалентное интегральное уравнение для фундаментального решения

$$Y(x, \lambda) = Y_0(x, \lambda) + \int_0^x Y_0(x, \lambda) Y_0^{-1}(t, \lambda) B \Omega(t) Y(t, \lambda) dt. \quad (10)$$

Подставляя здесь вместо $Y(x, \lambda)$ его представление в виде (6), получаем

$$\int_{-x}^x K(x, t) e^{-\lambda B t} dt = \int_0^x Y_0(x, \lambda) Y_0^{-1}(t, \lambda) B \Omega(t) Y_0(t, \lambda) dt + \\ + \int_0^x Y_0(x, \lambda) Y_0^{-1}(t, \lambda) B \Omega(t) \int_{-t}^t K(t, s) e^{-\lambda B s} ds dt. \quad (11)$$

Используя формулу

$$Y_0(x, \lambda) Y_0^{-1}(t, \lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda B(x-t)}, & t < x < a, \\ M^- e^{-\lambda B(x-t)} + M^+ e^{-\lambda B(2a-x-t)}, & t < a < x, \\ e^{-\lambda B(x-t)}, & a < t < x, \end{cases}$$

преобразуем правую часть равенства (11) так, чтобы она имела вид, аналогичный левой части. Очевидно, что надо отдельно рассматривать случай $x < a$ и $x > a$.

Пусть $x < a$. Для первого слагаемого в правой части (11) получаем

$$\int_0^x e^{-\lambda B(x-t)} B \Omega(t) e^{-\lambda B t} dt = \frac{1}{2} \int_{-x}^x B \Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{-\lambda B t} dt,$$

следовательно в случае $x < a$ равенство (11) имеет вид:

$$\int_{-x}^x K(x, t) e^{-\lambda B t} dt = \frac{1}{2} \int_{-x}^x B \Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{-\lambda B t} dt + \\ + \int_0^x e^{-\lambda B(x-t)} B \Omega(t) \int_{-t}^t K(t, s) e^{-\lambda B s} ds dt.$$

Отсюда нетрудно получить следующие соотношения для функции

$$K^\pm(x, t) = \frac{K(x, t) \pm BK(x, t)B}{2}$$

$$\int_{-x}^x K^+(x, t) e^{-\lambda B t} dt = \frac{1}{2} \int_{-x}^x B \Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{-\lambda B t} dt + \\ + \int_0^x e^{-\lambda B(x-t)} B \Omega(t) \int_{-t}^t K^-(t, s) e^{-\lambda B s} ds dt,$$

$$\int_{-x}^x K^-(x, t) e^{-\lambda B t} dt = \int_0^x e^{-\lambda B(x-t)} B \Omega(t) \int_{-t}^t K^+(t, s) e^{-\lambda B s} ds dt. \quad (12)$$

Используя очевидные соотношения $BK^\pm(x, t) = \mp K^\pm(x, t)B$, $e^{-\lambda B z} K^\pm(x, t) = K^\pm(x, t) e^{\pm \lambda B z}$, для интегралов в правых частях (12) имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \int_{-t}^t K^{\mp}(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt &= \int_0^x B\Omega(t) \int_{-t}^t K^{\mp}(t,s) e^{-\lambda B[s \pm (x-t)]} ds dt = \\
&= \int_{-x}^x \left(\int_{\frac{t \pm x}{2}}^x B\Omega(s) K^{\mp}(s, t \pm x \mp s) ds \right) e^{-\lambda Bt} dt.
\end{aligned}$$

Следовательно, из равенств (12) получим следующую систему интегральных уравнений для $K^{\pm}(x,t)$ (при $x < a$):

$$\begin{aligned}
K^+(x,t) &= \frac{1}{2} B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) + \int_{\frac{t+x}{2}}^x B\Omega(s) K^-(s, t+x-s) ds, \\
K^-(x,t) &= \int_{\frac{x-t}{2}}^x B\Omega(s) K^+(s, t-x+s) ds. \tag{13}
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $a < x < \pi$. Для первого интеграла в правой части (11) имеем:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^x Y_0(x,\lambda) Y_0(t,\lambda) B\Omega(t) Y_0(t,\lambda) dt = \int_0^a \left\{ M^- e^{-\lambda B(x-t)} + M^+ e^{-\lambda B(2a-x-t)} \right\} B\Omega(t) e^{-\lambda Bt} dt + \\
&\quad + \int_a^x e^{-\lambda B(x-t)} B\Omega(t) \left\{ M^- e^{-\lambda Bt} + M^+ e^{-\lambda B(2a-t)} \right\} dt = \\
&= \int_0^a M^- B\Omega(t) e^{-\lambda B(2t-x)} dt + \int_0^a M^+ B\Omega(t) e^{-\lambda B(2t-2a+x)} dt + \\
&\quad + \int_a^x B\Omega(t) M^- e^{-\lambda B(2t-x)} dt + \int_a^x B\Omega(t) M^+ e^{-\lambda B(2a-2t+x)} dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-x}^{2a-x} M^- B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{-\lambda Bt} dt + \frac{1}{2} \int_{-(2a-x)}^x M^+ B\Omega\left(\frac{t+2a-x}{2}\right) e^{-\lambda Bt} dt + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{2a-x}^x B\Omega\left(\frac{t+x}{2}\right) M^- e^{-\lambda Bt} dt + \frac{1}{2} \int_{2a-x}^x B\Omega\left(\frac{2a+x-t}{2}\right) M^+ e^{-\lambda Bt} dt. \tag{14}
\end{aligned}$$

Так как второй интеграл в правой части (11) имеет вид

$$I_2 = \int_0^a \left\{ M^- e^{-\lambda B(x-t)} + M^+ e^{-\lambda B(2a-x-t)} \right\} B\Omega(t) \int_{-t}^t K(t,s) e^{-\lambda Bs} ds dt,$$

то из равенства (11) для функции $K^\pm(x,t)$ получим следующие соотношения

$$\int_{-x}^x K^\pm(x,t) e^{-\lambda Bt} dt = \frac{1}{2}(I_1 \pm BI_1B) + \frac{1}{2}(I_2 \pm BI_2B). \quad (15)$$

Нетрудно убедиться, что используя (14), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I_1 + BI_1B) &= \frac{1}{2} \int_{-x}^{2a-x} M^- B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{-\lambda Bt} dt + \frac{1}{2} \int_{2a-x}^x B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) M^- e^{-\lambda Bt} dt, \\ \frac{1}{2}(I_1 - BI_1B) &= \frac{1}{2} \int_{-(2a-x)}^x M^+ B\Omega\left(\frac{t+2a-x}{2}\right) e^{-\lambda Bt} dt + \frac{1}{2} \int_{2a-x}^x B\Omega\left(\frac{2a+x-t}{2}\right) e^{-\lambda Bt} dt. \end{aligned}$$

Далее, используя соотношения $BM^\pm = \mp M^\pm B$, $e^{-\lambda Bz} M^\pm = M^\pm e^{\pm \lambda Bz}$, меняя порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I_2 + BI_2B) &= \int_{-x}^{2a-x} \left(\frac{a}{\frac{2a-x-t}{2}} \int M^+ B\Omega(s) K^+(s, t-2a+x+s) ds \right) e^{-\lambda Bt} dt + \\ &+ \int_{-x}^{2a-x} \left(\frac{a}{\frac{t+x}{2}} \int M^- B\Omega(s) K^-(s, t+x-s) ds \right) e^{-\lambda Bt} dt + \int_{-x}^{2a-x} \left(\int_a^x B\Omega(s) K^-(s, t+x-s) ds \right) e^{-\lambda Bt} dt + \\ &+ \int_{2a-x}^x \left(\int_{\frac{t+x}{2}}^x B\Omega(s) K^-(s, t+x-s) ds \right) e^{-\lambda Bt} dt, \\ \frac{1}{2}(I_2 - BI_2B) &= \int_{-(2a-x)}^x \left(\frac{a}{\frac{2a-x+t}{2}} \int M^+ B\Omega(s) K^-(s, t+2a-x-s) ds \right) e^{-\lambda Bt} dt + \\ &+ \int_{-(2a-x)}^x \left(\frac{a}{\frac{x-t}{2}} \int M^- B\Omega(s) K^+(s, t-x+s) ds \right) e^{-\lambda Bt} dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-x}^{-(2a-x)} \left(\int_{\frac{x-t}{2}}^x B\Omega(s)K^+(s, t-x+s)ds \right) e^{-\lambda Bt} dt + \\
& + \int_{-(2a-x)}^x \left(\int_a^x B\Omega(s)K^+(s, t-x+s)ds \right) e^{-\lambda Bt} dt .
\end{aligned}$$

Учитывая последние равенства, из (15) получаем следующие системы интегральных уравнений при $a < x < \pi$, когда точка разрыва $a \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right)$: если $x > a, -x < t < 2a - x$

$$\begin{aligned}
K^+(x, t) = & \frac{1}{2}M^-B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) + \int_{\frac{2a-x-t}{2}}^a M^+B\Omega(s)K^+(s, t-2a+x+s)ds + \\
& + \int_{\frac{x+t}{2}}^a M^-B\Omega(s)K^-(s, t+x-s)ds + \int_a^x B\Omega(s)K^-(s, t+x-s)ds ; \quad (16)
\end{aligned}$$

если $x > a, 2a - x < t < x$

$$K^+(x, t) = \frac{1}{2}B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right)M^- + \int_{\frac{x+t}{2}}^x B\Omega(s)K^-(s, t+x-s)ds ; \quad (17)$$

если $x > a, -x < t < -(2a - x)$

$$K^-(x, t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^x B\Omega(s)K^+(s, t-x+s)ds ; \quad (18)$$

если $x > a, -(2a - x) < t < x$

$$\begin{aligned}
K^-(x, t) = & \frac{1}{2}M^+B\Omega\left(\frac{t+2a-x}{2}\right) + \frac{1}{2}B\Omega\left(\frac{2a+x-t}{2}\right)M^+ \begin{cases} 1, & 2a-x < t < x \\ 0, & -(2a-x) < t < 2a-x \end{cases} + \\
& + \int_{\frac{2a-x+t}{2}}^a M^+B\Omega(s)K^-(s, t+2a-x-s)ds + \int_{\frac{x-t}{2}}^a M^-B\Omega(s)K^+(s, t-x+s)ds + \\
& + \int_a^x B\Omega(s)K^+(s, t-x+s)ds . \quad (19)
\end{aligned}$$

Из (14) следует, что если точка разрыва $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то уравнение (19) заменяется уравнением

$$K^-(x, t) = K_*^-(x, t) + \int_{\frac{2a-x+t}{2}}^a M^+ B \Omega(s) K^-(s, t+2a-x-s) ds + \int_{\frac{x-t}{2}}^a M^- B \Omega(s) K^+(s, t-x+s) ds + \int_a^x B \Omega(s) K^+(s, t-x+s) ds, \quad (20)$$

где

$$K_*^-(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} M^+ B \Omega\left(\frac{t+2a-x}{2}\right), & -(2a-x) < t < 2a-x, \quad a < x < 2a, \\ \frac{1}{2} M^+ B \Omega\left(\frac{t+2a-x}{2}\right) + \frac{1}{2} B \Omega\left(\frac{2a+x-t}{2}\right) M^+, & 2a-x < t < x, \quad a < x < 2a, \\ \frac{1}{2} B \Omega\left(\frac{t+2a-x}{2}\right) M^+, & 2a-x < t < -(2a-x), \quad 2a < x < \pi, \\ \frac{1}{2} M^+ B \Omega\left(\frac{t+2a-x}{2}\right) + \frac{1}{2} B \Omega\left(\frac{2a+x-t}{2}\right) M^+, & -(2a-x) < t < x, \quad 2a < x < \pi. \end{cases}$$

Таким образом, для того, чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно показать, что система интегральных уравнений (13), (16)-(19) (если $a \geq \frac{\pi}{2}$) или (13), (16)-(18), (20) (если $a < \frac{\pi}{2}$) имеет решение $K^\pm(x, t)$, удовлетворяющее неравенству

$$\int_{-x}^x \|K^\pm(x, t)\| dt \leq C \left(e^{\sigma(x)} - 1 \right) e^{\sigma(x)}, \quad (21)$$

где $C = \max \left\{ \|M^-\|; \|M^+\|; 1 \right\}$, $\sigma(x) = \int_0^x \|\Omega(t)\| dt$.

Сначала рассмотрим случай $x < a$, и к системе интегральных уравнений (13) применяем метод последовательных приближений, положив

$$K_0^+(x, t) = \frac{1}{2} B \Omega\left(\frac{x+t}{2}\right), \quad K_{(0)}^-(x, t) = 0,$$

$$K_n^+(x, t) = \int_{\frac{t+x}{2}}^x B\Omega(s) K_{n-1}^-(s, t+x-s) ds,$$

$$K_n^-(x, t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^x B\Omega(s) K_{n-1}^+(s, t-x+s) ds, \quad n=1, 2, \dots$$

После несложных преобразований, отсюда имеем

$$\int_{-x}^x \|K_n^\pm(x, t)\| dt \leq \int_{-x}^x \left(\int_{-s}^s \|K_{n-1}^\mp(s, t)\| dt \right) \|\Omega(s)\| ds$$

и так как

$$\int_{-x}^x \|K_0^+(x, t)\| dt \leq \sigma(x),$$

методом математической индукции легко доказывается, что

$$\int_{-x}^x \|K_{2n}^+(x, t)\| dt \leq \frac{\{\sigma(x)\}^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad K_{2n-1}^+(x, t) = 0,$$

$$\int_{-x}^x \|K_{2n-1}^-(x, t)\| dt \leq \frac{\{\sigma(x)\}^{2n}}{(2n)!}, \quad K_{2n}^-(x, t) = 0.$$

Следовательно, при $x < a$ матричные ряды

$$\sum_{n=0}^{+\infty} K_n^+(x, \cdot) = K^+(x, \cdot), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} K_n^-(x, \cdot) = K^-(x, \cdot) \quad (22)$$

сходятся (по элементно) равномерно по $x \in [0, a]$ в пространстве $L_1(x, \infty)$, а их суммы удовлетворяют неравенству (21), являясь одновременно решением системы уравнений (13).

Теперь рассмотрим систему интегральных уравнений (16)-(19) и применим метод последовательных приближений, положив

$$K_0^+(x, t) = \frac{1}{2} M^- B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) + \int_{\frac{2a-x-t}{2}}^a M^+ B\Omega(s) K^+(s, t-2a+x-s) ds +$$

$$+ \int_{\frac{x+t}{2}}^a M^- B\Omega(s) K^-(s, t+x-s) ds, \quad -x < t < 2a-x,$$

$$K_0^+(x,t) = \frac{1}{2} B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) M^-, \quad 2a-x < t < x,$$

$$K_0^-(x,t) = 0, \quad -x < t < -(2a-x),$$

$$K_0^-(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} M^+ B\Omega\left(\frac{t+2a-x}{2}\right), & -(2a-x) < t < 2a-x, \\ \frac{1}{2} M^+ B\Omega\left(\frac{t+2a-x}{2}\right) + \\ + \frac{1}{2} B\Omega\left(\frac{2a+x-t}{2}\right) M^+ \int_{\frac{2a-x+t}{2}}^a M^+ B\Omega(s) K^+(s, t+2a-x-s) ds + \\ + \int_{\frac{x-t}{2}}^a M^- B\Omega(s) K^+(s, t-x+s) ds, & -(2a-x) < t < x, \end{cases}$$

$$K_n^+(x,t) = \int_a^x B\Omega(s) K_{n-1}^-(s, t+x-s) ds, \quad -x < t < 2a-x,$$

$$K_n^+(x,t) = \int_{\frac{t+x}{2}}^x B\Omega(s) K_{n-1}^-(s, t+x-s) ds, \quad 2a-x < t < x,$$

$$K_n^-(x,t) = \int_{\frac{x-t}{2}}^x B\Omega(s) K_{n-1}^+(s, t-x+s) ds, \quad -x < t < -2a+x,$$

$$K_n^-(x,t) = \int_a^x B\Omega(s) K_{n-1}^+(s, t-x+s) ds, \quad -(2a-x) < t < x, \quad n=1,2,3,\dots$$

Отсюда, после несложных преобразований, имеем

$$\int_{-x}^x \|K_0^\pm(x,t)\| dt \leq C(e^{\sigma(x)} - 1), \quad C = \max\{\|M^-\|, \|M^+\|, 1\},$$

$$\int_{-x}^x \|K_n^+(x,t)\| dt \leq C \int_a^x \left(\int_{-s}^s \|K_{n-1}^\mp(s,u)\| du \right) \|\Omega(s)\| ds.$$

Теперь, используя последние неравенства, методом математической индукции

нетрудно показать справедливость следующих оценок

$$\int_{-x}^x \|K_n^\pm(x, t)\| dt \leq C \left(e^{\sigma(x)} - 1 \right) \frac{\{\sigma(x)\}^n}{n!}, \quad x > a.$$

Таким образом, матричные ряды (22) сходятся (по элементно) равномерно по $x > a$ в пространстве $L_1(x, \infty)$, а их суммы удовлетворяют неравенству (21), являясь решением системы (16)-(19).

Очевидно, что тогда матричная функция $K(x, t) = K^+(x, t) + K^-(x, t)$ является ядром представления (6) и для нее справедлива оценка (7).

При условии непрерывности $\Omega(x)$ соотношения (8) и при дифференцируемости $\Omega(x)$ -уравнения (9) непосредственно выводятся из уравнений (13), (16)-(18).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М.Г. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$ // Тр. ММО, вып. 19, 1968, с. 41-112.
2. Максудов Ф.Г., Велиев С.Г. Разложение по собственным функциям несамосопряженных дифференциальных операторов Дирака на всей оси // Труды летней школы по спектральной теории операторов и теории представления групп. Баку, «Элм» 1975, с. 170-179.

INTERVAL DAXİLİNDƏ KƏSİLMƏ ŞƏRTİ OLDUQDA DİRAC MATRİS TƏNLİYİNİN İNTEQRAL GÖSTƏRİLİŞİ

H.M.HÜSEYNOV, A.R.LƏTİFOVA

XÜLASƏ

İşdə Dirac matris tənliklər sistemi üçün fundamental həllin inteqral göstərilişi alınmış və bu göstərilişin nüvəsinin xassələri öyrənilmişdir.

INTEGRAL REPRESENTATION OF FUNDAMENTAL SOLUTION OF DIRAC MATRIX EQUATION WITH DISCONTINUITY CONDITION INTERIOR TO INTERVAL

H.M.HUSEYNOV, A.R.LATIFOVA

SUMMARY

In the paper we find integral representation for fundamental solution of matrix system of Dirac equations and investigate explicitly the properties of the kernel of this representation.