BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

СПЕКТРАЛЬНОСТЬ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРЯМОЙ СУММЕ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

М.И.ИСМАЙЛОВ

Бакинский Государственный Университет

Известно, что исследование спектра и спектральности матричного оператора в прямой сумме гильбертовых пространств была изучена Н. Данфордом с использованием изометрического изоморфизма коммутативной алгебры линейных ограниченных операторов с алгеброй существенно-ограниченных измеримых комплексных функций. В отличие от этой работы, в настоящей работе данный вопрос изучается в прямой сумме банаховых пространств другим методом, поскольку указанный изоморфизм трудно построить в прямой сумме банаховых пространств.

Пусть X – банахово пространство. В прямой сумме $X^n = X \times X \times X \ldots \times X$ - *n* экземпляров пространства X, рассмотрим матричный оператор

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots. & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots. & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots. & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} $(i,j = 1, \ldots, n)$ – линейные ограниченные операторы в X.

Справедлива :

Теорема 1. Пусть A_{ij} $(i \neq j)$ - коммутирующие квазинильпотентные операторы, A_{ii} – спектральные операторы, кроме того $A_{ii}\ A_{ij} = A_{ij}\ A_{jj}$. Тогда оператор $\widetilde{A}$ спектрален с разложением единицы

$$\widetilde{E}(\cdot) = \begin{pmatrix} E_{11}(\cdot) & O & \ldots. & O \\ O & E_{22}(\cdot) & \ldots. & O \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ O & O & \ldots. & E_{nn}(\cdot) \end{pmatrix},$$

где $E_{ii}(\cdot)$- разложение единицы A_{ii}, причем спектр $\sigma(\widetilde{A})$ оператора $\widetilde{A}$ определяется равенством

$$\sigma(\widetilde{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma\ (A_{ii}).$$

Доказательство. При $n = 2$ теорема доказана в работе [*4*]. Рассмотрим случай, когда $n \geq 3$. Представим оператор $\widetilde{A}$ в виде суммы операторов

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & O & .... & O \\ O & A_{22} & .... & O \\ \dots & \dots & .... & \dots \\ O & O & .... & A_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & A_{12} & .... & A_{1n} \\ A_{21} & O & .... & A_{2n} \\ \dots & \dots & .... & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & .... & O \end{pmatrix} = \widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 .$$

Легко показать, что оператор $\widetilde{A}_1$ спектрален с разложением единицы $\widetilde{E}(\cdot)$. Теперь рассмотрим оператор $\widetilde{A}_2$. В силу перестановочности и квазинильпотентности операторов A_{ij} *(i≠j),* очевидно, что оператор $\widetilde{A}_2$ квазинильпотентен. Далее, покажем, что оператор $\widetilde{A}_2$ перестановочен с оператором $\widetilde{A}_1$. Имеем

$$\widetilde{A}_1 \widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & O & .... & O \\ O & A_{22} & .... & O \\ \dots & \dots & .... & \dots \\ O & O & .... & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & A_{12} & .... & A_{1n} \\ A_{21} & O & .... & A_{2n} \\ \dots & \dots & .... & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & .... & O \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} O & A_{11}A_{12} & .... & A_{11}A_{1n} \\ A_{22}A_{21} & O & .... & A_{22}A_{2n} \\ \dots & \dots & .... & \dots \\ A_{nn}A_{n1} & A_{nn}A_{n2} & .... & O \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} O & A_{12}A_{22} & .... & A_{1n}A_{nn} \\ A_{21}A_{11} & O & .... & A_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & .... & \dots \\ A_{n1}A_{11} & A_{n2}A_{22} & .... & O \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} O & A_{12} & .... & A_{1n} \\ A_{21} & O & .... & A_{2n} \\ \dots & \dots & .... & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & .... & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & O & .... & O \\ O & A_{22} & .... & O \\ \dots & \dots & .... & \dots \\ O & O & .... & A_{nn} \end{pmatrix} = \widetilde{A}_2 \widetilde{A}_1 .$$

Таким образом, оператор $\widetilde{A}$ спектрален, поскольку он представим в виде суммы спектрального оператора $\widetilde{A}_1$ и перестановочного с ним квазинильпотентного оператора $\widetilde{A}_2$.

Так как оператор $\widetilde{A}_2$ квазинильпотентен, тогда согласно [*1*], $\sigma(\widetilde{A})$ = $\sigma(\widetilde{A}_1)$. Однако, легко показать, что

$$\sigma(\widetilde{A}_1) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma\ (A_{ii})\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $A_{ij}\,(i \neq j+1)$ – коммутирующие квазинильпотентные операторы, операторы $A_{i+1\,i}$ коммутируют, причем оператор $A = \prod_{i=1}^{n} A_{i+1\ i}$ $(A_{n+1\,i} = A_{1\,i},\ A_{i\,n+1} = A_{i\,1},\ i = 1,\ldots,n)$ является спектральным , точка нуль является изолированной точкой спектра $\sigma\ (A)$ или оператор A ограниченно обратим, пусть кроме того выполнено соотношения

$$A_{i+1\,i}\,A_{ij} = A_{i+1\,j+1}\,A_{j+1\,j},\ j = 1,\ldots,n,\ i \neq j+1,\ i = 1,\ldots,n.$$

Тогда оператор $\widetilde{A}$ спектрален и

$$\sigma\,(\widetilde{A}) = h\,(\sigma\,(A))\,,$$

где $h\,(z) = \sqrt[n]{z}$ есть одна из аналитических в спектре $\sigma\ (A)$ однозначных ветвей функции $h\,(z) = \sqrt[n]{z}$.

Доказательство. Случай $n = 2$ доказан в работе [*4*]. Пусть $n \geq 3$. Представим оператор $\widetilde{A}$ в виде суммы операторов

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} O & \ldots & O & A_{1n} \\ A_{21} & \ldots & O & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & \ldots & A_{nn-1} & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & O \\ O & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} = \widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2\,.$$

Рассмотрим оператор $\widetilde{A}_1^{\,n}$. Легко показать, что

$$\widetilde{A}_1^{\,n} = \begin{pmatrix} A & O & \ldots & O \\ O & A & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & A \end{pmatrix},$$

где $A = \prod_{i=1}^{n} A_{i+1\ i}$. Следовательно, оператор $\widetilde{A}_1^{\,n}$ будет спектральным, поскольку спектральным является оператор A. Тогда, в силу того, что операторы $\widetilde{A}_1^{\,n}$ и A имеют аналогичные свойства, то $\sigma(\widetilde{A}_1^{\,n}) = \sigma(A)$ и оператор $\widetilde{A}_1^{\,n}$ ограниченно обратим или спектр $\sigma(\widetilde{A}_1^{\,n})$ содержит точку нуль как изолированную. Отсюда, согласно [*2*] и [3], получаем, что оператор $\widetilde{A}_1$ спектрален и $\sigma(\widetilde{A}_1) = h\,(\sigma(\widetilde{A}_1^{\,n}))$.

Теперь рассмотрим оператор $\widetilde{A}_2$. Так как, в силу условия теоремы, операторы A_{ij} $(i,j = 1, \ldots, n,\ i \neq j+1)$ коммутируют и квазинильпотентны, то легко показать, что оператор $\widetilde{A}_2$ квазинильпотентен. Покажем, что операторы $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ коммутируют. Имеем

$$\widetilde{A}_1\,\widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} O & \ldots. & O & O & A_{1n} \\ A_{21} & \ldots. & O & O & O \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & \ldots. & O & A_{nn-1} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots. & A_{1n-2} & A_{1n-1} & O \\ O & \ldots. & A_{2n-2} & A_{2n-1} & A_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots. & A_{nn-2} & O & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{1n}A_{n1} & \ldots. & A_{1n}A_{nn-2} & O & A_{1n}A_{nn} \\ A_{21}A_{11} & \ldots. & A_{21}A_{1n-2} & A_{21}A_{1n-1} & O \\ O & \ldots. & A_{32}A_{2n-2} & A_{32}A_{2n-1} & A_{32}A_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{nn-1}A_{n-11} & \ldots. & O & A_{nn-1}A_{n-1n-1} & A_{nn-1}A_{n-1n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{12}A_{21} & \ldots & A_{1n-1}A_{n-1n-2} & O & A_{11}A_{1n} \\ A_{22}A_{21} & \ldots & A_{2n-1}A_{n-1n-2} & A_{2n}A_{nn-1} & O \\ O & \ldots & A_{3n-1}A_{n-1n-2} & A_{3n-1}A_{nn-1} & A_{31}A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n2}A_{21} & \ldots & O & A_{nn}A_{nn-1} & A_{n1}A_{1n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots. & A_{1n-2} & A_{1n-1} & O \\ O & \ldots. & A_{2n-2} & A_{2n-1} & A_{2n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots. & A_{nn-2} & O & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & \ldots. & O & O & A_{1n} \\ A_{21} & \ldots. & O & O & O \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & \ldots. & O & A_{nn-1} & O \end{pmatrix} = \widetilde{A}_2\,\widetilde{A}_1 .$$

Следовательно, оператор $\widetilde{A}$ спектрален, поскольку он представим в виде суммы спектрального оператора $\widetilde{A}_1$ и перестановочного с ним квазинильпотентного оператора $\widetilde{A}_2$ и согласно [*1*], $\sigma(\widetilde{A}) = \sigma(\widetilde{A}_1)$. Теорема доказана.

В дальнейшем, говоря об определителе $|\widetilde{A}|$ оператор матрицы $\widetilde{A}$ будем понимать оператор составленный из элементов $\widetilde{A}$ согласно правилам аналогичным для нахождения определителя числовой матрицы относительно его элементов.

Обозначим через $\left|\widetilde{A}_k{}^{j_1\, j_2\, ,..,j_k}_{i_1\, i_2\, ,..,i_k}\right|$ - минор k – го порядка оператор матрицы $\widetilde{A}$ составленный из строк с номерами i_1, i_2, .., i_k и столбцов с номерами $j_1, j_2 ,.., j_k$ и через A оператор $A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

Теорема 3. Пусть операторы A_{ij} коммутируют и $\left|\widetilde{A}_k{}^{i_1\, i_2\, ,..,i_k}_{i_1\, i_2\, ,..,i_k}\right| = 0$ $(2 \le k \le n)$ и $0 \in \sigma(A)$. Тогда

$$\sigma(\widetilde{A}) = \sigma(A),$$

кроме того , если A - спектральный оператор, то $\widetilde{A}$ является спектральным оператором с разложением единицы

$$\widetilde{E}\,(\cdot) = \begin{pmatrix} E(\cdot) & O & .... & O \\ O & E(\cdot) & .... & O \\ ... & ... & .... & ... \\ O & O & .... & E(\cdot) \end{pmatrix},$$

где $E(\cdot)$ - разложение единицы оператора A.

Доказательство. Очевидно, что для любых оператор матриц $\widetilde{C}$ и $\widetilde{B}$ справедливо

$$\left|\widetilde{C}\right| \left|\widetilde{B}\right| = \left|\widetilde{C}\widetilde{B}\right|.$$

Тогда, ясно, что в силу $\left|\widetilde{A}\right| = O$, $0 \in \sigma(\widetilde{A})$.

Пусть $\lambda \ne 0$. Рассмотрим оператор $\widetilde{A} - \lambda\widetilde{I}$. Имеем

$$\widetilde{A} - \lambda\widetilde{I} = \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & .... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & .... & A_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & .... & A_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что

$$\left|\widetilde{A} - \lambda\widetilde{I}\right| = (-1)^n (\lambda^n I - \lambda^{n-1} A).$$

Пусть $\lambda \in \rho(\widetilde{A})$. Обозначим через $R_\lambda(\widetilde{A})$ оператор $(\widetilde{A} - \lambda\widetilde{I})^{-1}$. Имеем

$$\left|\widetilde{A} - \lambda\widetilde{I}\right| \left|R_\lambda(\widetilde{A})\right| = \left|\widetilde{I}\right| = I,$$

отсюда

$$(-1)^n (\lambda^n I - \lambda^{n-1} A) \left|R_\lambda(\widetilde{A})\right| = I.$$

Следовательно, $\lambda \in \rho(A)$. Обратно, пусть $\lambda \in \rho(A)$. Рассмотрим оператор матрицу

$$R_\lambda(\widetilde{A}) = \begin{pmatrix} B_{11}R_\lambda(A) & B_{21}R_\lambda(A) & \ldots & B_{n1}R_\lambda(A) \\ B_{12}R_\lambda(A) & B_{22}R_\lambda(A) & \ldots & B_{n2}R_\lambda(A) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{1n}R_\lambda(A) & B_{2n}R_\lambda(A) & \ldots & B_{nn}R_\lambda(A) \end{pmatrix},$$

где B_{ij} - алгебраическое дополнение A_{ij}, $R_\lambda(A) = (-1)^n(\lambda^n I - \lambda^{n-1}A)^{-1}$. Тогда, очевидно, что

$$(\widetilde{A} - \lambda\widetilde{I})R_\lambda(\widetilde{A}) = \widetilde{I},$$

то есть $\lambda \in \rho(\widetilde{A})$.

Таким образом, $\sigma(\widetilde{A}) = \sigma(A)$.

Покажем, что оператор $\widetilde{A}$ является спектральным. Пусть A - спектральный оператор с разложением единицы $E(\cdot)$. Рассмотрим вышеуказанный оператор $\widetilde{E}(\cdot)$. Так как оператор $E(\cdot)$ коммутирует с каждым из операторов A_{ij}, то очевидно, что $\widetilde{E}(\cdot)$ коммутирует с $\widetilde{A}$. С другой стороны, аналогично вышеуказанному можно показать, что при любом борелевском подмножестве α комплексной плоскости $\sigma(\widetilde{A}_\sigma) = \sigma(A_\sigma)$, где $\widetilde{A}_\sigma$ и A_σ сужения соответствующих операторов $\widetilde{A}$ и A на подпространства $\widetilde{E}(\cdot)X^n$ и $E(\cdot)X$. Тогда, поскольку оператор A спектрален, то $\sigma(A_\sigma) \subseteq \overline{\sigma}$, значит $\sigma(\widetilde{A}_\sigma) \subseteq \overline{\sigma}$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$L(\lambda) = I - A_0 - \lambda A_1 - \ldots - \lambda^n A_n.$$

где A_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ – линейные ограниченные операторы в X, I – тождественный оператор в X.

Известно, что при линеаризации вышеуказанного пучка в X^n приходится рассматривать операторный пучок вида

$$\widetilde{L}(\lambda) = \widetilde{I} - \widetilde{B}_0 - \lambda\widetilde{B}_1,$$

где $\widetilde{I}$ - единичный оператор в X^n, а

$$\widetilde{B}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_{n-1} \\ O & O & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & O \end{pmatrix}, \widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} O & O & \ldots & O & A_n \\ I & O & \ldots & O & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & I & O \end{pmatrix}.$$

Полагая ограниченную обратимость оператора $I - A_0$, рассмотрим оператор матрицу

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} (I-A_0)^{-1}A_1 & (I-A_0)^{-1}A_2 & .... & O & (I-A_0)^{-1}A_n \\ I & O & .... & O & O \\ ... & ... & .... & ... & ... \\ O & O & .... & I & O \end{pmatrix}.$$

Прежде чем изучить некоторые спектральные свойства оператора $\widetilde{C}$, рассмотрим оператор $\widetilde{B}_1$. Установим некоторые связи операторов $\widetilde{B}_1$ и A_n.

Справедлива :

Теорема 4. Пусть A_n - ограниченно обратимый оператор. Тогда оператор A_n является спектральным оператором с разложением единицы $E(\cdot)$ тогда и только тогда, когда опрератор $\widetilde{B}_1$ является спектральным оператором с разложением единицы

$$\widetilde{E}_1(\cdot) = \begin{pmatrix} E_1(\cdot) & O & .... & O \\ O & E_1(\cdot) & .... & O \\ ... & ... & .... & ... \\ O & O & .... & E_1(\cdot) \end{pmatrix},$$

где $E_1(\cdot) = E(h(\cdot))$, а $h(z)$ - некоторая однозначная аналитическая ветвь функции $h(z)= \sqrt[n]{z}$, причем

$$\sigma_p(\widetilde{B}_1) = \bigcup \{\lambda : \lambda^n \in \sigma_p(A_n)\},$$

$$\sigma_r(\widetilde{B}_1) = \bigcup \{\lambda : \lambda^n \in \sigma_r(A_n)\},$$

$$\sigma_c(\widetilde{B}_1) = \bigcup \{\lambda : \lambda^n \in \sigma_c(A_n)\}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $n \geq 3$, поскольку при $n = 2$ теорема доказана в работе [5].

Необходимость. Пусть A_n ограниченно обратимый спектральный оператор с разложением единицы $E(\cdot)$. Рассмотрим оператор $\widetilde{B}_1^{\,n}$. Очевидно, что

$$\widetilde{B}_1^{\,n} = \begin{pmatrix} A_n & O & .... & O \\ O & A_n & .... & O \\ ... & ... & .... & ... \\ O & O & .... & A_n \end{pmatrix}.$$

Поскольку операторы $\widetilde{B}_1^{\,n}$ и A_n имеют аналогичные свойства, то $\widetilde{B}_1^{\,n}$ - ограниченно обратимый спектральный оператор с разложением единицы

$$\widetilde{E}(\cdot) = \begin{pmatrix} E(\cdot) & O & .... & O \\ O & E(\cdot) & .... & O \\ ... & ... & .... & ... \\ O & O & .... & E(\cdot) \end{pmatrix},$$

причем $\sigma(\widetilde{B}_1^{\,n}) = \sigma(A_n)$. Тогда, согласно теореме 1, оператор $\widetilde{B}_1$ спектрален и имеет разложение единицы $\widetilde{E}_1(\cdot)$.

Достаточность. Пусть A_n ограниченно обратимый. Оператор $\widetilde{B}_1$ - спектрален с разложением единицы $\widetilde{E}_1(\cdot)$. Покажем, что оператор A_n спектрален с разложением единицы $E(\cdot)$, где $E_1(\cdot) = E(h(\cdot))$. Рассмотрим оператор $\widetilde{B}_1^{\,n}$. Ясно, что $\widetilde{B}_1^{\,n}$ спектральный оператор с некоторым разложением единицы $\widetilde{E}\ (\cdot)$, определяемый матрицей

$$\widetilde{E}\ (\cdot) = \begin{pmatrix} E_{11}(\cdot) & E_{12}(\cdot) & \dots. & E_{1n}(\cdot) \\ E_{21}(\cdot) & E_{22}(\cdot) & \dots. & E_{2n}(\cdot) \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ E_{n1}(\cdot) & E_{n2}(\cdot) & \dots. & E_{nn}(\cdot) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $E_{i\,j}(\cdot) = 0\ (i \neq j),\ E_{i\,i}(\cdot) = E(\cdot)$. Для этого рассмотрим операторы

$$\widetilde{I}_{i\,j} = \begin{pmatrix} O & \dots. & O & \dots. & O \\ \dots & \dots. & \dots & \dots. & \dots \\ O & \dots. & I & \dots. & O \\ \dots & \dots. & \dots & \dots. & \dots \\ O & \dots. & O & \dots. & O \end{pmatrix}, \quad \widetilde{I}_i = \begin{pmatrix} O & \dots. & I & O & \dots. & O \\ \dots & \dots. & O & I & \dots. & \dots \\ O & \dots. & O & O & \dots. & O \\ \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots. & \dots \\ O & \dots. & O & O & \dots. & O \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{F}_{11} = \begin{pmatrix} O & \dots. & O & I \\ O & \dots. & I & O \\ O & \dots. & O & O \\ I & \dots. & O & O \end{pmatrix},$$

иначе : $\widetilde{I}_{i\,j}$ - оператор, в котором $A_{i\,j} = I$, а все остальные равны нулю: $\widetilde{I}_i$ - оператор, в котором в первой строке i-ый элемент I, а остальные O, во второй строке $i+1$ – ый элемент I, а остальные O, и т. д.

Очевидно, что оператор $\widetilde{B}_1^{\,n}$ коммутирует с каждым из операторов $\widetilde{I}_{i\,j}$, $\widetilde{I}_i$ и $\widetilde{F}_{11}$. Тогда, поскольку разложение единицы спектрального оператора коммутирует с каждым оператором, коммутирующим со спектральным оператором, то оператор $\widetilde{E}\ (\cdot)$ коммутирует с операторами $\widetilde{I}_{i\,j}$, $\widetilde{I}_i$ и $\widetilde{F}_{11}$. Далее, легко показать, что из равенств

$$\widetilde{E}\ (\cdot)\,\widetilde{I}_{i\,j} = \widetilde{I}_{i\,j}\,\widetilde{E}\ (\cdot),$$

$$\widetilde{E}\ (\cdot)\,\widetilde{I}_i = \widetilde{I}_i\,\widetilde{E}\ (\cdot),$$

$$\widetilde{E}\,(\cdot)\,\widetilde{F}_{11} = \widetilde{F}_{11}\,\widetilde{E}\,(\cdot),$$

получается, что $E_{i\,j}(\cdot) = 0\ (i \neq j),\ E_{i\,i}(\cdot) = E(\cdot)$. В силу того, что $\widetilde{E}\,(\cdot)$ спектральная мера, то очевидно, что спектральной мерой будет оператор $E(\cdot)$. Покажем, что $E(\cdot)$ – разложение единицы оператора A_n. Так как

$$\widetilde{B}_1^{\,n}\,\widetilde{E}\,(\cdot) = \widetilde{E}\,(\cdot)\,\widetilde{B}_1^{\,n},$$

то

$$A_n\,E(\cdot) = E(\cdot)\,A_n.$$

Пусть σ - произвольное борелевское подмножество комплексной плоскости. Ясно, что $\sigma((\widetilde{B}_1^{\,n})_\sigma) = \sigma((A_n)_\sigma)$, где $(\widetilde{B}_1^{\,n})_\sigma$, $(A_n)_\sigma$ - сужения, соответственно, операторов $\widetilde{B}_1^{\,n}$ и A_n на соответствующие подпространства $\widetilde{E}\,(\cdot)\,X^n$, $E(\cdot)\ X$. Следовательно, поскольку

$$\sigma((\widetilde{B}_1^{\,n})_\sigma) \subseteq \overline{\sigma},$$

то

$$\sigma((A_n)_\sigma) \subseteq \overline{\sigma}$$

и оператор A_n спектрален с разложением единицы $E(\cdot)$.

Теперь докажем вторую часть теоремы.

Пусть $\lambda \in \sigma_p(\widetilde{B}_1)$. Так как $\sigma(\widetilde{B}_1^{\,n}) = \sigma(A_n)$, то в силу ограниченной обратимости A_n, ясно, что $\sigma(\widetilde{B}_1) = h(\sigma(A_n))$ и операторы $\widetilde{B}_1 - \lambda\widetilde{I}$ и $A_n - \lambda^n I$ взаимно однозначны одновременно или нет. Следовательно, $\lambda^n \in \sigma_p(A_n)$ и обратно.

Пусть $\lambda \in \sigma_r(\widetilde{B}_1)$. Тогда существует ненулевой $\widetilde{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in (X^*)^n$, такой, что

$$\widetilde{f}\,((\widetilde{B}_1 - \lambda\widetilde{I}\,)\,\widetilde{x}\,) = 0,\ \widetilde{x} \in X^n.$$

Переходя к координатам, данное уравнение равносильно уравнению

$$\widetilde{f}\left(\begin{pmatrix} -\lambda I & \ldots & O & A_n \\ I & \ldots & O & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & \ldots & I & -\lambda I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = 0,$$

Отсюда

$$0 = (f_1, f_2, \dots, f_n)\left(\begin{pmatrix} A_n x_n - \lambda x_1 \\ x_1 - \lambda x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} - \lambda x_n \end{pmatrix}\right) =$$

$$= f_1(A_n x_n - \lambda x_1) + f_2(x_1 - \lambda x_2) + \dots + f_n(x_{n-1} - \lambda x_n).$$

Покажем, что функционал f_1 ненулевой. В самом деле, если $f_1 = 0$, то выбирая вектор $\widetilde{x}_j \in X^n$ $(j = 1, \dots, n-1)$ так, чтобы $x_i = \lambda x_{i+1}$ $(i = 1, \dots, n-1, i \neq j)$, из последнего соотношения получаем

$$f_{j+1}(x_j - \lambda x_{j+1}) = 0, \ (j = 1, \dots, n-1).$$

Так как вектора x_j и x_{j+1} произвольны, то $f_{j+1} = 0$, значит $\widetilde{f} = \widetilde{0}$, что приводит к противоречию предположения. Следовательно, функционал f_1 ненулевой. Тогда подобрав вектор $\widetilde{x} \in X^n$ так, чтобы $x_i = \lambda x_{i+1}$ $(i = 1, \dots, n-1)$, получаем

$$0 = f_1(A_n x_n - \lambda x_1) + f_2(x_1 - \lambda x_2) + \dots + f_n(x_{n-1} - \lambda x_n) = f_1(A_n x_n - \lambda^n x_n).$$

Отсюда, в силу произвольности элемента $x_n \in X$, получаем, что $\lambda^n \in \sigma_p(A_n)$. Обратно, пусть $\lambda^n \in \sigma_p(A_n)$. Тогда существует ненулевой функционал f_1, такой, что

$$f_1(A_n x_1 - \lambda^n x_1) = 0, \ x_1 \in X.$$

Рассмотрим в пространстве X^n функционал $\widetilde{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, такой, что

$$f_2 = \lambda f_1, f_3 = \lambda f_2, \dots, f_n = \lambda f_{n-1},$$

тогда, ясно, что $\widetilde{f}$ - ненулевой, причем

$$\widetilde{f}((\widetilde{B}_1 - \lambda\widetilde{I})\widetilde{x}) = f_1(A_n x_n - \lambda x_1) + f_2(x_1 - \lambda x_2) + \dots +$$
$$f_n(x_{n-1} - \lambda x_n) =$$

$$= f_1(A_n x_n - \lambda x_1) + \lambda f_1(x_1 - \lambda x_2) + \dots + \lambda^{n-1} f_1(x_{n-1} - \lambda x_n) =$$

$$= f_1(A_n x_n - \lambda^n x_n) = 0.$$

Так как вектор $\widetilde{x}$ произвольный, то $\lambda \in \sigma_r(\widetilde{B}_1)$.

Последнее утверждение теоремы справедливо, согласно доказанным утверждениям при переходе к дополнениям соответствующих спектров $\sigma(A_n)$ и $\sigma(\widetilde{B}_1)$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть A_n - ограниченно обратим. Тогда оператор A_n - спектральный оператор скалярного типа тогда и только тогда, когда $\widetilde{B}_1$ является спектральным оператором скалярного типа.

Доказательство. Пусть A_n - спектральный оператор скалярного типа. Тогда, ясно, что $\widetilde{B}_1^{\,n}$ есть спектральный оператор скалярного типа. Следовательно, в силу [3], $\widetilde{B}_1$ также является спектральным оператором скалярного типа.

Обратно, если $\widetilde{B}_1$ есть спектральный оператор скалярного типа, то ясно, что $\widetilde{B}_1^{\,n}$ есть спектральный оператор скалярного типа, тем самым спектральным оператором скалярного типа и будет оператор A_n. Теорема доказана.

Теперь перейдем к изучению спектральности оператора $\widetilde{C}$.

Теорема 5. Пусть операторы A_i попарно коммутируют, причем операторы A_i $(i = 0, \ldots, n-1)$ квазинильпотентны, а оператор A_n ограниченно обратим. Тогда

$$\sigma(\widetilde{C}) = h(\sigma((I-A_0)^{-1} A_n)),$$

причем, если $(I - A_0)^{-1} A_n$ есть спектральный оператор с разложением единицы $E(\cdot)$, то $\widetilde{C}$ есть спектральный оператор с разложением единицы

$$\widetilde{E}_1(\cdot) = \begin{pmatrix} E_1(\cdot) & O & \ldots & O \\ O & E_1(\cdot) & \ldots & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & E_1(\cdot) \end{pmatrix},$$

где $E_1(\cdot) = E(h(\cdot))$, а $h(z)$ - некоторая однозначная аналитическая ветвь функции $h(z) = \sqrt[n]{z}$.

Доказательство. Случай $n = 2$ доказан в работе [5]. При $n \geq 3$ доказательство теоремы непосредственно следует из теорем 1 и 2. Теорема доказана.

В заключение приношу благодарность своему научному руководителю проф. А. М. Ахмедову за подстановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы, спектральные операторы. т. III. М. 1974.
2. Ахмедов А.М. О несамосопряженных операторах, близких к спектральным, и их приложениях. – В кн.: Линейные операторы и их приложения, Баку, 1989, с. 3-15.
3. J. G. Stampfli. Roots of scalar operator, Proc. Amer. Math.Soc. v. 13, 1962, pp. 796 – 798.
4. Исмайлов М.И. О спектральности матричных операторов в банаховом пространстве. Труды ИММ НАНА, 2006, т. xxv, с. 47-52.
5. Исмайлов М.И. Исследование спектра и спектральности некоторых матричных операторов в банаховом пространстве. Вестник БГУ. Серия, физико-математических наук, 2007г, № 2, с. 36-43.

MATRİS OPERATORLARININ BANAX FƏZASININ DÜZ CƏMİNDƏ SPEKTRALLIĞI

M.İ.İSMAYILOV

XÜLASƏ

Məlumdur кi, Hilbert fəzalarının düz cəmində matris operatorlarının speкtrı və speкtrallığı N.Danford tərəfindən mühüm məhdud ölçülən funкsiyalar cəbrinə izometriк və izomorf olan xətti məhdud operatorların кommutativ cəbrindən istifadə etməкlə öyrənilir. Bu işdən fərqli olaraq məqalədə eyni məsələ Banax fəzalarının düz cəmində araşdırılır.

SPECTRALICITY OF MATRIX OPERATORS IN DIRECT SUM OF BANACH SPECES

M.I.ISMAYILOV

SUMMARY

It is known that the investigation of the spectrum and spectralisity of matrix operator in direct sum of Hilbert spaces studied by N. Danford using isometric isomorphism of commutative algebra of linear bounded operators with algebra of essential bounded measure complex functions. In spite of this work the present work is devoted to study the question in direct sum Banach spaces, where it is difficult construct the indicated izomorphizm.