BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФУЗИИ С ПОЛУРАСПАДАЮЩИМИСЯ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО ДВУМ СПЕКТРАМ

А.Ш.ШУКЮРОВ

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

В статье содержится доказательство единственности решения обратной задачи для уравнения диффузии, заданного на отрезке, при полураспадающихся граничных условиях. В качестве спектральных характеристик используются спектры двух краевых задач. В частности, обобщается известный результат В.А.Юрко о восстановлении оператора Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке $[0,\pi]$ дифференциальным уравнением диффузии

$$y'' + \left[\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)\right]y = 0 \tag{1}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} &y'(0) - hy(0) = 0, \\ &y'(\pi) + Hy(\pi) + by(0) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $q(x) \in L_2[0,\pi]$-комплекснозначные функции и h, H, b-комплексные числа. Через $W_2^n[0,\pi]$ обозначается пространство Соболева, состоящее из заданных на отрезке $[0,\pi]$ комплекснозначных функций, которые имеют $n-1$ абсолютно непрерывных производных и производную n-го порядка, суммируемую с квадратом на $[0,\pi]$.

Краевую задачу (1), (2) обозначим через $L(p,q,h,b,H)$.

Целью настоящей работы является доказательства теорем единственности восстановления операторов диффузии по спектрам двух задач $L(p,q,h,b,H)$ с общим уравнением и одним общим граничным условием.

Отметим, что аналогичные теоремы для операторов Штурма-Лиувилля с нераспадающимися граничными условиями имеются в работах [1-6]. В [7-11] разными подходами исследован вопрос о единственности восстановления операторов диффузии по некоторым спектральным характеристикам.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (1) при начальных условиях

$$c(0,\lambda) = 1, \;\; c'(0,\lambda) = 0$$

и

$$s(0,\lambda)=0,\quad s'(0,\lambda)=1,$$

соответственно.

Пусть $\varphi(x,\lambda)$-решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $\varphi(0,\lambda)=1,\ \varphi'(0,\lambda)=h$. Ясно, что $\varphi(x,\lambda)=c(x,\lambda)+hs(x,\lambda)$.

Легко видеть, что собственные значения задачи $L(p,q,h,b,H)$ являются нулями характеристической функции

$$\Delta(\lambda)=\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)+b.$$

Используя представления для $c(\pi,\lambda),\ c'(\pi,\lambda),\ s(\pi,\lambda),\ s'(\pi,\lambda)$ (см. [8]), можно доказать, что собственные значения λ_n $(n=\pm 0,\pm 1,\ldots)$ задачи $L(p,q,h,b,H)$ удовлетворяют следующую асимптотическую формулу:

$$\lambda_n = n + c_0 + \frac{\pi c_1 + h + H}{\pi n} + \frac{(-1)^n b}{\pi n} + \frac{f_n}{n},\qquad n\to\infty \tag{3}$$

где

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(t)dt,\quad c_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left[q(t)+p^2(t)\right]dt,\quad \sum_n |f_n|^2<\infty.$$

С помощью представления для $\varphi(x,\lambda)$ и теоремы Адамара [12, с.21] точно так же, как это сделано в [2] можно доказать, что функция $\Delta(\lambda)$ однозначно восстанавливается по $\{\lambda_n\}$.

1. Рассмотрим краевые задачи $L(p,q,h,b_k,H_k)$ $(k=1,2)$ со спектрами $\lambda_n^{(k)}$ и характеристическими функциями

$$\Delta_k(\lambda)=\varphi'(\pi,\lambda)+H_k\varphi(\pi,\lambda)+b_k\quad (k=1,2)$$

и задачи $L(\tilde{p},\tilde{q},\tilde{h},\tilde{b}_k,\tilde{H}_k)$ $(k=1,2)$ со спектрами $\mu_n^{(k)}$ и характеристическими функциями

$$\delta_k(\lambda)=\psi'(\pi,\lambda)+\tilde{H}_k\psi(\pi,\lambda)+\tilde{b}_k,$$

где $\psi(x,\lambda)$-решение уравнения (1) при начальных условиях

$$\psi(0,\lambda)=1,\quad \psi'(0,\lambda)=\tilde{h}.$$

Теорема 1. Пусть при всех n имеет место $\lambda_n^{(k)}=\mu_n^{(k)}$ $(k=1,2)$. Тогда $\tilde{p}(x)=p(x),\ \tilde{q}(x)=q(x)$ почти всюду на $[0,\pi]$, $h=\tilde{h},\ b_k=\tilde{b}_k,\ H_k=\tilde{H}_k$.

Доказательство. Пусть $\lambda_n^{(k)}=\mu_n^{(k)}$. Тогда в этих равенствах рассматривая четные и нечетные значения n в отдельности, в силу (3) легко получаем, что

$$h=\tilde{h}_k, \tag{4}$$

а из равенства $\lambda_n^{(2)}-\lambda_n^{(1)}=\mu_n^{(2)}-\mu_n^{(1)}$ имеем

$$H_2 - H_1 = \widetilde{H}_2 - \widetilde{H}_1. \tag{5}$$

Согласно асимптотическим формулам для спектров краевых задач $L(p,q,h,b_k,H_k), L(\widetilde{p},\widetilde{q},\widetilde{h},\widetilde{b}_k,\widetilde{H}_k)$ получаем:

$$c_0 = \widetilde{c}_0. \tag{6}$$

Из совпадения спектров вытекает, что

$$\Delta_k(\lambda) = \delta_k(\lambda),\ k = 1,2, \tag{7}$$

следовательно,

$$(H_2 - H_1)\varphi(\pi,\lambda) + b_2 - b_1 = (\widetilde{H}_2 - \widetilde{H}_1)\psi(\pi,\lambda) + \widetilde{b}_2 - \widetilde{b}_1.$$

Учитывая (4) и (5), получаем:

$$\varphi(\pi,\lambda) = \psi(\pi,\lambda). \tag{8}$$

В силу теоремы 1 работы [7]

$$\varphi(\pi,\lambda) = \boldsymbol{\cos}[\lambda\pi - c_0] + \int_0^\pi A(\pi,t)\boldsymbol{\cos}\,\lambda t dt + \int_0^\pi B(\pi,t)\boldsymbol{\sin}\,\lambda t dt,$$

$$\psi(\pi,\lambda) = \boldsymbol{\cos}[\lambda\pi - \widetilde{c}_0] + \int_0^\pi \widetilde{A}(\pi,t)\boldsymbol{\cos}\,\lambda t dt + \int_0^\pi \widetilde{B}(\pi,t)\boldsymbol{\sin}\,\lambda t dt.$$

Из (8) ввиду равенства (6) получаем:

$$\int_0^\pi \left[A(\pi,t) - \widetilde{A}(\pi,t)\right]\cos\lambda t dt + \int_0^\pi \left[B(\pi,t) - \widetilde{B}(\pi,t)\right]\sin\lambda t dt = 0$$

или

$$\int_0^\pi \frac{\left\{A(\pi,t) - \widetilde{A}(\pi,t)\right\} - i\left\{B(\pi,t) - \widetilde{B}(\pi,t)\right\}}{2} \cdot e^{i\lambda t} dt -$$
$$- \int_{-\pi}^0 \frac{\left\{A(\pi,-t) - \widetilde{A}(\pi,-t)\right\} + i\left\{B(\pi,-t) - \widetilde{B}(\pi,-t)\right\}}{2} \cdot e^{i\lambda t} dt = 0. \tag{9}$$

Введем функцию

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{A(\pi,t) - \widetilde{A}(\pi,t) - i\left(B(\pi,t) - \widetilde{B}(\pi,t)\right)}{2}, & t \in [0,\pi], \\ \dfrac{A(\pi,t) - \widetilde{A}(\pi,t) + i\left(B(\pi,t) - \widetilde{B}(\pi,t)\right)}{2}, & t \in [-\pi,0]. \end{cases}$$

Тогда из (9) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{i\lambda t} dt \equiv 0,$$

отсюда в силу теоремы единственности для преобразований Фурье следует, что $F(t) = 0$ почти всюду на $[-\pi,\pi]$. Последнее тождество с помощью функций $A(\pi,t), \widetilde{A}(\pi,t), B(\pi,t), \widetilde{B}(\pi,t)$ записывается так:

$$A(\pi,t)-\widetilde{A}(\pi,t)-i\left(B(\pi,t)-\widetilde{B}(\pi,t)\right)=0, \qquad t\in[0,\pi],$$
$$A(\pi,t)-\widetilde{A}(\pi,t)+i\left(B(\pi,t)-\widetilde{B}(\pi,t)\right)=0, \qquad t\in[0,\pi].$$

Отсюда сразу же вытекает, что

$$A(\pi,t)=\widetilde{A}(\pi,t),\ B(\pi,t)=\widetilde{B}(\pi,t), \qquad t\in[0,\pi]$$

и в частности,

$$A(\pi,\pi)=\widetilde{A}(\pi,\pi),\ B(\pi,\pi)=\widetilde{B}(\pi,\pi). \tag{10}$$

Из (3) непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \pi c_1+h+H_1&=\pi\widetilde{c}_1+\widetilde{h}+\widetilde{H}_1,\\ \pi c_1+h+H_2&=\pi\widetilde{c}_1+\widetilde{h}+\widetilde{H}_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Известно, что (см. [7])

$$\frac{1}{2}\left[q(x)+p^2(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[A(x,x)\cos\alpha(x)+B(x,x)\sin\alpha(x)\right].$$

Интегрируя последнее равенство от 0 до π, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(q(x)+p^2(x)\right)dx=A(\pi,\pi)\cos c_0+B(\pi,\pi)\sin c_0-h.$$

Так как

$$c_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left[q(x)+p^2(x)\right]dx,$$

то

$$h+\pi c_1=A(\pi,\pi)\cos c_0+B(\pi,\pi)\sin c_0.$$

Аналогично

$$\widetilde{h}+\pi\widetilde{c}_1=\widetilde{A}(\pi,\pi)\cos\widetilde{c}_0+\widetilde{B}(\pi,\pi)\sin\widetilde{c}_0.$$

Принимая во внимание равенства (6) и (10), из (11) получаем

$$H_1=\widetilde{H}_1, \qquad H_2=\widetilde{H}_2. \tag{12}$$

Теперь равенство (7) вместе с полученными соотношениями (4), (8) и (12) влечет за собой совпадение функций $\varphi'(\pi,\lambda)$ и $\psi'(\pi,\lambda)$:

$$\varphi'(\pi,\lambda)=\varphi'(\pi,\lambda).$$

В результате мы получаем, что характеристические функции краевых задач, порожденных уравнением (1) и граничными условиями

$$y'(0)-hy(0)=y(\pi)=0$$

и

$$y'(0)-hy(0)=y'(\pi)=0.$$

совпадают, соответственно, с характеристическими функциями задач, порожденных уравнением

$$y''+\left[\lambda^2-2\lambda\widetilde{p}(x)-\widetilde{q}(x)\right]y=0$$

и граничными условиями

$$y'(0)-\widetilde{h}y(0)=y(\pi)=0,$$

$$y'(0)-\widetilde{h}y(0)=y'(\pi)=0.$$

Это влечет [см. 7] равенство $p(x)=\widetilde{p}(x),\ q(x)=\widetilde{q}(x)$ почти всюду на отрезке $[0,\pi]$ и $\widetilde{h}=h$. Теорема доказана.

2. Рассмотрим теперь краевые задачи $L(p,q,h_k,b,H)$ $(k=1,2)$. Обозначим через $\eta_n^{(k)}$ $(n=\pm 0,\pm 1,...)$ собственные значения задачи $L(p,q,h_k,b,H)$.

Теорема 2. Задание двух спектров $\{\eta_n^{(1)}\}, \{\eta_n^{(2)}\}$ однозначно определяет коэффициенты $p(x),\ q(x)$ уравнения (1) и параметры h_1,h_2,H,b граничных условий.

Доказательство. Собственные значения рассматриваемых краевых задач совпадают, соответственно, с нулями характеристических функций

$$d_k(\lambda)=c'(\pi,\lambda)+Hc(\pi,\lambda)-b+h_k(s'(\pi,\lambda)+Hs(\pi,\lambda)). \qquad (13)$$

По спектрам задач $L(p,q,h_k,b,H)$ можно однозначно восстановить функции $d_k(\lambda)$ $(k=1,2)$ в виде бесконечного произведения.

Согласно асимптотическим формулам (3)

$$h_2-h_1=\pi\lim_{n\to\infty}n\left(\eta_n^{(2)}-\eta_n^{(1)}\right).$$

Функцию $s'(\pi.\lambda)+Hs(\pi.\lambda)$ можно восстановить следующим образом:

$$s'(\pi.\lambda)+Hs(\pi.\lambda)=\frac{d_2(\lambda)-d_1(\lambda)}{h_2-h_1}.$$

Ясно, что нули $\{z_n\}$ этой функции являются собственными значениями краевой задачи, порожденной на $[0,\pi]$ уравнением (10) и граничными условиями

$$y(0)=y'(\pi)+Hy(\pi)=0. \qquad (14)$$

Другими словами, задание спектров $\{\eta_n^{(k)}\}$ единственным образом восстанавливает спектр задачи (1), (14).

Известно (см. [10]), что собственные значения $\{z_n\}$ задачи (1), (14) удовлетворяют асимптотической формуле

$$z_n=n-\frac{1}{2}sign n+c_0+\frac{\pi c_1+H}{\pi n}+\frac{p_k}{k}, \qquad \{p_k\}\in l_2.$$

Согласно (3) получаем

$$b=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}n\left(\eta_{2n+1}^{(k)}-\eta_{2n-1}^{(k)}\right). \qquad (15)$$

Легко убедиться, что зная $\{\eta_n^{(k)}\}$ и $\{z_n\}$ можно восстановить параметры h_k $(k=1,2)$ по формуле

$$h_k=b+\pi\lim_{n\to\infty}(2n+1)\left(\eta_{2n+1}^{(k)}-z_{2n+1}-\frac{1}{2}\right). \qquad (16)$$

Функцию $c'(\pi,\lambda)+Hc(\pi,\lambda)$ можно определить следующим образом:

$$c'(\pi,\lambda)+Hc(\pi,\lambda)=\frac{h_2 d_1(\lambda)-h_1 d_2(\lambda)}{h_2-h_1}-b\ .$$

Значит, и собственные значения краевой задачи порожденной уравнением (1) и граничными условиями

$$y'(0)=y'(\pi)+Hy(\pi)=0\ , \tag{17}$$

восстанавливаются по $\left\{\eta_n^{(k)}\right\}$ однозначно.

Тогда в силу [7] по спектрам задач (1), (14) и (1), (17) однозначно восстанавливаются $p(x)$, $q(x)$ уравнения (1) и параметр H. Это вместе с (15) и (16) доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовничий В.А. Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями. Регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя // Докл. АН СССР, 1972, т.205, №2, с.293-296.
2. Юрко В.А. Обратная задача для обыкновенных линейных дифференциальных операторов второго порядка на конечном интервале с нераспадающимися краевыми условиями. В сб. «Исследование по дифф. урав. и теории функций». Саратов, выпуск 4, 1974, с.84-103.
3. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Решение одного класса обратных краевых задач Штурма-Лиувилля // Матем. сборник , 1995, т.186, №5, с.35-48,
4. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Аналоги теоремы единственности Борга в случае нераспадающихся краевых условий // Докл. РАН, 1999, т.367, №6, с.739-741.
5. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача Штурма-Лиувилля: Теоремы единственности и контрпримеры // Докл. РАН, 2006, т.411, №6, с.747-750.
6. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
7. Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш. Определение оператора диффузии по спектральным данным // Докл. АН Азерб. ССР, 1981, т.37, №2, с.19-23.
8. Гусейнов Г.Ш. Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля на конечном интервале. В сб. «Спектральная теория операторов и ее приложения», Баку, 1986, вып. 7, с.51-101.
9. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Об одном классе обратных задач для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля // Дифференц. Уравнения, 2000, т.36, №3, с.418-420.
10. Nabiev I.M. The uniqueness of reconstruction of quadratic bundle for Sturm-Liouville operators // Proceedings of IMM of NAS of Azerb., 2004, V. XX, p. 91-96.
11. Набиев И.М. Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии // Докл. РАН, 2007, т.415, №2.
12. Левин Б.Я. Целые функции. М.: изд-во МГУ, 1971.

YARIMAYRILAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ DİFFUZİYA OPERATORLARININ İKİ SPEKTR ÜZRƏ BƏRPASININ YEGANƏLİYİ

A.Ş.ŞÜKÜROV

XÜLASƏ

Məqalədə parçada yarımayrılan sərhəd şərtli diffuziya operatoru üçün tərs məsələnin həllinin yeganəliyi isbat edilmişdir. Spektral xarakteristikalar olaraq iki sərhəd məsələsinin spektri götürülmüşdür. Xüsusi halda, Şturm-Liuvill operatorunun bərpası haqqında olan nəticə ümumiləşdirilmişdir.

THE UNIQUENESS OF RECONSTRUCTION OF DIFFUSION OPERATORS ON TWO SPECTRA

A.Sh.SHUKUROV

SUMMARY

In the paper the uniqueness of solution of diffusion operator given at the finite interval with semi-separated boundary conditions are proved. Spectra of two boundary value problems are used as spectral characteristics. In particular, the known result about Sturm-Liouville operator is generalized.