BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 **Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası** **2007**

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Дж.Дж.МАМЕДОВА
Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается задача минимума интегрального функционала при наличии нелокальных векторных условий типа равенств. Из-за наличия нелокальных условий применять классическое правило множителей Лагранжа невозможно. Поэтому, применяя «метод сужения класса допустимых вариаций», получены необходимые условия оптимальности в виде интегро-дифференциального уравнения. Показаны, что эти необходимые условия являются более общими, чем уравнение Эйлера-Лагранжа.

Постановка задачи

Пусть R^m - евклидовое пространство m-мерных векторов $x=(x_1,\dots,x_m)$, а $\|x\|_m = \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|$ - норма в этом пространстве; $T=(t_0,t_1)$, $L_{p,m}(T), 1 \le p < \infty$ - пространство измеримых на T, m-мерных вектор-функций $x(t)=(x_1(t),\dots,x_m(t))$, имеющих p – интегрируемые компоненты. Норму в $L_{p,m}(T)$ определим равенством

$$\|x\|_{p,m} = \left(\int_T \|x(t)\|_m^p \, dt \right)^{1/p} < \infty;$$

$L_{\infty,m}(T)$ пространство почти везде ограниченных измеримых на T m-мерных вектор-функций $x(t)=(x_1(t),\dots,x_m(t))$. Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|x\|_{\infty,m} = Vrai\sup \|x(t)\|_m;$$

$W_{p,m}^{(k)}(T)$, $1 \le p \le \infty$ - пространство m-мерных вектор-функций $x(t)=(x_1(t),\dots,x_m(t))$ из $L_{p,m}(T)$, которые имеют в смысле С.Л.Соболева производные $x^{(i)}(t)$, $i=1,..,k$, принадлежащие пространству $L_{p,m}(T)$. В этом пространстве можно определить следующие две эквивалентные нормы:

$$\|x\|^{(0)}_{p,m,k} = \sum_{i=0}^{k} \left\|x^{(i)}\right\|_{p,m},$$
$$\|x\|^{(1)}_{p,m,k} = \sum_{i=0}^{k-1} \left\|x^{(i)}(t_0)\right\|_{m} + \left\|x^{(k)}\right\|_{p,m}.$$

В частном случае $W^{(0)}_{p,m}(T)=L_{p,m}(T)$, $W^{(k)}_{p,1}(T)=W^{(k)}_{p}(T)$, $L_{p,1}(T)=L_{p}(T)$.

Рассмотрим следующую задачу: найти такую вектор-функцию $x=x(t)\in W^{(1)}_{\infty,m}(T)$, которая доставляет минимум функционалу

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x,\dot{x})dt \tag{1}$$

при наличии нелокальных векторных условий

$$e_k(x)=\sum_{i=1}^{m} x(\alpha_i)a_{k,i}+\int_{t_0}^{t_1}[x(t)A_k(t)+\dot{x}(t)B_k(t)]dt=x^{(k)},\quad k=1,...,N, \tag{2}$$

здесь $F:T\times R^m\times R^m\to R$ - заданная функция; $\alpha_i\in\overline{T}$ - заданные точки; $x^{(k)}\in R^m$- заданные векторы; $a_{k,i}\in R^{m\times m}$, $A_k\in L_{1,m\times m}(T)$ и $B_k\in L_{1,m\times m}(T)$ - заданные $m\times m$-мерные матрицы, где $R^{m\times m}$ - пространство $m\times m$-мерных постоянных матриц, а $L_{p,m\times m}(T)$- пространство $m\times m$-мерных матриц со строками из $L_{p,m}(T)$.

Предположим, что функция $F(t,x,\dot{x})$ удовлетворяет условиям:

1) Функция $F(t,x,\dot{x})$ в $T\times R^m\times R^m$ удовлетворяет условиям Каратеодори (т.е. почти для всех $t\in T$ непрерывна по $(x,\dot{x})$ в $R^m\times R^m$, а для всех $(x,\dot{x})\in R^m\times R^m$ измерима по t в T);

2) Функция $F(t,x,\dot{x})$ имеет частные производные $F_{x_i}(t,x,\dot{x})$, $F_{\dot{x}_i}(t,x,\dot{x})$, $i=1,2,...,n$. Эти производные в $T\times R^m\times R^m$ удовлетворяют условиям Каратеодори. Будем предполагать, что производные $F_{x_i}(t,x,\dot{x})$ и $F_{\dot{x}_i}(t,x,\dot{x})$ рассматриваются как вектор-столбцы;

3) Для любого положительного $\delta\in R$ существуют неотрицательные функции $M_\delta\in L_1(T)$ и $L_\delta\in L_1(T)$ такие, что почти для всех $t\in T$ и для всех точек

$$(x,\dot{x}),(y,\dot{y})\in S_\delta=\left\{(z,\dot{z})\in R^m\times R^m \,\middle|\, \|z\|_m\le\delta,\ \|\dot{z}\|_m\le\delta\right\}$$

выполняются условия

$$\left|F(t,x,\dot{x})\right|+\left\|F_x(t,x,\dot{x})\right\|_m+\left\|F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\right\|_m\le M_\delta(t)$$

и

$$\|F_x(t,x,\dot{x}) - F_x(t,y,\dot{y})\|_m + \|F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) - F_{\dot{x}}(t,y,\dot{y})\|_m \le$$
$$\le L_\delta(t)\left[\|x-y\|_m + \|\dot{x}-\dot{y}\|_m\right].$$

Задачу определения минимума (1) при условиях (2) можно было рассматривать также в пространстве $W_{p,m}^{(1)}(T)$ при условии, что $1 \le p < \infty$. В этом пространстве вектор-функционалы e_k имеют смысл, например, если $A_k \in L_{1,m\times m}(T)$ и $B_k \in L_{q,m\times m}(T)$. Однако в этом пространстве нелинейный функционал (1) может иметь смысл только при более жестких, чем 1)-3) условиях на $F(t,x,\dot{x})$. Поэтому мы ограничились случаем $p = \infty$.

В частном случае, если условия (2) будут вида

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \tag{3}$$

тогда получим простейшую задачу классического вариационного исчисления.

Необходимые условия экстремума

В поставленной задаче минимум функционала (1) ищется на множестве

$$D^{(1)} = \left\{x \in W_{\infty,m}^{(1)}(T)\middle| e_k x = x^{(k)},\quad k = 1,\dots,N\right\}.$$

Пусть задана некоторая вектор-функция $x \in D^{(1)}$. В таком случае, любую вектор-функцию $h(t)$ из $W_{\infty,m}^{(1)}(T)$, обеспечивающую условие $x + h \in D^{(1)}$, назовем допустимой вариацией для $x = x(t)$. Множество таких допустимых вариаций обозначим через

$$M(x) = \left\{h \in W_{\infty,m}^{(1)}(T)\middle| x + h \in D^{(1)}\right\}.$$

Вектор-функционалы e^k, $k = 1,\dots,N$, - линейные. Поэтому очевидно, что класс допустимых вариаций $M(x)$ для любой вектор-функции $x \in D^{(1)}$ связан только с функционалами $e^{(k)}$ и не зависит от выбора $x \in D^{(1)}$. Класс таких допустимых вариаций совпадает с подпространством

$$H^{(1)} = \left\{h \in W_{\infty,m}^{(1)}(T)\middle| e_k h = 0,\ k = 1,\dots,N\right\}, \tag{4}$$

т.е. $M(x) = H^{(1)}$.

Первой вариацией функционала (1) в точке $x \in D^{(1)}$ назовем такой линейный функционал $\varphi: H^{(1)} \to R$, что

$$J(x+h) - J(x) = \varphi(h) + 0(h),$$

где $h \in H^{(1)}$ и $0(h)\|h\|_{W_{\infty,m}^{(1)}(T)} \to 0$ при $\|h\|_{W_{\infty,m}^{(1)}(T)} \to 0$.

Первую вариацию функционала $J(x)$ обозначим $J'(x)(h) = \varphi(h)$. Как известно, первая вариация функционала (1) имеет вид

$$J'(x)(h) = \int_{t_0}^{t_1}[h(t)F_x(t) + \dot{h}(t)F_{\dot{x}}(t)]dt,\quad h \in H^{(1)},$$

где вектор-функции $F_x(t)$ и $F_{\dot{x}}(t)$ являются значениями в точке $(t,x(t),\dot{x}(t))$ производных $F_x(t,x,\dot{x})$ и $F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})$. Тогда для задачи (1), (2) необходимое условие экстремума состоит из равенства

$$J'(x)(h)=\int_{t_0}^{t_1}[h(t)F_x(t)+\dot{h}(t)F_{\dot{x}}(t)]dt=0,\quad \forall h\in H^{(1)}. \tag{5}$$

Допустимое вариационное пространство для простой задачи (1), (3) классического вариационного исчисления – это элементарное пространство в виде

$$H^{(1)}=H_0^{(1)}=\left\{h\in W_{\infty,m}^{(1)}(T)\middle| h(t_0)=h(t_1)=0\right\}.$$

Поэтому, если рассмотреть достаточно малую окрестность $T_{\xi\varepsilon}=(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\subset T,\varepsilon>0$ любой точки $\xi\in(t_0,t_1)$, то для любой заранее определенной вектор-функции $h=h_0(t)\in W_{\infty,m}^{(1)}(T)$ можно найти такую допустимую вариацию $h=h(t)\in H_0^{(1)}$, что $h(t)=h_0(t)$, $t\in T_{\xi,\varepsilon}$. Отсюда, используя лемму Дюбуа–Реймона для этого случая из условия

$$\int_{t_0}^{t_1}[h(t)F_x(t)+\dot{h}(t)F_{\dot{x}}(t)]dt=0,\quad \forall h\in H_0^{(1)} \tag{6}$$

получим дифференциальную

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}(t)-F_x(t)=0 \tag{7}$$

или интегральную форму

$$\int_{t}^{t_1}F_x(\xi)d\xi+F_{\dot{x}}(t)=const \tag{8}$$

уравнения Эйлера-Лагранжа.

В задаче (1), (2) вектор-функционалы e_k являются нелокальными. Поэтому допустимое вариационное пространство $H^{(1)}$ не имеет (как, скажем, H_0^1) известную простоту.

Поэтому для задачи (1), (2), используя лемму Дюбуа-Реймона или её какую-нибудь обобщенную форму, условие (5) невозможно привести к уравнению Эйлера-Лагранжа или необходимому условию в более общей форме, чем уравнение Эйлера-Лагранжа. Поэтому, для того, чтобы из условия (5) вывести нужное необходимое условие, будем пользоваться одним приёмом, суть которого заключается в следующем.

Для задачи (1), (2) множество $H^{(1)}$ является классом допустимых вариаций. А теперь рассмотрим еще более узкий класс $H^{(N)}=$ $=\left\{h\in W_{\infty,m}^{(N)}(T)\middle| e_k h=0,\ k=1,\dots,N\right\}$. Очевидно, что $H^{(N)}$ подпространство пространства $W_{\infty,m}^{(N)}(T)$. А условие (5) в частном случае показывает, что условие

$$\int_{t_0}^{t_1}[h(t)F_x(t)+\dot{h}(t)F_{\dot{x}}(t)]dt=0,\quad \forall h\in H^{(N)} \tag{9}$$

тоже необходимое условие экстремума.

Для задачи (1), (2) пространство $H^{(N)}$ как класс допустимых вариаций обладает известной особой простотой в отличие от $H^{(1)}$. Эта простота заключается в следующем свойстве.

В пространстве $W_{\infty,m}^{(N)}(T)$ рассмотрим задачу:

$$h^{(N)}(t)=\eta^0(t),\ \ t\in T, \tag{10}$$

$$e_k h=0,\ \ k=1,...,N. \tag{11}$$

Здесь $\eta^0=\eta^0(t)\in L_{\infty,m}(T)$ - заданные вектор-функции.

Для задачи (10), (11) (даже если уравнение (10) заменить линейным уравнением N-го порядка общего вида) справедливы теоремы Фредгольма. В частном случае, отсюда следует, что если однородная задача

$$h^{(N)}(t)=0,\ \ t\in T, \tag{12}$$

$$e_k h=0,\ \ k=1,...,N, \tag{13}$$

имеет единственное тривиальное решение, то для любого $\eta^0(t)\in L_{\infty,m}(T)$ задача (10), (11) имеет единственное решение $h\in W_{\infty,m}^{(N)}(T)$.

Линейный ограниченный оператор $V: H^{(N)}\to L_{\infty,m}(T)$, определяемый равенством $(Vh)(t)=h^{(N)}(t)$, имеет ограниченный обратный $V^{-1}: L_{\infty,m}(T)\to H^{(N)}$ и этот обратный оператор с помощью матрицы Грина $G(\xi,t)$ задачи (10), (11) задается в виде:

$$h(t)=(V^{-1}\eta^0)(t)=\int_{t_0}^{t_1}\eta^0(\xi)G(\xi,t)d\xi. \tag{14}$$

Отсюда очевидно, что оператор V^{-1} представляет изоморфизм из $L_{\infty,m}(T)$ на $H^{(N)}$. В частном случае, отсюда можно получить, что любую вектор-функцию $h\in H^{(N)}$ с помощью единственной известной вектор-функции $\eta^0\in L_{\infty,m}(T)$ можно представить в виде (14). Используя это, выражение (9) можно привести к виду

$$\int_{t_0}^{t_1}\eta^0(\xi)\left\{\int_{t_0}^{t_1}[G(\xi,t)F_x(t)+G_t(\xi,t)F_{\dot{x}}(t)]dt\right\}d\xi=0,\quad \forall\eta^0\in L_{\infty,m}(T) \tag{15}$$

и далее учитывая, что (15) справедливо для любой $\eta^0(t)$, отсюда получим условие

$$\int_{t_0}^{t_1}[G(\xi,t)F_x(t)+G_t(\xi,t)F_{\dot{x}}(t)]dt=0,\ \ \xi\in T. \tag{16}$$

Если $N = 1$, тогда задача (10), (11) имеет вид:

$$\dot{h}(t) = \eta^0(t), \quad t \in T \, , \tag{17}$$

$$e_1 h = 0 \, . \tag{18}$$

Для этого случая из соотношения (16) следует:

$$\int_{t_0}^{t_1} G(\xi, t) F_x(t) dt + F_{\dot{x}}(\xi) = 0, \quad \xi \in T \, . \tag{19}$$

Итак, в общем случае доказана следующая

Теорема. Пусть однородная задача (12), (13) имеет единственное тривиальное решение, а $G(\xi, t)$ - функция Грина задачи (10), (11). Тогда, если вектор-функция $x = x(t)$ дает экстремум в задаче (1), (2), то $x(t)$ удовлетворяет соотношению (16) в случае $N \geq 2$ и (19) в случае $N = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.М., Тихомиров Ф.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., Наука, 1979.
2. Владимиров В.С. Уравнение математической физики. М., Наука, 1976.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М., Наука, 1980.

BƏZİ QEYRİ-LOKAL VARİASİYA MƏSƏLƏLƏRİNDƏ EKSTREMUMUN ZƏRURİ ŞƏRTLƏRİ

C.C.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

İşdə bərabərlik tipli qeyri-lokal vektor şərtləri daxilində inteqral funksionalın minimumu məsələsinə baxılır. Qeyri-lokal şərtlər daxilində klassik Laqranj vuruqları qaydasını tətbiq etmək mümkün deyil. Ona görə də «mümkün variasiyalar sinfinin sıxılma üsulunu» tətbiq edərək inteqro-diferensial tənlik şəklində optimallığın zəruri şərtləri alınmışdır. Göstərilmişdir ki, bu zəruri şərtlər Eyler-Laqranj tənliyinə nisbətən daha ümumidir.

NECESSARY CONDITIONS OF THE EXTREMA IN SOME NONLOCAL VARIATIONAL PROBLEMS

J.J.MAMEDOVA

SUMMARY

In the paper there is considered a problem of minimum of integral functional at the presence of vector conditions of equality type. Classical role of Lagrange multipliers is impossible from that the presence of nonlocal conditions. Therefore, applying "method of restriction of the class of admissible variations" the necessary conditions of optimality are obtained in the form of inteqro-differential equation. It was shown that this necessary condition is more general than the Euler-Lagrange equation.