

**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Г.Ф.КУЛИЕВ*, Х.Т.ТАГИЕВ**

*Бакинский Государственный Университет,

**«Нефтьгазавтомат» НПП

В настоящей работе изучается задача оптимального управления для одномерного волнового уравнения с нелокальными граничными условиями. Рассматривается решение почти всюду смешанной задачи из $W_2^2(Q)$. Выводится необходимое и достаточное условие оптимальности в рассматриваемой задаче оптимального управления, при этом приращение решения смешанной задачи представляется с помощью формулы Даламбера.

Математические модели некоторых физических процессов описываются дифференциальными уравнениями в частных производных с нелокальными краевыми условиями, так как характеристические величины этих процессов локально измерить невозможно или они задаются своими средними значениями. Поэтому исследование задач оптимального управления в таких процессах имеет важное значение.

Отметим, что задачи оптимального управления для гиперболических уравнений с нелокальными условиями изучены недостаточно. В этом направлении отметим близкие работы [1], [2].

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathcal{G}(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in (0, \ell), \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad (1.3)$$

$$\int_0^{\ell} u(x, t) dx = 0, \quad 0 < t < T, \quad (1.4)$$

где $u(x, t)$ - состояние процесса, $\mathcal{G}(x, t)$ - управляющая функция,

$Q = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$. За класс допустимых управлений берем множество $V = \{\mathcal{G}(x, t) \mid \mathcal{G}(x, t), \mathcal{G}_t(x, t), \mathcal{G}_u(x, t) \in L_2(Q), \|\mathcal{G}_u\| \leq M\}$, где M – заданное число. Мы будем рассматривать решение почти всюду задачи (1.1)-(1.4). При каждом допустимом управлении $\mathcal{G}(x, t)$ под решением задачи (1.1)-(1.4) понимается функция $u(x, t)$, которая принадлежит $W_2^2(Q)$, удовлетворяет для почти всех $(x, t) \in Q$ уравнению (1.1), а начальным и граничным условиям (1.2), (1.3), (1.4) в обычном смысле. Будем предполагать, что каждому допустимому управлению соответствует единственное решение задачи (1.1)-(1.4).

Ставится следующая задача оптимального управления: найти такое управление из V , что оно вместе с решением задачи (1.1)-(1.4) доставляет минимум функционалу

$$J(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} \iint_Q (u - \bar{u})^2 dxdt + \frac{1}{2} \iint_Q \mathcal{G}^2(x, t) dxdt, \quad (1.5)$$

где $\bar{u}(x, t)$ – заданная функция из $W_2^{0,1}(Q)$.

Поскольку задача (1.1)-(1.4) линейная, а функционал (1.5) квадратичный, нетрудно доказать теорему существования единственного оптимального управления в задаче (1.1)-(1.5).

Если учесть граничное условие (1.4), то интегрируя уравнение (1.1) в пределах от 0 до ℓ , получим:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(\ell, t)}{\partial x} = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, t) dx. \quad (1.6)$$

Заметим, что в [3] доказана, что задача (1.1)-(1.4) эквивалентна задаче (1.1)-(1.3), (1.6).

Нашей целью является вывод необходимого условия оптимальности в рассматриваемой задаче оптимального управления.

2. Приращение функционала (1.5). Пусть $\mathcal{G}_0(x, t)$ и $\mathcal{G}(x, t) = \mathcal{G}_0(x, t) + \Delta \mathcal{G}(x, t)$ – два допустимых управления, а $u_0(x, t)$ и $u(x, t) = u_0(x, t) + \Delta u(x, t)$ – соответствующие им решения краевой задачи (1.1)-(1.3), (1.6). Тогда ясно, что

$$\Delta J(\mathcal{G}) = \iint_Q (u_0 - \bar{u}) \Delta u dxdt + \iint_Q \mathcal{G}_0 \Delta \mathcal{G} dxdt + \frac{1}{2} \iint_Q [(\Delta u)^2 + (\Delta \mathcal{G})^2] dxdt,$$

а $\Delta u(x, t)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} = \Delta \mathcal{G}, \quad (2.1)$$

$$\Delta u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Delta u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (2.2)$$

$$\Delta u(0, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Delta u(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Delta u(\ell, t)}{\partial x} = \int_0^\ell \Delta \mathcal{G}(x, t) dx. \quad (2.4)$$

Для любой $\psi(x, t)$ из $W_2^2(Q)$ имеем:

$$\begin{aligned} \Delta J(\mathcal{G}) = & \iint_Q (u_0 - \bar{u}) \Delta u dx dt + \iint_Q \mathcal{G}_0 \Delta \mathcal{G} dx dt + \iint_Q \left(\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} \right) \psi(x, t) dx dt - \\ & - \iint_Q \psi(x, t) \Delta \mathcal{G} dx dt + \frac{1}{2} \iint_Q [(\Delta u)^2 + (\Delta \mathcal{G})^2] dx dt. \end{aligned}$$

Имея в виду, что $\Delta u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial \Delta u(x, 0)}{\partial t} = 0$, учитывая условия (2.4) и

интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta J(\mathcal{G}) = & \iint_Q (u_0 - \bar{u}) \Delta u dx dt + \iint_Q (\psi_{tt} - \psi_{xx}) \Delta u dx dt + \iint_Q \mathcal{G}_0 \Delta \mathcal{G} dx dt - \\ & - \iint_Q \psi \Delta \mathcal{G} dx dt + \int_0^T \Delta u_x(0, t) [\psi(0, t) - \psi(\ell, t)] dt + \iint_Q \Delta \mathcal{G}(x, t) dx \psi(\ell, t) dt + \\ & + \int_0^\ell \frac{\partial \Delta u(x, T)}{\partial t} \psi(x, T) dx - \int_0^\ell \Delta u(x, T) \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} dt + \int_0^T \frac{\partial \psi(\ell, t)}{\partial x} \Delta u(\ell, t) + \\ & + \frac{1}{2} \iint_Q [(\Delta u)^2 + (\Delta \mathcal{G})^2] dx dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Выберем $\psi(x, t)$ как решение следующей сопряженной задачи:

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} = -(u_0 - \bar{u}), \quad (2.6)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \psi_t(x, T) = 0, \quad (2.7)$$

$$\psi_x(\ell, t) = 0, \quad \psi(0, t) = \psi(\ell, t). \quad (2.8)$$

Тогда из (2.5) получаем

$$\Delta J(\mathcal{G}) = \iint_Q [\mathcal{G}_0(x, t) - \psi(x, t) + \psi(\ell, t)] \Delta \mathcal{G} dx dt + R, \quad (2.9)$$

где

$$R = \frac{1}{2} \iint_Q [(\Delta u)^2 + (\Delta \mathcal{G})^2] dx dt \quad (2.10)$$

остаточный член.

Теперь оценим $\iint_Q (\Delta u)^2 dx dt$ через $\iint_Q (\Delta \mathcal{G})^2 dx dt$.

С помощью замены условие (2.4) приведем к однородным условиям. С этой целью сделаем замену:

$$U(x, t) = \Delta u(x, t) + \frac{x^2}{2\ell} \int_0^\ell \Delta \mathcal{G}(x, t) dx.$$

Тогда

$$U_{tt} - U_{xx} = \Delta \mathcal{G}(x, t) + \frac{x^2}{2\ell} \int_0^\ell \Delta \mathcal{G}_{tt}(x, t) dx - \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \Delta \mathcal{G}(x, t) dx \equiv g(x, t), \quad (2.11)$$

$$U(x, 0) = \frac{x^2}{2\ell} \int_0^\ell \Delta \mathcal{G}(x, 0) dx = \varphi_0(x), \quad U_t(x, 0) = \frac{x^2}{2\ell} \int_0^\ell \Delta \mathcal{G}_t(x, 0) dx = \varphi_1(x), \quad (2.12)$$

$$U(0, t) = 0, \quad U_x(0, t) - U_x(\ell, t) = 0. \quad (2.13)$$

Решение задачи (2.11)-(2.13) найдем с помощью формулы Даламбера:

$$U(x, t) = \frac{\Phi_0(x+t) + \Phi_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Phi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} G(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$ и $G(x, t)$ являются нечетными продолжениями относительно $x=0$ функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $g(x, t)$ по x с периодом ℓ (см. [4]).

Тогда решение задачи (2.1)-(2.4) представляется в виде:

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) = & \frac{\Phi_0(x+t) + \Phi_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Phi_1(\xi) d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} G(\xi, \tau) d\xi d\tau - \frac{x^2}{2\ell} \int_0^\ell \Delta \mathcal{G}(x, t) dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка:

$$\|\Delta u\|_{L_2(Q)}^2 \leq c[\|\Delta \mathcal{G}\|_{L_2(Q)}^2 + \|\Delta \mathcal{G}(x, 0)\|_{L_2(0, \ell)}^2 + \|\Delta \mathcal{G}_t(x, 0)\|_{L_2(0, \ell)}^2 + \|\Delta \mathcal{G}_{tt}\|_{L_2(Q)}^2].$$

Из ограниченности вложений $W_2^{0,2}(Q) \subset L_2(Q)$, $W_2^{0,2}(Q) \subset L_2(0, \ell)$ и $W_2^{0,1}(Q) \subset L_2(0, \ell)$ следует, что

$$\|\Delta u\|_{L_2(Q)}^2 \leq c \|\Delta \mathcal{G}_{tt}\|_{L_2(Q)}^2.$$

Таким образом,

$$R \leq c \|\Delta \mathcal{G}_{tt}\|_{L_2(Q)}^2.$$

Отсюда получается, что если некоторое управление $\mathcal{G}_0(x, t) \in V$ доставляет функционалу $J(\mathcal{G})$ минимальное значение, то

$$\Delta J(\mathcal{G}_0) \geq 0 \quad \forall \mathcal{G} \in V.$$

Доказана следующая

Теорема. Пусть выполнены условия, вышпеналоженные на данные (1.1)-(1.5). Тогда для оптимальности управления $\mathcal{G}_0(x, t)$ необходимо выполнение неравенства

$$\iint_Q [I \mathcal{G}_0(x, t) - \psi(x, t) + \psi(\ell, t)] (\mathcal{G}(x, t) - \mathcal{G}_0(x, t)) dx dt \geq 0 \quad (2.14)$$

при всех $\mathcal{G}(x, t) \in V$, где $\psi(x, t)$ является решением сопряженной задачи (2.6)-(2.8).

Поскольку задача (1.1)-(1.5) линейно-квадратичная, то полученное условие (2.14) является также достаточным для оптимальности управления $\mathcal{G}_0(x, t) \in V$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибиев Ф.Т. Некоторые задачи оптимального управления для систем Гурса-Дарбу с нелокальными краевыми условиями. Автореф.дисс.на соис.уч. степени канд.физ.-мат. наук, Баку, 2003.
2. Широин Т.В., Мехтиев М.Ф., Шарифов Я.А. Об условиях оптимальности в задаче оптимального управления для гиперболических систем с нелокальными условиями //Доклады НАНА, Т.ЛХЫ, №2, 2005, с.22-29.
3. Belin Sergey A. Existence of solutions one – dimensional wave equations with nonlocal conditions. Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2002(2001), №76, pp.1-8.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М., Наука, 1966.

QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİRÖLÇÜLÜ DALĞA TƏNLIYI ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏ MƏSƏLƏSİ

H.F.QULIYEV, H.T.TAĞIYEV

XÜLASƏ

İşdə qeyri-lokal sərhəd şərtli birölçülü dalğa tənliyi üçün optimal idarə məsələsi öyrənilir. $W_2^2(Q)$ -dən olan sanki hər yerdə həllə baxılır. Baxılan optimal idarə məsələsində optimallığın zəruri və kafi şərtləri çıxarılır, bu zaman qarışıq məsələnin həllinin artımı Dalamber düsturunun köməyi ilə göstərilir.

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR ONE – DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH NONLOCAL CONDITIONS

H.F.QULIYEV, H. T. TAGIYEV

SUMMARY

In the present work the problem of optimum control for an one-dimensional wave equation with nonlocal boundary conditions is studied. The solutions with the mixed problem from $W_2^2(Q)$ is considered here. It is deduced the necessary and a sufficient condition of an optimality in a considered problem of optimum control, thus the increment of a solution of the mixed problem is represented by means of the formula of Dalamber's .