НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОБЫЧНЫМИ И ОБОБЩЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

К.К.ГАСАНОВ, Х.Т.ИСМАИЛОВА

Бакинский Государственный Университет

В результате интенсификации многих физико-технологических, механических, сложных химических и электротехнических процессов возросла необходимость исследования задач управления в процессах, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными первого порядка с обычными и обобщенными управлениями.

В работе выведен интегральный принцип максимума в задаче, управляемой системой, состоящей из уравнений в частных производных первого порядка с обычными и обобщенными управлениями. Для этого построена сопряженная система, получено приращение функционала, оценен остаточный член и получены необходимые условия оптимального управления.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой уравнений

$$\begin{aligned} &x_t(t,s) = f^1(t,s,x(t,s),y(s,t),w(t,s)) + B^1(t,s)\dot{u}(t), \\ &y_s(s,t) = f^2(t,s,x(t,s),y(s,t),w(t,s)) + B^2(s,t)\dot{v}(s), \quad (t,s)\in D \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0,s) = \varphi^1(s,\xi(s)), s\in[s_0,s_1]=S, y(s_0,t)=\varphi^2(t,\eta(t)), t\in[t_0,t_1]=T\,, \tag{2}$$

здесь все производные понимаются в смысле обобщенных функций, f^i,φ^i - заданные n_i - мерные вектор-функции, $B^i - n_i\times m_i$ - матричные функции, $i=1,2,$ $w(t,s),\xi(s),\eta(t),u(t),v(s) - r + r_1 + r_2 + m_1 + m_2$ - мерные управляющие параметры, $(t,s)\in D=[t_0,t_1]\times[s_0,s_1]$.

За допустимые управления берутся $(w(t,s),\xi(s),\eta(t),u(t),v(s))\in U_\partial$, где $U_\partial = \Omega_0(\bullet)\times\Omega_1(\bullet)\times\Omega_2(\bullet)\times U(\bullet)\times V(\bullet)$ - выпуклое ограниченное множество в $L_2^r(D)\times L_2^{r_1}(T)\times L_2^{r_2}(S)\times VB_{m_1}(T)\times VB_{m_2}(S)$.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J=\iint_D \Phi^0(t,s,x(t,s),y(t,s),w(t,s))dsdt + \int_{t_0}^{t_1}\Phi^1(t,y(s_1,t),u(t),\eta(t))dt +$$

$$+\int_{s_0}^{s_1}\Phi^2(s,x(t_1,s),v(s),\xi(s))ds\ , \tag{3}$$

заданного на множестве слабых решений $(x(t,s),y(s,t))\in W_{n_1+n_2}(D)=$ $=VB_{n_1}(T,L_1(S))\times VB_{n_2}(S,L_2(T))$ задачи (1),(2).

Пусть выполняются условия:

1) функции $f^i(t,s,x,y,w)$ $(i=1,2)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, т.е. при почти всех $(t,s)\in D$ определены и непрерывны по $(x,y,w)\in R^{n_1+n_2+r}$ и измеримы по (t,s) в D при каждом $(x,y,w)\in R^{n_1+n_2+r}$, а также существуют производные f_x^i, f_y^i, f_w^i;

верны неравенства

$$\left\|f^i(t,s,\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{w})-f^i(t,s,x,y,w)\right\|\le\rho^i(t)\|\widetilde{x}-x\|+r^i(s)\|\widetilde{y}-y\|+M^i\|\widetilde{w}-w\|$$

для всех $(x,y,w)\in R^{n_1+n_2+r}$ и для п.в. $(t,s)\in D$, где $\rho^i(t)\in L_2(T)$, $r^i(s)\in L_2(S), M^i=const, f^i(t,s,0,0,0)\in L_2^{n_i}(D),\ i=1,2$. Кроме того, производные $f_x^i(t,s,x,y,w),\ f_y^i(t,s,x,y,w)$, $f_w^i(t,s,x,y,w)$ локально удовлетворяют условию Липшица по аргументам (x,y,w).

2) $b_{ij}^{(1)}(t,s)\in C^1(T,L_2(S)),b_{ij}^{(2)}(s,t)\in C^1(S,L_2(T))$, где $b_{ij}^{(1)}(t,s)$, $b_{ij}^{(2)}(s,t)$ элементы матриц $B^1(t,s)$ и $B^2(s,t)$, соответственно.

3) Функция $\varphi^1(s,\xi)$ $(\varphi^2(t,\eta))$ непрерывна по $\xi\in R^{r_1}$ для почти всех $s\in[s_0,s_1]$ (по $\eta\in R^{r_2}$ для почти всех $t\in T$), измерима по s для всех ξ (по t для всех η) и верны неравенства:

$$\left\|\varphi^1(s,\widetilde{\xi})-\varphi^1(s,\xi)\right\|\le L_{Y^1}\left\|\widetilde{\xi}-\xi\right\|,\ \varphi^1(s,0)\in L_2^{n_1}(T),$$
$$\left\|\varphi^2(t,\widetilde{\eta})-\varphi^2(t,\eta)\right\|\le L_{Y^2}\left\|\widetilde{\eta}-\eta\right\|,\ \varphi^2(t,0)\in L_2^{n_2}(S),$$

для всех $\xi,\widetilde{\xi}\in R^{r_1},\eta,\widetilde{\eta}\in R^{r_2}$.

Кроме того, производные $\varphi_\xi^1(s,\xi)$ и $\varphi_\eta^2(t,\eta)$ локально удовлетворяют условию Липшица по ξ и по η.

4) Функции $\Phi^0(t,s,x,y,w),\Phi^1(t,y,u,\eta),\Phi^2(s,x,v,\xi)$ удовлетворяют условиям Каратеодори в $D\in R^{n_1+n_2+r}$.

Кроме того, функции $\Phi^0(t,s,x,y,w),\Phi^1(t,y,u,\eta),\Phi^2(s,x,v,\xi)$ вместе с частными производными $\Phi_x^0(t,s,x,y,w),\Phi_y^0(t,s,x,y,w),\Phi_w^0(t,s,x,y,w)$, $\Phi_y^1(t,y,u,\eta),\Phi_u^1(t,y,u,\eta),\Phi_\eta^1(t,y,u,\eta),\ \Phi_x^2(s,x,v,\xi),\Phi_v^2(s,x,v,\xi),\Phi_\eta^2(s,x,v,\xi)$

локально удовлетворяют условию Липшица по (x,y,w), (y,u,η), (x,v,ξ) и $\Phi^0(t,s,0,0,0)\in L_2(D),\Phi^1(t,0,0,0)\in L_2(t_0,t_1)$, $\Phi^2(s,0,0,0)\in L_2(s_0,s_1)$.

При этих условиях, аналогично работе [1], можно доказать существование и единственность слабого решения задачи (1),(2).

Введем функцию

$$H(t,s,x,y,p,q,w)=pf^1(t,s,x,y,w)+qf^2(t,s,x,y,w)-\Phi^0(t,s,x,y,w).$$

Определим (p,q) как решение сопряженной системы

$$\begin{gathered} p_t+H_x(t,s,x,y,p,q,w)=0,\\ q_s+H_y(t,s,x,y,p,q,w)=0,\ (t,s)\in D, \end{gathered}\tag{4}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} p(t_1,s)+\Phi_x^2(s,x(t_1,s),v(s),\xi(s))=0,\ \ s\in S,\\ q(s_1,t)+\Phi_y^1(t,y(s_1,t),u(t),\eta(t))=0,\ \ t\in T, \end{gathered}\tag{5}$$

здесь - $p,q,H_x,H_y,\Phi_y^1,\Phi_x^2$ - вектор строки.

Отметим, что сопряженная система (4),(5) не содержит функции $\dot u(t),\dot v(s)$, поэтому ее решение принадлежит пространству $C^0(T,L_2(S))\times$ $\times C^0(S,L_2(T))$.

Теорема. Пусть $(w(t,s),\xi(s),\eta(t),u(t),v(s))$ оптимальное управление, а $(x(t,s),y(s,t))$ и $(p(t,s),q(s,t))$ решения задач (1),(2) и (4), (5), соответственно. Тогда выполняется следующий принцип максимума:

$$\begin{gathered}
\sup_{\tilde w\in\Omega_0(\bullet)}\iint_D H_w(t,s)\tilde w(t,s)dsdt=\iint_D H_w(t,s)w(t,s)dsdt,\\
\sup_{\tilde\xi\in\Omega_1(\bullet)}\int_{s_0}^{s_1}\lambda(s)\tilde\xi(s)ds=\int_{s_0}^{s_1}\lambda(s)\xi(s)ds,\ \sup_{\tilde\eta\in\Omega_2(\bullet)}\int_{t_0}^{t_1}\mu(t)\tilde\eta(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}\mu(t)\eta(t)dt,\\
\sup_{\tilde u\in U(\bullet)}\int_{t_0}^{t_1}h(t)\tilde u(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}h(t)u(t)dt,\ \sup_{\tilde v\in V(\bullet)}\int_{s_0}^{s_1}g(s)\tilde v(s)ds=\int_{s_0}^{s_1}g(s)v(s)ds,\\
\sup_{\tilde u\in U(\bullet)}(-1)^{i+1}\int_{s_0}^{s_1}p(t_i,s)B^1(t_i,s)\tilde u(t_i)ds=(-1)^{i+1}\int_{s_0}^{s_1}p(t_i,s)B^1(t_i,s)u(t_i)ds,\\
\sup_{\tilde v\in V(\bullet)}(-1)^{i+1}\int_{t_0}^{t_1}q(s_i,t)B^2(s_i,t)\tilde v(s_i)dt=(-1)^{i+1}\int_{t_0}^{t_1}q(s_i,t)B^2(s_i,t)v(s_i)dt,\ i=0,1,
\end{gathered}\tag{6}$$

где

$$H_w(t,s) = H_w(t,s,x(t,s),y(s,t),p(t,s),q(s,t),w(t,s)),\ldots,$$
$$\lambda(s) = p(t_0,s)\widetilde{\varphi}^1_\xi(s) - \Phi^2_\xi(s);\ \mu(t) = q(s_0,t)\widetilde{\varphi}^2_\eta(t) - \Phi^1_\eta(t),$$
$$h(t) = \int_{s_0}^{s_1}\left[H_x(t,s)B^1(t,s) - p(t,s)B^1_t(t,s)\right]ds - \Phi^1_u(t),$$
$$g(s) = \int_{t_0}^{t_1}\left[H_y(t,s)B^2(s,t) - q(s,t) - q(s,t)B^2_s(s,t)\right]dt - \Phi^2_v(s),$$
$$\widetilde{\varphi}^1_\xi = \varphi^1_\xi(s,\xi(s)),$$
$$\widetilde{\varphi}^2_\eta = \widetilde{\varphi}^2_\eta(t,\eta(t)),$$
$$\Phi^1_u(t) = \Phi^1_u(t,y(s_1,t),u(t),\eta(t)),\ldots,$$
$$\Phi^2_v(t) = \Phi^2_v(s,x(t_1,s),v(s),\xi(s)),\ldots.$$

Доказательство. В силу оптимальности управления $(w(t,s),\xi(s),\eta(t),$ $u(t),v(s)) \in U_\partial$ при любых управлениях $(\widetilde{w}(t,s),\widetilde{\xi}(s),\widetilde{\eta}(t),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}(s)) \in U_\partial$ для приращения функционала выполняется неравенство

$$\delta J = -\iint_D H_w(t,s)\delta w(t,s)dsdt - \int_{t_0}^{t_1}\left(h(t)\delta u - \mu(t)\delta\eta\right)dt -$$
$$-\int_{s_0}^{s_1}\left(g(s)\delta v + \lambda(s)\delta\xi\right)ds - \int_{t_0}^{t_1} q(s,t)B^2(s,t)\delta v dt\Bigg|_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} p(t,s)B^1(t,s)\delta u\delta s dt\Bigg|_{t_0}^{t_1} + r \geq 0, \quad (7),$$

где
$$r = o\left(\|\delta w\|_{L_2^r} + \|\delta\xi\|_{L_2^{n_1}} + \|\delta\eta\|_{L_2^{n_2}} + \|\delta u\|_{VB_{m_1}} + \|\delta v\|_{VB_{m_2}}\right)$$
остаточный член приращения функционала.

Предположим, что первое условие (6) не выполняется. Тогда существует $\widetilde{w}(t,s) \in \Omega_0(\bullet)$, такое, что для $\delta w = \widetilde{w}(t,s) - w(t,s)$ выполняется неравенство
$$\iint_D H_w(t,s)\delta_w dsdt > 0. \qquad (8)$$

Из выпуклости множества $\Omega_0(\bullet)$ в $L_2^r(D)$ следует, что для ε $(0 < \varepsilon \leq 1)$ существует управление $w_\varepsilon(t,s) = w(t,s) + \varepsilon\delta w \in \Omega_0(\bullet)$, $\delta u = 0,\ \delta\eta = 0,\quad \delta v = 0,\ \delta\xi = 0$, в силу (7), получаем равенство:
$$\delta J = -\varepsilon\iint_D H_w(t,s)\delta w dsdt + o(\varepsilon).$$

Отсюда, с учетом (8), при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем, что $\delta J < 0$. Но это противоречит условию (7). Следовательно, первое условие (6) выполняется. Аналогично, доказывается справедливость остальных утверждений теоремы. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасанов К.К., Гусейнова Х.Т. О решении одного класса систем уравнений в частных производных первого порядка в распределениях. Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2000г., №3, с.103-111.

ADİ VƏ ÜMUMİLƏŞMİŞ İDARƏLƏRİ OLAN BİRTƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN OPTİMALLIĞI ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRT

K.Q.HƏSƏNOV, X.T.İSMAYILOVA

XÜLASƏ

Fiziki-texnoloji, mexaniki, mürəkkəb kimyəvi və elektrotexniki proseslərin sürətli inkişafı ilə əlaqədar olaraq birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunan proseslərdə adi və ümumiləşmiş idarə məsələlərin öyrənilməsi zərurəti yaranmışdır.

İşdə birtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. İdarəedici funksiyalar sistemə və başlanğıc şərtlərə daxil olur. Sistemə daxil olan idarəedicilərin içində ümumiləşmiş idarəedici funksiyalar iştirak edir. Burada inteqral maksimum prinsipi isbat olunur. Bunun üçün funksionalın artımı tapılır, qalıq hədd qiymətləndirilir.

NECESSARY CONDITION OF THE OPTIMALITY OF THE SYSTEM OF FIRST ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ORDINARY AND GENERALIZED CONTROLS

K.G.HASANOV, Kh.T.ISMAYILOVA

SUMMARY

Concerning to the development of fizikal-tecnoloji, mechanical, complicated chemical and elektrotecnical processes the investigations of the ordinary and generalized control for the processes described by first order partial differential equations is necessary.

In this work the control optimal problems describing by the system of first order partial differential equations are considered. The control functions belong to system and initial conditions. The controls which are inside of the system include generalized control functions. Here is proved the integral maximum principle. For this aim the increment of the functional and residual term are founded.