BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

НОРМАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А.Р.АЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе получены достаточные условия нормальной разрешимости краевой задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений порядка $2k$, *рассматриваемых на положительной полуоси. В главной части исследуемых уравнений имеется разрывной коэффициент.*

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство, A - самосопряженный положительно-определенный оператор в H (т.е. $A=A^*>cE$, $c>0$, E -единичный оператор в H).

Рассмотрим краевую задачу для операторно-дифференциального уравнения порядка $2k$ с разрывным коэффициентом

$$(-1)^k u^{(2k)}(t)+\rho(t)A^{2k}u(t)+\sum_{j=1}^{2k}A_j u^{(2k-j)}(t)=f(t), \quad t\in R_+=[0;+\infty), \tag{1}$$

$$u^{(j)}(0)=0, \quad j=\overline{0,k-1}, \tag{2}$$

где $f(t)\in L_2(R_+;H)$, $u(t)\in W_2^{2k}(R_+;H)$, A_j, $j=\overline{1,2k}$ - линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, определенные почти при всех $t\in R_+$, а $\rho(t)=\alpha$, если $0\le t\le T$ и $\rho(t)=\beta$, если $T<t<+\infty$, причем α,β - положительные, вообще говоря, не равные друг другу числа.

Здесь и в дальнейшем, производная $u^{(i)}\equiv\dfrac{d^i u}{dt^i}$ понимается в смысле теории обобщенных функций.

Под $L_2(R_+;H)$ и $W_2^{2k}(R_+;H)$ понимаем следующие гильбертовые пространства (см. [1]):

$$L_2(R_+;H)=\left\{\upsilon(t):\|\upsilon\|_{L_2(R_+;H)}=\left(\int_0^{+\infty}\|\upsilon(t)\|_H^2\,dt\right)^{1/2}<+\infty\right\};$$

$$W_2^{2k}(R_+;H)=\left\{\upsilon(t):\|\upsilon\|_{W_2^{2k}(R_+;H)}=\left(\int_0^{+\infty}\left(\left\|\upsilon^{(2k)}(t)\right\|_H^2+\left\|A^{2k}\upsilon(t)\right\|_H^2\right)dt\right)^{1/2}<+\infty\right\},$$

а под $\overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H)$ будем понимать

$$\overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H)=\left\{\upsilon(t):\upsilon(t)\in W_2^{2k}(R_+;H),\ \upsilon^{(j)}(0)=0,\ j=\overline{0,k-1}\right\}$$

Определение. *Краевая задача (1), (2) называется нормально разрешимой, если существуют подпространства $\widetilde{L}_2(R_+;H)\subset L_2(R_+;H)$ и $\widetilde{\overset{\circ}{W}}{}_2^{2k}(R_+;H)\subset\overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H)$ с конечномерными ортогональными дополнениями в пространствах $L_2(R_+;H)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H)$, соответственно, и для любой вектор-функции $f(t)\in\widetilde{L}_2(R_+;H)$ существует единственная вектор-функция $u(t)\in\widetilde{\overset{\circ}{W}}{}_2^{2k}(R_+;H)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в R_+, краевые условия (2) выполняются в смысле*

$$\lim_{t\to 0}\left\|A^{2k-j-1/2}u^{(j)}(t)\right\|_H=0,\ j=\overline{0,k-1},$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^{2k}(R_+;H)}\le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}.$$

В данной статье найдены достаточные условия для нормальной разрешимости краевой задачи (1), (2).

При $\alpha=\beta=1$ нормальная разрешимость краевых задач для уравнения (1) изучена в работах [2-5]. Отметим, что в работе [6] в случае $k=1$ рассмотрен вопрос о нормальной разрешимости краевой задачи (1), (2). Корректная и однозначная разрешимость же краевой задачи (1), (2) доказана в работе [7] при алгебраических условиях, налагаемых на операторные коэффициенты уравнения (1).

Далее, под $\sigma_\infty(H,H)$ будем понимать множество вполне непрерывных операторов в H.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $A=A^*>cE$, $c>0$, $A^{-1}\in\sigma_\infty(H,H)$, $A_jA^{-j}\in\sigma_\infty(H,H)$, $j=\overline{1,2k}$, и на мнимой оси резольвента полиномиального операторного пучка*

$$P_\beta(\lambda)=(-1)^k\lambda^{2k}E+\beta A^{2k}+\sum_{j=1}^{2k}\lambda^{2k-j}A_j$$

существует, а также $(\alpha-\beta)$ - достаточно малая величина.

Тогда краевая задача (1), (2) нормально разрешима.

Доказательство. Прежде определим функцию $\widetilde{\rho}(t)$ следующим образом:

$\widetilde{\rho}(t)=\alpha-\beta$, если $0\le t\le T$ и $\widetilde{\rho}(t)=0$, если $T<t<+\infty$. Тогда уравнение (1) перепишется в следующем виде:

$$P_\beta(d/dt)u(t)+\widetilde{\rho}(t)A^{2k}u(t)=f(t),\quad t\in R_+. \tag{3}$$

Далее, через $\mathcal{P}_\beta$ и $\widetilde{\mathcal{P}}$ обозначим операторы, действующие следующим образом:

$$\mathcal{P}_\beta u(t)\equiv P_\beta(d/dt)u(t),\ u(t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H),$$

т.е. $\mathcal{P}_\beta:\overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H)\to L_2(R_+;H)$,

$$\widetilde{\mathcal{P}}u(t)\equiv\widetilde{\rho}(t)A^{2k}u(t),\ u(t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H),$$

т.е. $\widetilde{\mathcal{P}}:\overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H)\to L_2([0;T];H)\subset L_2(R_+;H)$.

Тем самым, задачу (3), (2) можно представить в виде операторного уравнения

$$\mathcal{P}_\beta u(t)+\widetilde{\mathcal{P}}u(t)=f(t), \tag{4}$$

где $f(t)\in L_2(R_+;H)$, $u(t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H)$.

В результате, исследование нормальной разрешимости краевой задачи (1), (2) сводится к изучению нормальной разрешимости операторного уравнения (4) в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H)$. Заметим, что нормальная разрешимость уравнения $\mathcal{P}_\beta u(t)=f(t)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2k}(R_+;H)$, где $f(t)\in L_2(R_+;H)$, доказана при $\beta=1$ в работе [5], в которой усилена соответствующая теорема о нормальной разрешимости работы [3], в свою очередь, использующая методику работы [2]. Случай $0<\beta\neq 1$ доказывается аналогично. Поэтому для нормальной разрешимости операторного уравнения (4) достаточно исследовать его оставшуюся часть. Продолжение же доказательства теоремы вытекает из того, что $(\alpha-\beta)$ - достаточно малое число и A^{2k} является непрерывным оператором из $\overset{\circ}{W}{}_2^{2k}([0;T];H)$ в $L_2([0;T];H)$, а также из теоремы о сохранении нормальной разрешимости при малых возмущениях (см. [8, с.57]). Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что последнее из указанных в теореме условий нормальной разрешимости краевой задачи (1), (2) не допускает произвольность положительных чисел α и β, хотя этого можно избежать, но об этом в будущем в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Гасымов М.Г. О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. 1977. Т.235. №3. С. 505-508.

3. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости начально-краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 1986. Т.41. №4. С. 204.
4. Шкаликов А.А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними //Тр. семинара И.Г.Петровского. 1989. №14. С. 140-224.
5. Мирзоев С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Дисс.... д.ф.-м.н. Баку: БГУ, 1994, 229 с.
6. Алиев А.Р. О корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений с разрывным коэффициентом. Дисс.... к.ф.-м.н. Баку: БГУ, 1998, 99 с.
7. Алиев А.Р. Краевые задачи для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами // Матем. заметки. 2003. Т.74. №6. С. 803-814.
8. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971, 104 с.

BİR SİNİF KƏSİLƏN ƏMSALLI YÜKSƏKTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN NORMAL HƏLL OLUNMASI

A.R.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə müsbət yarımoxda baxılan bir sinif $2k$ – tərtibli operator-diferensial tənliклər üçün sərhəd məsələsinin normal həllolunmasının кafi şərtləri alınmışdır. Tədqiq olunan tənliклərin baş hissəsində кəsilən əmsal iştiraк edir.

NORMAL SOLVABILITY OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR ONE CLASS OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE HIGHER ORDER WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

A.R.ALIYEV

SUMMARY

Sufficient conditions of normal solvability of the boundary-value problem for one class operator-differential equations of the order $2k$, considered on the positive semi-axis, are obtained in the paper. The main part of the investigated equations has discontinuous coefficient.