BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2007***

МЕТОД ЭЙЛЕРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.Ю.МЕХТИЕВА

Бакинский Государственный Университет

В работе построена схема Эйлера для решения нелокальных краевых задач для линейных систем дифференциальных уравнений. Часть краевых условий задана в точечном, а другая часть – в интегральном виде. Показано, что решение схемы Эйлера сходится к решению исходной задачи.

Введение. Задача численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальным условием (задача Коши) изучена достаточно полно [1]. Обычно для таких систем легко можно построить явную схему и при естественных ограничениях на исходные данные задачи доказать сходимость решения разностной схемы к решению исходной задачи.

Однако задача усложнится тогда, когда для обыкновенного дифференциального уравнения рассматривается нелокальная краевая задача. Такие краевые задачи могут быть интегральными, многоточечными и их различными модификациями [2-4]. В [3, 5-6] рассмотрены многочисленные математические модели нелокальных процессов. В этих книгах и в литературе, цитируемой в них, показаны области возникновения нелокальных условий. Например, построены математические модели, встречающиеся в трибологии, фильтрации почвенной влаги, демографии и т.д., в которых динамика процессов дополняется нетрадиционными граничными условиями.

В данной работе рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями, где часть условий имеет интегральный, а другая часть – точечный вид.

Постановка задачи. Пусть на отрезке $[0,T]$ требуется найти численное решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = D(t)x + f(t) \tag{1}$$

при заданных нелокальных краевых условиях

$$Ax(0) = a, \tag{2}$$

$$\int_0^T B(t)x(t)dt = b, \tag{3}$$

где $x=(x_1,...,x_n)$, $f(t)=(f_1(t),...,f_n(t))$, A – постоянная матрица размерности $m\times n$, $D(t)$ и $B(t)$ – функциональные матрицы размерности $n\times n$ и $(n-m)\times n$, соответственно, a и b m и $(n-m)$-мерные постоянные векторы, соответственно. Предполагается, что элементы матриц $D(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ – непрерывны на отрезке $[0,T]$.

Предполагается, что задача (1)-(3) имеет единственное решение.

Известно, что любое решение уравнения (1), проходящее при $t=0$ через точку $x=x(0)$, представляется единственным образом в виде [7]:

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\xi)f(\xi)d\xi, \tag{4}$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица однородной системы уравнений, удовлетворяющая условию $\Phi(0)=E$, соответствующей системе (1).

Если потребовать от точного решения (4) уравнения (1) выполнение краевых условий (2), (3), то заданные краевые условия можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} A \\ \int_0^T B(t)\Phi(t)dt \end{pmatrix} x(0)=\begin{pmatrix} a \\ b-\int_0^T B(t)\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(\xi)f(\xi)d\xi dt \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Так как, согласно предположению, задача (1)-(3) имеет единственное решение, то и система алгебраических уравнений (5) однозначно разрешима.

Следовательно, начальное значение решения краевой задачи (1)-(3) однозначно определяется корнями системы линейных алгебраических уравнений (5).

При решении практических задач редко удается построить точную систему алгебраических уравнений (5). Например, обычно удается построить лишь приближения к фундаментальной матрице и фактически сразу же получить приближения к системе алгебраических уравнений (5).

Еще одним недостатком системы (5) является вычисление обратных матриц $\Phi^{-1}(\xi)$, или, одно и то же, нахождение значений фундаментальной матрицы системы, сопряженной к однородной системе дифференциальных уравнений (1). Поэтому приближения к (5) удобно строить, применяя соответствующие методы численного интегрирования, непосредственно к неоднородной системе дифференциальных уравнений (1). Это позволит обойти вычисления обратных матриц $\Phi^{-1}(\xi)$. Переходим к построению численного метода для задачи (1)-(3).

Основной результат. Применим метод Эйлера к системе дифференциальных уравнений (1). Для этого разобьем отрезок $[0,T]$ точками

$$0=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_N=T \tag{6}$$

на N частей. Совокупность точек (6) определяет сетку отрезка $[0,T]$ с неравномерным шагом h_k, $h_k=t_k-t_{k-1}$, $k=1,2,...,N$. Согласно методу Эйлера приближенное решение x_k уравнения (1) с начальным условием $x(0)=x_0$ в каждой точке $t = t_k$, $k = 1, 2, ..., N$ сетки (6) вычисляется по формуле:

$$x_k = x_{k-1} + h_k \left[D(t_{k-1}) x_{k-1} + f(t_{k-1}) \right], \ k = 1, 2, ..., N. \tag{7}$$

Выразив все x_i ($i = 1, 2, ..., k-1$) через начальное значение x_0, по индукции получим формулу для приближенного решения уравнения (1). Согласно [8] имеем явную формулу:

$$x_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} M_i^I \right) x_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\left(\prod_{i=0}^{k-1} M_i^I \right) N_{j-1}^I \right] N_{k-1}^I, \ k = 1, 2, ..., N, \tag{8}$$

где M_i^I и N_i^I определяются по формулам

$$M_i^I = E + h_{i+1} D(t_i), \ i = 0, 1, ..., N-1, \tag{9}$$

$$N_i^I = h_{i+1} f(t_i), \ i = 0, 1, ..., N-1. \tag{10}$$

По узловым точкам (6) применяем формулу правосторонних прямоугольников. Тогда имеем:

$$\sum_{k=1}^{h} h_k B(t_k) x_k = b. \tag{11}$$

Учитывая (8) в (11), получим:

$$\sum_{k=1}^{N} h_k B(t_k) \left(\prod_{i=0}^{k-1} M_i^I \right) x_0 = b - \sum_{k=1}^{N} h_k B(t_k) \left[\sum_{i=j}^{k-1} \left[\left(\prod_{i=0}^{k-1} M_i^I \right) N_{j-1}^I \right] N_{k-1}^I \right]. \tag{12}$$

Таким образом, дискретным аналогом системы алгебраических уравнений (5) является:

$$\begin{pmatrix} A \\ \sum_{k=1}^{N} h_k B(t_k) \left(\prod_{i=0}^{k-1} M_i^I \right) \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b - \tilde{b} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\tilde{b} = \sum_{k=1}^{N} h_k B(t_k) \left[\sum_{j=1}^{k-1} \left[\left(\prod_{i=j}^{k-1} M_i^I \right) N_{j-1}^I \right] N_{k-1}^I \right].$$

Теперь покажем, что приближенная фундаментальная матрица, задаваемая выражением

$$\prod_{i=0}^{N-1} M_i^I,$$

сходится при $h \to 0$ ($h = \max_k h_k$) к точной фундаментальной матрице. Действительно, пусть $x = x(t)$ является решением дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = D(t) x, \tag{14}$$

удовлетворяющим начальному условию $x(0) = x_0$. Согласно методу Эйлера, приближенное решение x_k уравнения (14) с начальным условием $x(0) = x_0$ в каждой точке $t = t_k$, $k = 1, 2, ..., N$, сетки (6) вычисляется по формуле:

$$x_k = x_{k-1} + h_k D(t_{k-1}) x_{k-1}\ ,\ k = 1, 2, ..., N. \qquad (15)$$

Следовательно, при $k = 1$

$$x_1 = [E + h_1 A(t_0)] x_0\,,$$

при $k = 2$

$$x_2 = [E + h_2 A(t_1)][E + h_1 A(t_0)] x_0\,.$$

Методом математической индукции можно показать, что приближенное решение уравнения (14) с начальным условием $x(0) = x_0$ в точке $t = t_k$ выражается через начальное значение x_0 следующим образом:

$$x_k = \left[\prod_{i=0}^{k-1} M_i^I\right] x_0\,,\ k = 1,\ 2,\ ...,N\,, \qquad (16)$$

где

$$M_i^I = E + h_{i+1} D(t_i)\,.$$

На основании сходимости приближенного решения x_k при $h_k \to 0$ к точному решению $x(t_k) = \Phi(t_k) x_0$ уравнения (14) с условием $x(0) = x_0$ [10] и в силу единственности решения, можно заключить, что произведение

$$\prod_{i=0}^{k-1} [E + h_{i+1} D(t_i)]$$

при $h_k \to 0$ сходится к точному значению фундаментальной матрицы $\Phi(t_k)$ для всех $k = 1,\ 2,\ ...,N$. Поэтому за приближенное значение фундаментальной матрицы Φ_k в точки $t = t_k$ можно принять:

$$\Phi_k^I = \prod_{i=0}^{k-1} [E + h_{i+1} D(t_i)]\,.$$

Аналогичным образом можно показать, что при $h \to 0$ вектор

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left[\left(\prod_{i=j}^{k-1} M_i^I\right) N_{j-1}^I\right] N_{k-1}^I$$

сходится к вектору

$$\Phi(T) \int_0^t \Phi^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi\,.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть нелокальная краевая задача (1)-(3) имеет единственное решение. Тогда при достаточно малом $h, h = \max_{1 \le i \le N} h_i$ сетки (6) приближенное начальное значение x_0 рассматриваемой краевой задачи определяется как единственный корень системы линейных алгебраических уравнений (13).

Заметим, что после однозначного определения начального значения для системы (1) с условием $x(0) = x_0$ возможно применение любого численного метода для решения задачи Коши [1, 9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Под ред. Дж.Холла, Дж.Уатта. М: Мир, 1979.
2. Тауфер И. Решение граничных задач для линейных дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1981, 440с.
3. Нахушева З.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Физматлит., 2006, 176с.
4. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения, 1982, т.18, №1, с.72-81.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995, 301с.
6. Нахушев А.М. Задача со смещением для дифференциальных уравнений в частных производных. М., Наука, 2006.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, Мир, 1970.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – Москва, Наука, 1978.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. Москва, Наука, 1989.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Москва, БИНОМ, 2003.

QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLLİ ÜÇÜN EYLER METODU

Q.Y.MEHDİYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə qeyri-lokal sərhəd şərtli xətti diferensial tənliklərin ədədi həllinin tapılması üçün Eyler sxemi qurulmuşdur. Sərhəd şərtlərinin bir hissəsi nöqtəvi, digər hissəsi isə inteqral şəklindədir. Qurulmuş Eyler sxeminin həllinin ilkin məsələnin həllinə yığılması göstərilmişdir.

METHOD OF EULER FOR THE SOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF LINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

G.Yu.MECHTIYEVA

SUMMARY

In this work the scheme of Euler for the solvability of nonlocal boundary value problem of the linear system of the differential equations is constructed. Part of boundary conditions are given in the point wise form, and other part is given in the integral form. It is shown, that the solution of Euler scheme converges to the solution the initial problem.