BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* 2006

УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА АНИЗОТРОПНОМ ОСНОВАНИИ

Г.М.ГАСЫМОВ

Институт Математики и Механики НАНА

В работе рассматривается ортотропная неоднородная цилиндрическая оболочка при осевом сжатии. Предполагается, что упругие характеристики материала являются непрерывными функциями координаты толщины. Учитывается анизотропное сопротивление внешней среды. Задача решена для случая свободного опирания. Анализ проведен для осесимметричной формы потери устойчивости. При разных видах неоднородностей проведен расчет.

В настоящее время в инженерной практике широко используются цилиндрические оболочки кругового поперечного сечения, изготовленные из различного рода неоднородных и ортотропных материалов.

При решении данной задачи предполагаем, что упругие характеристики материала являются непрерывными функциями координаты толщины:

$$E_1 = E_1(z), \qquad E_2 = E_2(z), \qquad G_{12} = G_{12}(z), \qquad \nu_1 = \nu_1(z), \qquad \nu_2 = \nu_2(z).$$

Координатная система выбрана следующим образом: оси x и y расположены в касательной плоскости к срединной поверхности элемента оболочки и направлены по линиям главных кривизн, а ось z направлена по нормали к срединной поверхности.

Для случая обобщенного плоского напряженного состояния связь между напряжениями $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ и деформациями $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ имеет вид [1]:

$$\sigma_{11} = a_1(z)\varepsilon_{11} + a_2(z)\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{22} = a_2(z)\varepsilon_{11} + a_3(z)\varepsilon_{22},$$
$$\sigma_{12} = a_4(z)\varepsilon_{12},$$

где

$$a_1(z) = \frac{E_1(z)}{1-\nu_1(z)\nu_2(z)}, \qquad a_2(z) = \frac{\nu_2(z)E_1(z)}{1-\nu_1(z)\nu_2(z)},$$

$$a_3(z) = \frac{E_2(z)}{1-\nu_1(z)\nu_2(z)}, \qquad a_4(z) = G_{12}(z),$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{w}{R} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

u, ϑ, w – компоненты вектора перемещений, R – радиус срединной поверхности оболочки.

Усилия и моменты определяются компонентами вектора перемещения следующими соотношениями:

$$T_{11} = A_1\frac{\partial u}{\partial x} + A_2\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - A_2R^{-1}w;$$

$$T_{22} = A_2\frac{\partial u}{\partial x} + A_3\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - D_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - A_3R^{-1}w; \qquad (1)$$

$$T_{12} = A_4\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) - D_4\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

$$\mathrm{M}_{11} = D_1\frac{\partial u}{\partial x} + D_2\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - B_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_2R^{-1}w;$$

$$M_{22} = D_2\frac{\partial u}{\partial x} + D_3\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - B_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - B_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_3R^{-1}w; \qquad (2)$$

$$\mathrm{M}_{12} = D_4\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) - B_4\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1 = \int_{-h/2}^{h/2} a_1(z)dz; \qquad D_1 = \int_{-h/2}^{h/2} a_1(z)zdz; \qquad B_1 = \int_{-h/2}^{h/2} a_1(z)z^2dz;$$

$$A_2 = \int_{-h/2}^{h/2} a_2(z)dz; \qquad D_2 = \int_{-h/2}^{h/2} a_2(z)zdz; \qquad B_2 = \int_{-h/2}^{h/2} a_2(z)z^2dz;$$

$$A_3=\int\limits_{-h/2}^{h/2}a_3(z)dz;\qquad D_3=\int\limits_{-h/2}^{h/2}a_3(z)zdz;\qquad B_3=\int\limits_{-h/2}^{h/2}a_3(z)z^2dz;$$

$$A_4=\int\limits_{-h/2}^{h/2}a_4(z)dz;\qquad D_4=\int\limits_{-h/2}^{h/2}a_4(z)zdz;\qquad B_4=\int\limits_{-h/2}^{h/2}a_4(z)z^2dz.$$

Уравнения равновесия цилиндрических оболочек типа Донелла с учетом линейного сопротивления внешней среды имеют следующий вид [2]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathrm{T}_{11}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{T}_{12}}{\partial y}+k_1u=0,\\ \frac{\partial \mathrm{T}_{12}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{T}_{22}}{\partial y}+k_2\vartheta=0,\\ \frac{\partial^2 \mathrm{M}_{11}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 \mathrm{M}_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \mathrm{M}_{22}}{\partial y^2}+\frac{\mathrm{T}_{22}}{R}+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+k_3w=0.\end{gathered}\tag{3}$$

Здесь P – внешняя сжимающая нагрузка; k_1,k_2,k_3 – характеристики сопротивления в главных направлениях.

Подставляя (1) и (2) в (3), после некоторых преобразований, получаем:

$$\begin{gathered}A_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(A_2+A_4)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial y}-D_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-(D_2+D_4)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}-\\ -\frac{A_2}{R}\frac{\partial w}{\partial x}+k_1u=0;\\ (A_2+A_4)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+A_4\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+A_3\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}-D_3\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}-(D_2+D_4)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}-\\ -\frac{A_3}{R}\frac{\partial w}{\partial y}+k_2\vartheta=0;\\ D_1\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+(D_2+2D_4)\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{A_2}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+D_3\frac{\partial^3\vartheta}{\partial y^3}+(D_2+2D_4)\frac{\partial^3\vartheta}{\partial x^2\partial y}+\\ +\frac{A_3}{R}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}-B_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-2(B_2+B_4)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}-B_3\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}++\left(P-\frac{2D_2}{R}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\\ -\frac{2D_3}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{A_3}{R^2}w+k_3w=0.\end{gathered}\tag{4}$$

Решение (4) будем искать в следующем виде [2]:

$$u=u_0\cos\alpha x\cos\beta y,$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin \alpha x \sin \beta y \ , \qquad (5)$$
$$w = w_0 \sin \alpha x \cos \beta y \ ,$$

здесь $\alpha = m\pi L^{-1}$, $\beta = nR^{-1}$; u_0, ϑ_0, w_0 - амплитуды перемещений, R - радиус срединной поверхности, L - длина оболочки, m - число продольных полуволн, n - число окружных волн при потере устойчивости.

Подставляя (5) в (4), нетрудно убедиться, что получается следующая система однородных уравнений относительно u_0, ϑ_0, w_0:

$$b_1 u_0 + b_2 \vartheta_0 + b_3 w_0 = 0 \ ,$$
$$b_4 u_0 + b_5 \vartheta_0 + b_6 w_0 = 0 \ , \qquad (6)$$
$$b_7 u_0 + b_8 \vartheta_0 + b_9 w_0 = 0 \ .$$

Из условия нетривиальности решений системы (6) определяется критическая нагрузка $P_{кр}$:

$$\det(b_{ij}) = 0 \ .$$

Здесь приняты обозначения:

$$b_1 = k_1 - A_1\alpha^2 - A_4\beta^2 ;$$
$$b_2 = (A_2 + A_4)\alpha\beta ;$$
$$b_3 = D_1\alpha^3 + (D_2 + D_4)\alpha\beta^2 - A_2R^{-1}\alpha ;$$
$$b_4 = b_2 ;$$
$$b_5 = -A_4\alpha^2 - A_3\beta^2 + k_2 ;$$
$$b_6 = A_3R^{-1}\beta - (D_2 + D_4)\alpha^2\beta - D_3\beta^3 ;$$
$$b_7 = D_1\alpha^3 + (D_2 + 2D_4)\alpha\beta^2 - A_2R^{-1}\alpha ;$$
$$b_8 = A_3R^{-1}\beta - (D_2 + 2D_4)\alpha^2\beta - D_3\beta^3 ;$$
$$b_9 = -B_1\alpha^4 - 2(B_2 + B_4)\alpha^2\beta^2 - B_3\beta^4 - (P - 2D_2R^{-1})\alpha^2 +$$
$$+ 2D_3R^{-1}\beta^2 - A_3R^{-2} + k_3 .$$

Раскрывая определитель, для осесимметричной формы потери устойчивости, при $k_1 = k_2 = 0$ получаем:

$$P_{kp} = 2(A_1R)^{-1}\left[\sqrt{(A_2^2 - A_1A_3 + A_1R^2k_3)(D_1^2 - A_1B_1)} + A_1D_2 - A_2D_1\right]. \qquad (7)$$

Для однородной среды, без учета сопротивления внешней среды, (7) принимает вид:

$$\mathrm{P}_{kp}^{0} = \frac{h^2\sqrt{E_1E_2 - E_1^2\nu_2^2}}{R\sqrt{3}(1 - \nu_1\nu_2)} \ . \qquad (8)$$

В изотропном случае из (8) следует известный результат:

$$P_{kp}^{из} = \frac{E_0 h^2}{R\sqrt{3\left(1-\nu_0^2\right)}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Наука, 1977, 415с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., Наука, 1967, 984с.

AZİNOTROP ƏSAS ÜZƏRİNDƏ YERLƏŞDİRİLMİŞ ORTOTROP QEYRİ-BİRCİNS SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN DAYANIQLIĞI

H.M.QASIMOV

XÜLASƏ

Məqalədə ox boyunca sıxılmış ortotrop qeyri-bircins silindrik örtüyə baxılır. Materialın elastiклiк xaraкteristiкaları qalınlıq кoordinatının кəsilməz funкsiyaları кimi götürülür. Xarici mühitin anizotrop müqaviməti nəzərə alınmışdır. Məsələ sərbəst söyкənmə halı üçün həll olunmuşdur. Dayanıqlığın itməsinin oxa simmetriк halı üçün analiz aparılmışdır. Qeyri-bircinsliyin müxtəlif formaları üçün hesablama aparılmışdır.

STABILITY OF ORTHOTROPIC NON-UNIFORM CYLINDRICAL SHELL MADE OF LYNG ON ANISOTROPIC BASIS

H.M.GASIMOV

SUMMARY

In the paper it is considered an orthotropic non-uniform cylindrical shell at axial compression. It is assumed that elastic characteristics of the material are continuous functions of thickness coordinate. Anisotropic resistance is taken into account of environment. The problem is solved for free support case. Analysis is carried out for axially symmetric form stability loss. The calculations are conducted for all forms of non-homogeneities.