BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

О БАЗИСНЫХ СВОЙСТВАХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ, КВАДРАТИЧНО ЗАВИСЯЩИМ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Н.Б.КЕРИМОВ, Я.Н.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

Рассматривается дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля с одним и тем же спектральным параметром в уравнении и в одном из граничных условий, при этом граничное условие квадратично зависит от спектрального параметра. Исследуется базисность в пространстве $L_p(0,1)$ системы собственных функций этого оператора.

Рассмотрим спектральную задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad 0 < x < 1, \tag{0.1}$$

$$y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta, \tag{0.2}$$

$$\frac{y'(1)}{y(1)} = f(\lambda), \tag{0.3}$$

где λ – спектральный параметр, $0 \le \beta < \pi$, $q(x)$ – вещественная функция из класса $C[0,1]$ и

$$f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

a, b, c – действительные постоянные, $a \ne 0$.

Настоящая работа посвящена изучению базисных свойств в пространствах $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ системы собственных функций краевой задачи (0.1)-(0.3).

В [1] (см. также [2]) доказано, что собственные значения краевой задачи (0.1)-(0.3) образуют бесконечную последовательность и возможны лишь следующие случаи:

(***a***) все собственные значения действительные и простые;

(***b***) все собственные значения действительные и кроме одного двукратного все простые;

(***c***) все собственные значения действительные и кроме одного трехкратного все простые;

(*d*) все собственные значения простые и кроме двух (комплексно сопряженных) все действительные.

Будем считать, что собственные значения λ_n $(n \geq 0)$ краевой задачи (0.1)-(0.3) пронумерованы в порядке неубывания их действительных частей с учетом кратности. Асимптотика собственных значений и осцилляционные свойства собственных функций краевой задачи (0.1)-(0.3) для рациональной функции $f(\lambda)$ исследована в недавней работе [2]. Для квадратичной функции $f(\lambda)$ асимптотика собственных значений λ_n ($n\geq 0$) выглядит следующим образом (см. [1]):

$$\lambda_n = \begin{cases} (n-1)^2 \pi^2 + \int\limits_0^1 q(t)dt + o(\frac{1}{n}), & \text{если } \beta = 0; \\ \left(n-\frac{3}{2}\right)^2 \pi^2 + 2\operatorname{ctg}\beta + \int\limits_0^1 q(t)dt + o(\frac{1}{n}), & \text{если } \beta \neq 0. \end{cases} \tag{0.4}$$

Имеется обширная литература о краевых задачах со спектральным параметром в граничных условиях (см. например [1-4,6,13-18]). Из недавних работ отметим [19-21]. В [3] рассмотрена краевая задача (0.1)-(0.3) для функции $f(\lambda) = b\lambda + c$ $(b < 0)$ и доказывается возможность всех случаев (*a*)-(*d*) для этой задачи. В [4] детально исследована базисность в $L_p(0,1)\,(1 < p < \infty)$ системы собственных и присоединенных функций краевой задачи

$$-y'' = \lambda y, \qquad 0 < x < 1,$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(1) = d\lambda y(1), \quad d \neq 0.$$

Заметим, что для этой задачи реализуются случаи (*a*) и (*b*).

1. Некоторые вспомогательные результаты

Пусть y_n – собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n. Если λ_k – двукратное собственное значение $(\lambda_k = \lambda_{k+1})$, то для присоединенной функции y_{k+1}, отвечающей собственной функции y_k, справедливы следующие соотношения (см. [5, стр. 28]):

$$-y''_{k+1} + q(x)y_{k+1} = \lambda_k y_{k+1} + y_k, \qquad 0 < x < 1, \tag{1.1}$$
$$y_{k+1}(0)\cos\beta = y'_{k+1}(0)\sin\beta, \tag{1.2}$$
$$y'_{k+1}(1) = (a\lambda_k^2 + b\lambda_k + c)y_{k+1}(1) + (2a\lambda_k + b)y_k(1). \tag{1.3}$$

Если λ_k – трехкратное собственное значение $(\lambda_k = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2})$, то наряду с первой присоединенной функцией y_{k+1} существует и вторая присоединенная функция y_{k+2}, которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$-y''_{k+2}+q(x)y_{k+2}=\lambda_k y_{k+2}+y_{k+1}, \qquad 0<x<1, \tag{1.4}$$

$$y_{k+2}(0)\cos\beta=y'_{k+2}(0)\sin\beta, \tag{1.5}$$

$$y'_{k+2}(1)=(a\lambda_k^2+b\lambda_k+c)y_{k+2}(1)+(2a\lambda_k+b)y_{k+1}(1)+ay_k(1). \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. *Легко проверить, что функции* $y_{k+1}+cy_k$ *и* $y_{k+2}+dy_k$, *где* c *и* d *– произвольные постоянные, также являются присоединенными функциями первого и второго порядка соответственно. Заметим также, что при замене первой присоединенной функции* y_{k+1} *на* $y_{k+1}+cy_k$, *вторая присоединенная функция* y_{k+2} *заменяется на* $y_{k+2}+cy_{k+1}$.

Лемма 1.1. *Пусть* y_n, y_m *– собственные функции, соответствующие собственным значениям* λ_n *и* λ_m $\left(\lambda_n\neq\overline{\lambda_m}\right)$. *Тогда выполняется равенство*

$$(y_n,y_m)=-(a\lambda_n+b+a\overline{\lambda_m})y_n(1)\overline{y_m(1)}, \tag{1.7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ *– скалярное произведение в пространстве* $L_2(0,1)$.

Доказательство. Заметим, что при $0\le x\le 1$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dx}(y_n(x)\overline{y'_m(x)}-\overline{y_m(x)}y'_n(x)=(\lambda_n-\overline{\lambda_m})y_n(x)\overline{y_m(x)}.$$

Интегрируя это тождество по x в пределах от 0 до 1, получим

$$(\lambda_n-\overline{\lambda_m})(y_n,y_m)=(y_n(x)\overline{y'_m(x)}-\overline{y_m(x)}y'_n(x)\Big|_0^1. \tag{1.8}$$

Из условия (0.2) следует, что при всех $n, m=0,1,\ldots$ справедливо равенство

$$y_n(0)\overline{y'_m}(0)-\overline{y_m}(0)y'_n(0)=0. \tag{1.9}$$

Принимая во внимание (0.3) получим

$$y_n(1)\overline{y'_m(1)}-\overline{y_m(1)}y'_n(1)=-(\lambda_n-\overline{\lambda_m})(a\lambda_n+b+a\overline{\lambda_m})y_n(1)\overline{y_m(1)}. \tag{1.10}$$

Равенство (1.7) следует из сопоставления равенств (1.8)-(1.10).

Лемма 1.2. 1) *Если* λ_k *– кратное собственное значение и* y_{k+1} *– соответствующая присоединенная функция первого порядка, то при* $\lambda_n\neq\lambda_k$ *выполняются равенства*

$$(y_{k+1},y_n)=-(a\lambda_k+b+a\lambda_n)y_{k+1}(1)y_n(1)-ay_k(1)y_n(1), \tag{1.11}$$

$$\|y_k\|_2^2=(y_k,y_k)=-(2a\lambda_k+b)y_k(1)^2. \tag{1.12}$$

2) *Если* λ_k *– трехкратное собственное значение и* y_{k+2} *– соответствующая присоединенная функция второго порядка, то при* $\lambda_n \neq \lambda_k$ *выполняются равенства*

$$(y_{k+2}, y_n) = -(a\lambda_k + b + a\lambda_n) y_{k+2}(1) y_n(1) - a y_{k+1}(1) y_n(1), \qquad (1.13)$$

$$(y_{k+1}, y_k) = -(2a\lambda_k + b) y_{k+1}(1) y_k(1) - a y_k(1)^2, \qquad (1.14)$$

$$(y_{k+2}, y_k) = -(2a\lambda_k + b) y_{k+2}(1) y_k(1) - a y_{k+1}(1) y_k(1) + R_k, \qquad (1.15)$$

где

$$R_k = \|y_{k+1}\|_2^2 + (2a\lambda_k + b) y_{k+1}(1)^2 + 2a y_{k+1}(1) y_k(1) \neq 0. \qquad (1.16)$$

Доказательство. Равенства (1.11)-(1.15) доказываются методом, примененным при доказательстве (1.7). При этом этот метод последовательно применяется к функциям y_{k+1} и y_n (для получения (1.11)), y_{k+1} и y_k (для получения (1.12)), y_{k+2} и y_n (для получения (1.13)), y_{k+2} и y_k (для получения (1.14)), y_{k+2} и y_{k+1} (для получения (1.15)), и принимается во внимание тот факт, что в рассматриваемых случаях все собственные значения действительны.

Докажем, что $R_k \neq 0$. Используя равенства (1.12) и (1.14) легко можно проверить, что при замене присоединенной функции y_{k+1} другой присоединенной функцией $y_{k+1}^* = y_{k+1} + c y_k$ (c –произвольное постоянное) (см. замечание 1.1) R_k не меняется. Пологая $c = -y_{k+1}(1) / y_k(1)$ получим, что $y_{k+1}^*(1) = 0$. Следовательно, $R_k = \|y_{k+1}^*\|_2^2$. Отсюда и из линейной независимости функций y_{k+1} и y_k следует, что $R_k \neq 0$. Лемма 1.2 доказана.

Пусть y_n – собственная функция и

$$B_n = \|y_n\|_2^2 + (2a \operatorname{Re} \lambda_n + b) |y_n(1)|^2. \qquad (1.17)$$

Лемма 1.3. *Для выполнения равенства* $B_n = 0$ *необходимо и достаточно, чтобы* λ_n *являлось недействительным или кратным собственным значением.*

Доказательство. Пусть λ_n – действительное собственное значение и $B_n = 0$. Докажем, что λ_n – кратное собственное значение. Допустим обратное. Это означает (см. [6, стр. 636-637]), что для любой функции $r(x)$, удовлетворяющей соотношениям

$$-r'' + q(x) r = \lambda_n r + y_n, \qquad 0 < x < 1, \qquad (1.18)$$

$$r(0)\cos\beta = r'(0)\sin\beta\,, \tag{1.19}$$

справедливо

$$r'(1) \neq r(1)f(\lambda_n) + y_n(1)f'(\lambda_n)\,. \tag{1.20}$$

Из (0.1) и (1.18) получим

$$\frac{d}{dx}(y_n r' - r y_n') = -y_n^2\,.$$

Интегрируя это тождество по x в пределах от 0 до 1, получим

$$\|y_n\|_2^2 = -(y_n r' - r y_n')\Big|_0^1\,.$$

Из условий (0.2), (0.3), (1.19) и (1.20) следует, что

$$\|y_n\|_2^2 = r(1)y_n'(1) - y_n(1)r'(1) \neq -(2a\lambda_n + b)y_n(1)^2\,.$$

Последнее противоречит $B_n = 0$. Следовательно, λ_n – кратное собственное значение.

Если λ_n – недействительное собственное значение, то равенство $B_n = 0$ следует из (1.7) при $m = n$. Если λ_n – кратное собственное значение, то требуемое следует из (1.12).

2. Асимптотические формулы для собственных функций

Лемма 2.1. *Справедливы асимптотические формулы*

$$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin(n-1)\pi x + O(\frac{1}{n}), & \text{если } \beta = 0, \\ \sqrt{2}\cos\left(n-\frac{3}{2}\right)\pi x + O(\frac{1}{n}), & \text{если } \beta \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Из (0.4) следует, что

$$\lambda_n = \begin{cases} (n-1)^2\pi^2 + O(1), & \text{если } \beta = 0; \\ \left(n-\frac{3}{2}\right)^2\pi^2 + O(1), & \text{если } \beta \neq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Обозначим через $\psi_1(x,\mu)$ и $\psi_2(x,\mu)$ фундаментальную систему решений уравнения $u'' - q(x)u + \mu^2 u = 0$, определенную начальными условиями

$$\psi_1(0,\mu) = \psi_2(0,\mu) = 1,\ \psi_1'(0,\mu) = i\mu,\ \psi_2'(0,\mu) = -i\mu\,. \tag{2.2}$$

Известно (см. [7] или [5, стр. 59]), что при достаточно больших значениях μ имеет место

$$\psi_j(x,\mu)=\exp(\mu\omega_j x)(1+O(\tfrac{1}{\mu})), \qquad (2.3)\text{-}(2.4)$$

где $\omega_1=-\omega_2=i$.

Собственную функцию $y_n(x)$ будем искать в виде

$$y_n(x)=P_n\begin{Vmatrix}\psi_1(x,\sqrt{\lambda_n}) & \psi_2(x,\sqrt{\lambda_n})\\ U(\psi_1(x,\sqrt{\lambda_n})) & U(\psi_2(x,\sqrt{\lambda_n}))\end{Vmatrix}, \qquad (2.5)$$

где

$$P_n=\begin{cases}\left(i\sqrt{2}\right)^{-1}, & \text{если } \beta=0;\\ \left(i\sqrt{2\lambda_n}\sin\beta\right)^{-1}, & \text{если } \beta\neq 0,\end{cases} \qquad (2.6)$$

и для произвольной функции $\psi(x)\in C^1[0,1]$ выражение $U(\psi(x))$ определено равенством

$$U(\psi(x))=\psi(0)\cos\beta-\psi'(0)\sin\beta. \qquad (2.7)$$

Непосредственное вычисление с использованием формул (2.1)-(2.7) доказывает лемму 2.1.

Следствие 2.1. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\|y_n\|_2=1+O(\tfrac{1}{n}), \qquad (2.8)$$

$$y_n(x)=O(1). \qquad (2.9)$$

Лемма 2.2. *Справедлива асимптотическая формула*

$$y_n(1)=O(\tfrac{1}{n^3}).$$

Доказательство. Известно (см. [8, теорема 2]), что

$$\max_{0\le x\le 1}|y_n'(x)|\le const\cdot\left(1+\sqrt{|\lambda_n|}\right)\max_{0\le x\le 1}|y_n(x)|, \qquad (2.10)$$

Принимая во внимание (0.3), (2.1), (2.9) и (2.10) получим

$$|f(\lambda_n)y_n(1)|=|y_n'(1)|\le const\cdot\left(1+\sqrt{|\lambda_n|}\right)\max_{0\le x\le 1}|y_n(x)|=O(n).$$

Поскольку $f(\lambda_n)=a\pi^4n^4(1+O(\frac{1}{n}))$, то отсюда получаем требуемое.

Следствие 2.2. *Справедлива асимптотическая формула*

$$B_n=1+O(\tfrac{1}{n}).$$

3. О базисности в $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ системы собственных функций

Теорема 3.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *в случае (a) система* $\{y_n(x)\}\,(n=0,1,\ldots;n\neq r,s)$, *где* r,s *– произвольные неравные целые неотрицательные числа, образует базис в пространстве* $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$;

2) *в случае (b) система* $\{y_n(x)\}\,(n=0,1,\ldots;\,n\neq k,k+1)$, *где* $\lambda_k=\lambda_{k+1}$ *двукратное собственное значение, образует базис в пространстве* $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$;

3) *в случае (c) система* $\{y_n(x)\}\,(n=0,1,\ldots;\,n\neq k+1,k+2)$, *где* $\lambda_k=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}$ *трехкратное собственное значение, образует базис в пространстве* $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$;

4) *в случае (d) система* $\{y_n(x)\}\,(n=0,1,\ldots;n\neq r,s)$, *где* λ_r *и* $\lambda_s=\overline{\lambda_r}$ *пара недействительных собственных значений, образует базис в пространстве* $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$.

Кроме того, если $p=2$, *то во всех случаях базис является безусловным.*

Доказательство. ***1)*** Сначала докажем, что система

$$\{y_n(x)\}\big(\,n=0,1,\ldots;n\neq r,s\big) \tag{3.01}$$

минимальна в пространстве $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$. Для этого достаточно доказать существование системы

$$\{u_n(x)\}\big(n=0,1,\ldots;n\neq r,s\big), \tag{3.02}$$

являющейся биортогонально сопряженной к системе (3.01).

Элементы системы (3.02) определим представлением

$$u_n(x)=\frac{A_{n,r,s}(x)}{B_n\cdot\Delta_{r,s}}, \tag{3.03}$$

$$A_{n,r,s}(x)=\begin{Vmatrix} y_n(x) & y_n(1) & y_n(1)(a\lambda_n+b)\\ y_r(x) & y_r(1) & y_r(1)(a\lambda_r+b)\\ y_s(x) & y_s(1) & y_s(1)(a\lambda_s+b)\end{Vmatrix}, \tag{3.04}$$

$$\Delta_{r,s}=a(\lambda_s-\lambda_r)y_r(1)y_s(1)\,. \tag{3.05}$$

С помощью равенств (1.7) и (1.17) непосредственно проверяется равенство $(u_n,y_m)=\delta_{n,m}$ $(n,m=0,1,\ldots;\,n,m\neq r,s)$, где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера. Следовательно, система (3.01) минимальна в $L_p(0,1)$.

Докажем безусловную базисность в пространстве $L_2(0,1)$ системы (3.01). Для этого сравним систему (3.01) с системой

$$\{\varphi_n(x)\}\,(n=2,3,\dots), \tag{3.06}$$

где

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\sin(n-1)\pi x, & \text{если } \beta=0;\\ \sqrt{2}\cos\left(n-\frac{3}{2}\right)\pi x, & \text{если } \beta\neq 0.\end{cases} \tag{3.07}$$

Эта система является базисом пространства $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ (см. например, [9]) и в частности, ортонормированным базисом пространства $L_2(0,1)$. В силу леммы 2.1 для достаточно больших n справедливо неравенство

$$\|y_n(x)-\varphi_n(x)\|_2 \le \text{const}\cdot n^{-1}. \tag{3.08}$$

Не нарушая общности, можем считать, что $r<s$. Из неравенства (3.08) следует сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{r+1}\|y_{n-2}(x)-\varphi_n(x)\|_2^2+\sum_{n=r+2}^{s}\|y_{n-1}(x)-\varphi_n(x)\|_2^2+\sum_{n=s+1}^{\infty}\|y_n(x)-\varphi_n(x)\|_2^2.$$

Таким образом, система (3.01) квадратично близка к системе (3.06). Так как система (3.01) минимальна в пространстве $L_2(0,1)$, отсюда вытекает безусловная базисность в $L_2(0,1)$ этой системы (см. [10, стр. 440]).

Разлагая детерминант (3.04) по элементам первой строки и используя (3.03), (2.1), лемму 2.2 и следствие 2.2 нетрудно заметить, что

$$u_n(x)=y_n(x)+O(\tfrac{1}{n}). \tag{3.09}$$

Отсюда и из леммы 2.1 следует, что

$$y_n(x)=\varphi_n(x)+O(\tfrac{1}{n}), \tag{3.10}$$

$$u_n(x)=\varphi_n(x)+O(\tfrac{1}{n}), \tag{3.11}$$

Пусть $1<p<2$ и p фиксировано. Норму в пространстве $L_p(0,1)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_p$. Как доказано выше, система (3.01) является базисом пространства $L_2(0,1)$. Следовательно, эта система полна в $L_p(0,1)$. Для доказательства базисности в $L_p(0,1)$ этой системы достаточно доказать существование постоянной $M>0$, обеспечивающей справедливость неравенства

$$\left\| \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq r,s}}^{N} (h,u_n)y_n \right\|_p \leq M\cdot \|h\|_p , \qquad (N=1,2,\ldots) , \qquad (3.12)$$

для любой функции h из $L_p(0,1)$ (см. [11, стр. 19]).

В силу (3.10) и (3.11) (в дальнейшем Σ' означает $\sum\limits_{\substack{n=1 \\ n\neq r,s}}^{N}$)

$$\begin{aligned} \left\|\Sigma'(h,u_n)y_n\right\|_p &\leq \left\|\Sigma'(h,\varphi_n)\varphi_n\right\|_p + \\ &+\left\|\Sigma'(h,u_n)O(\tfrac{1}{n})\right\|_p + \left\|\Sigma'(h,O(\tfrac{1}{n}))\varphi_n\right\|_p . \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Поскольку система (3.06) базис пространства $L_p(0,1)$, то имеет место (см. [11, стр. 19])

$$\left\|\Sigma'(h,\varphi_n)\varphi_n\right\|_p \leq const\cdot\|h\|_p . \qquad (3.14)$$

Применяя последовательно неравенства Гёльдера и Минковского и используя (3.11) получаем

$$\begin{aligned} \left\|\Sigma'(h,u_n)O(\tfrac{1}{n})\right\|_p &\leq const\cdot\Sigma'\left|(h,u_n)\tfrac{1}{n}\right| \leq const\cdot\left(\Sigma'\left|(h,u_n)\right|^q\right)^{1/q}\cdot\left(\Sigma' n^{-p}\right)^{1/p} \leq \\ &\leq const\cdot\left(\left(\Sigma'\left|(h,\varphi_n)\right|^q\right)^{1/q} + \left(\Sigma'\left|(h,O(\tfrac{1}{n}))\right|^q\right)^{1/q}\right), \end{aligned} \qquad (3.15)$$

где $1/p+1/q=1$.

Поскольку (3.06) равномерно ограниченная ортонормированная система, то в силу теоремы Ф. Рисса [12, стр. 154], справедливо

$$\left(\Sigma'\left|(h,\varphi_n)\right|^q\right)^{1/q} \leq const\cdot\|h\|_p . \qquad (3.16)$$

Используя известный факт, что $\|h\|_p$ – неубывающая функция от p, получаем

$$\left(\Sigma'\left|(h,O(\tfrac{1}{n}))\right|^q\right)^{1/q} \leq const\cdot\|h\|_1\cdot\left(\Sigma' n^{-q}\right)^{1/q} \leq const\cdot\|h\|_p . \qquad (3.17)$$

Используя равенство Парсеваля, получаем

$$\left\|\sum{}'(h,O(\tfrac{1}{n}))\varphi_n\right\|_p \le \left\|\sum{}'(h,O(\tfrac{1}{n}))\varphi_n\right\|_2 = \left(\sum{}'\left|(h,O(\tfrac{1}{n}))\right|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le const\cdot\|h\|_1\cdot\left(\sum{}' n^{-2}\right)^{1/2} \le const\cdot\|h\|_p\,. \qquad (3.18)$$

Неравенство (3.12) является следствием неравенств (3.13)-(3.18). Базисность системы (3.01) в пространстве $L_p(0,1)$ при $1<p<2$ доказано.

Пусть $2<p<\infty$. Очевидно, что система (3.02) является базисом пространства $L_p(0,1)$. Следовательно, эта система полна в пространстве $L_q(0,1)$, где $1/p+1/q=1$. Заметим, что $1<q<2$. С помощью совершенно аналогичных рассуждений, использованных выше, доказывается базисность в $L_q(0,1)$ системы (3.02). Отсюда следует базисность в $L_p(0,1)$ $(2<p<\infty)$ системы (3.01).

2) В этом случае элементы биортогонально сопряженной системы $\{u_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots;\, n\ne k,\, k+1)$ определяются представлением

$$u_n(x)=\frac{A_{n,k,k+1}(x)}{B_n\cdot\Delta_k}, \qquad (3.19)$$

$$A_{n,k,k+1}(x)=\left\|\begin{matrix} y_n(x) & y_n(1) & y_n(1)(a\lambda_n+b) \\ y_k(x) & y_k(1) & y_k(1)(a\lambda_k+b) \\ y_{k+1}(x) & y_{k+1}(1) & y_{k+1}(1)(a\lambda_k+b)+ay_k(1)\end{matrix}\right\|, \qquad (3.20)$$

$$\Delta_k = ay_k(1)^2\,. \qquad (3.21)$$

Равенство $(u_n,y_m)=\delta_{n,m}$ $(n,m=0,1,\ldots;\, n,m\ne k,k+1)$ доказываются с помощью равенств (1.7), (1.11) и (1.12). Базисность системы $\{y_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots;\, n\ne k,\, k+1)$ в пространстве $L_p(0,1)$ доказывается аналогично предыдущему случаю.

3) В этом случае элементы биортогонально сопряженной системы $\{u_n(x)\}$ $(n=0,1,\ldots;\; n\ne k+1,\, k+2)$ при $n\ne k$ определяются равенствами (3.19)-(3.21), а элемент $u_k(x)$ определяется представлением

$$u_k(x)=\frac{A_{k,k+1,k+2}(x)}{R_k\cdot\Delta_k},$$

$$A_{k,k+1,k+2}(x)=\left\|\begin{matrix} y_k(x) & y_k(1) & y_k(1)(a\lambda_k+b) \\ y_{k+1}(x) & y_{k+1}(1) & y_{k+1}(1)(a\lambda_k+b)+ay_k(1) \\ y_{k+2}(x) & y_{k+2}(1) & y_{k+2}(1)(a\lambda_k+b)+ay_{k+1}(1)\end{matrix}\right\|,$$

где R_k определено соотношением (1.16). Равенство $(u_n, y_m) = \delta_{n,m}$ $(n, m = 0,1,\ldots;\ n, m \neq k+1,\ k+2)$ доказывается с помощью равенств (1.7), (1.13)-(1.16).

4) В этом случае биортогонально сопряженная система также определяются равенствами (3.03)-(3.05).

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 2.1. *Легко проверить, что при замене присоединенных функций* y_{k+1} *и* y_{k+2} *соответственно на* $y_{k+1} + cy_k$ *и* $y_{k+2} + cy_{k+1} + dy_k$*, где* c *и* d *– произвольные постоянные (см. замечание* 2.1*), биортогональные системы в случаях* 2) *и* 3) *теоремы* 2.1 *не меняются. Это наблюдение согласуется с известным фактом о единственности биортогональной системы базиса.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Code W.J., Browne P.J. Sturm-Liouville problems with boundary conditions depending quadratically on the eigenparameter, J. Math. Anal. Appl., 309, (2005), 729-742.
2. Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A. Equivalence of inverse Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter, J. Math. Anal. Appl., 291, (2004), 246-261.
3. Binding P.A., Browne P.J., Code W.J., Watson B.A. Transformation of Sturm-Liouville problems with decreasing affine boundary conditions, Proc. Edin. Math. Soc., 47, (2004), 533-552.
4. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Докл. Акад. Наук, том 385, № 1, (2002), 20-24.
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 528 с.
6. Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A. Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter, I, Proc. Edin. Math. Soc., 45, (2002), 631-645.
7. Макин А.С. Об одном классе краевых задач для оператора Штурма-Лиувилля. Дифференц. уравнения, том 35, № 8, (1999), 1058-1066.
8. Тихомиров В.В. Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметром. Докл. Акад. Наук, том 273, № 4, (1983), 807-810.
9. Моисеев Е.И. О базисности систем синусов и косинусов. Докл. Акад. Наук, том 275, № 4, (1984), 794-798.
10. Качмаж Г. Штейнгауз С. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958, 508 с.
11. Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984, 496 с.
12. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. II, М.: Мир, 1965, 540 с.
13. Керимов Н.Б., Мирзоев В.С. О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Сибирский мат. журн., том 44, № 5, (2003), 1041-1045.
14. Kerimov N.B., Poladov R.G. On basicity in $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ of the system of eigenfunctions of one boundary value problem, I, II, Proc. of Institute of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan, 22, (2005), 53-64; 23, (2005), 65-76.

15. Керимов Н.Б., Аллахвердиев Т.И. Об одной краевой задаче, I, II/ Дифференц. уравнения, том 29, № 1, (1993), 54-60; том 29, № 6, (1993), 952-960.
16. Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, Math. Z., 133, (1973), 301-312.
17. Schneider A. A note on eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, Math. Z., 136, (1974), 163-167.
18. Fulton C.T. Two point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edin., 77A, (1977), 293-308.
19. Shubov M.A. Bending-torsion vibration model with two-end energy dissipation, Appl. Math. Comp., 164, (2005), 351-372.
20. Altınışık N., Kadakal M., Mukhtarov O.S. Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary conditions, Acta Math. Hungar., 102, (2004), 159-175.
21. Coşkun H., Bayram N. Asymptotics of eigenvalues for regular Sturm-Liouville problems with eigenvalue parameter in the boundary condition, J. Math. Anal. Appl., 306, (2005), 548-566.

SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ SPEKTRAL PARAMETRDƏN KVADRATİK ASILI OLAN ŞTURM–LİUVİL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN BAZİSLİK XASSƏLƏRİ HAQQINDA

N.B.KƏRİMOV, Y.N.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə sərhəd şərtlərindən biri spektral parametrdən kvadratik asılı olan Şturm-Liuvil diferensial operatoruna baxılır. Bu operatorun məxsusi funksiyalar sisteminin $L_p(0,1)$ fəzasında bazisliyi araşdırılır.

ON THE BASIS PROPERTIES OF STURM–LIOUVILLE PROBLEMS WITH BOUNDARY CONDITIONS DEPENDING QUADRATICALLY ON THE EIGENPARAMETER

N.B.KERIMOV, Y.N.ALIYEV

SUMMARY

We consider Sturm-Liouville operator with boundary conditions quadratically dependent on the eigenparameter. The basis property in $L_p(0,1)$ of the system of eigenfunctions corresponding to this operator is studied.