**BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ**

*№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010*

## ГРУППОИДЫ, ИХ ГОМОМОРФИЗМЫ И КАТЕГОРИИ

**В.А.КАСИМОВ, Л.М.НАСИБОВА**
***Бакинский Государственный Университет***
***kavagif@mail.ru***

*В работе рассматриваются некоторые новые группоиды и на примерах этих группоидов изучаются их связи с категориями. Категорный подход позволяет применить алгебраические методы в топологии.*

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, множество всех путей - $W(X)$ пространства $X$ является группоидом относительно умножения путей [1], [2]. Категорная природа множества путей - $W(X)$ также хорошо известна. После известных преобразований и налагаемых условий множество всех путей - $W(X)$ превращается в моноид, а потом и в группу. Пространства петель - это пространства непрерывных отображений, представляющих огромный интерес из-за существования в них достаточно богатых алгебраических структур. Многократные, а также и бесконечнократные петли, более богаты свойствами алгебра - гомотопической природы. То же самое можно сказать и о $H$ - пространствах, операдах и о ПРОП-ах [3]. Все названные выше понятия тесно связаны не только между собой, но и с группоидами, моноидами и группами симметрий. Наша цель состоит в построении новых соответствий между группоидами и категориями.

**Группоиды и их гомоморфизмы.**

Отображение $\varphi:\mathbf{G}'\to\mathbf{G}$ непустого подмножества $\mathbf{G}'$ множества $\mathbf{G}\times\mathbf{G}$ в множество $\mathbf{G}$ называется *частичной бинарной операцией на множестве* $\mathbf{G}$. Тройку $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$ назовем *частичным группоидом.* В случае, когда $\mathbf{G}'=\mathbf{G}\times\mathbf{G}$ мы получим группоид (см. в [4]). Мы будем рассматривать в основном частичные группоиды и для краткости будем называть их просто группоидами. В случае выполнения условия ассоциативности группоид называется полугруппой. Пусть $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$ - группоид и $A$ - некоторое подмножество в $\mathbf{G}$. Подмножество $A$ называется *идеалом* в $\mathbf{G}$, если выполняются условия

$A\mathbf{G}\subset A$ и $\mathbf{G}A\subset A$.

Пусть $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$ - группоид и $K_{\mathbf{G}}$ - категория, класс морфизмов которой совпадает с группоидом $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$. Сопоставляя классу морфизмов каждой категории некоторый группоид, мы можем трактовать гомоморфизмы группоидов как функторы.

Другое соответствие можно получить следующим образом. Пусть $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$ - группоид. Рассмотрим категорию $K_{\mathbf{G}}$, где $G$ - единственный объект, а морфизмы это элементы группоида $G$. В качестве композиции (произведении) морфизмов мы рассматриваем частичное умножение, определенное в группоиде $G$.

*Некоторые группоиды.*

Пусть $X$ некоторое множество, а $2^X$ - класс всех подмножеств множества $X$ определим классом морфизмов новой категории $\mathsf{Kat}_X$, т.е. $Mor\mathsf{Kat}_X = 2^X$. Множество морфизмов $Mor(A,B)$ объекта $A$ в объект $B$ состоит из всех отображений множества $A$ в множество $B$. Категорию $\mathsf{Kat}_X$ назовем категорией *подмножеств и отображений множества* $X$. Множество всех преобразований множества $X$ обозначим $\mathsf{F}\ (X)$. Как известно, $\mathsf{F}\ (X)$ является моноидом. Тогда как, $Mor\mathsf{Kat}_X$ - класс всех морфизмов категории $\mathsf{Kat}_X$ является группоидом (частичным) и $\mathsf{F}\ (X) \subset Mor\mathsf{Kat}_X$.

Пусть группа $G$ асимптотически действует в модуле $M$. Обозначим через $G_m^n$ следующее множество $G_m^n = \{g \in G \mid g * m = n\}$. Здесь $g * m$ означает асимптотическое действие элемента $g$ группы $G$ на точку $m$ модуля $M$. В случае $m = n$ множество $G_m^m$ обозначим просто через $G_m$. Рассмотрим категорию, объектами которой объявим множества $G_m$, а множество морфизмов объекта $G_m$ в объект $G_n$ - это множество $G_m^m$. Эту категорию обозначим через $AG(M)$. Справедливы следующие утверждения [5], [6].

**Предложение 1.** $G_m$ *- это стабилизатор точки* $m$.

**Теорема 1**. *Для каждой точки* $m$ *модуля* $M$ *объект* $G_m$ *является точечным.*

Множество целых чисел $\mathbf{Z}$ относительно операции деления является группоидом.

Рассмотрим на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ две операции, относительно которых оно составляет группоид. Это умножение и сложение:

*относительно умножения* $(\mathbf{N};\ \cdot)$ *- ассоциативный группоид с единицей, т. е, моноид;*

*относительно сложения* $(\mathbf{N};\ +)$ *- ассоциативный группоид без нуля.*

Пусть $a$ - некоторое натуральное число, рассмотрим следующие множества:

$$a + \mathbf{N} = \{a + n \mid n \in \mathbf{N}\} \text{ и } a \cdot \mathbf{N} = \{a \cdot n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Каждое из них является идеалом в соответствующем группоиде. Далее мы укажем, как эти множества связаны со структурой этих группоидов. Каждое из них является сдвигом относительно соответствующих операций - действий.

*Гомоморфизмы группоидов.*

Пусть $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$ и $(\mathbf{H},\mathbf{H}';\psi)$ - группоиды, отображение $f:\mathbf{G}\to\mathbf{H}$ назовем *гомоморфизмом группоидов*, если

$$f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2) \text{ для всех } g_1,g_2\in\mathbf{G}'.$$

По аналогии с действиями групп определим действие группоида на множестве. Пусть $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$ - группоид и $X$ - некоторое множество. Отображение $F:\mathbf{G}\times X\to X$ назовем действием группоида $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$ на множество $X$, если выполняются следующие условия:

$F(g_1g_2,x)=F(g_1(g_2,x))$ *для каждого* $g_1,g_2\in\mathbf{G}'$;

$F(eg,x)=x$, *где* $e$ *- единица* $g$.

Примеры:

А). Пусть $X$ - множество целых чисел $\mathbf{Z}$, $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$ - группоид натуральных чисел $(\mathbf{N};\ \cdot)$. Действие $F_1:\mathbf{G}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ определим по следующему правилу

$$F_1(n,m)=n\cdot m \text{ для каждого } n\in\mathbf{N} \text{ и } m\in\mathbf{Z}.$$

Б). Пусть $X$ - множество целых чисел $\mathbf{Z}$, $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$ - группоид натуральных чисел $(\mathbf{N};\ +)$. Действие $F_2:\mathbf{G}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ определим по следующему правилу

$$F_2(n,m)=n+m \text{ для каждого } n\in\mathbf{N} \text{ и } m\in\mathbf{Z}.$$

Действия $F_1$ и $F_2$ можно рассматривать и на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$.

**Предложение 2.** *Рассмотрим действия* $F_1$ *и* $F_2$ *во множестве натуральных чисел* $\mathbf{N}$. *Тогда для каждого числа* $a\in\mathbf{N}$ *эти действия порождают идеалы*

$$F_1(a)\mathbf{N}=a+\mathbf{N} \text{ и } F_2(a)\mathbf{N}=a\cdot\mathbf{N}$$

*в соответствующих группоидах* $(\mathbf{N};\ +)$ *и* $(\mathbf{N};\ \cdot)$.

Пусть $(\mathbf{G},\mathbf{G}';\varphi)$ - группоид натуральных чисел $(\mathbf{N};\ +)$. Действие $F:\mathbf{G}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ определим по следующему правилу

$$F(n,m)=n+m \text{ для каждого } n\in\mathbf{N} \text{ и } m\in\mathbf{N}.$$

Для каждого $m\in\mathbf{N}$, действие $F$ определяет отображение $F_m$, образ которого есть множество $\{m+1,m+2,...\}$, т.е. $\mathrm{Im}(F_m)=\mathbf{N}\setminus\mathbf{N_m}$.

Пусть $K$ - некоторая категория, $Mor(K)$ - класс морфизмов категории $K$. Рассмотрим множество морфизмов $L$ в категории $K$, т. е, $L\subset Mor(K)$. Категорию частных множества $L$ обозначим $K[L^{-1}]$. Категория частных $K[Mor(K)^{-1}]$ множества всех морфизмов $Mor(K)$ является группоидом [7]. Этот группоид назовем *группоидом ассоциированной категорией* $K$ и обозначим $\mathsf{G}(K)$.

**Группоиды и категории.**

Пусть $K(\mathbf{N})$ категория, объектами которой служат множества вида $\mathbf{N_m}$, где $m=0,1,2,....$ и $\mathbf{N_m}=\{1,2,...,m\}$, а в случае, когда $m=0$ примем $\mathbf{N}_0 = \varnothing$. В классе объектов $ObK(\mathbf{N})$ категории $K(\mathbf{N})$ определим операцию прямой суммы следующим образом

$$\mathbf{N_m} \oplus \mathbf{N_n} = \mathbf{N_{m+n}} \text{ для всех } \mathbf{N_m}, \mathbf{N_n} \in ObK(\mathbf{N}). \qquad (*)$$

Легко видеть, что $\mathbf{N_m} \oplus (\mathbf{N_n} \oplus \mathbf{N_s}) = (\mathbf{N_m} \oplus \mathbf{N_n}) \oplus \mathbf{N_s}$ и множество $\mathbf{N}_0$ является нулем этой операции. Таким образом, $ObK(\mathbf{N})$ является моноидом относительно прямой суммы, определенной формулой (*). Определим класс морфизмов - $MorK(\mathbf{N})$ категории $K(\mathbf{N})$ следующим образом. Множество $Mor(\mathbf{N_m}, \mathbf{N_n})$ -морфизмов объекта $\mathbf{N_m}$ в объект $\mathbf{N_n}$ определяется формулой:

$$Mor(\mathbf{N_m}, \mathbf{N_n}) = \begin{cases} S(m) & m = n, \\ \varnothing & m \neq n \end{cases}.$$

А в классе морфизмов определим сумму по следующей формуле

$$\varphi \oplus \psi = \begin{cases} \varphi_i, & i \in \mathbf{N_m}, \\ \psi_i + m, & i + m \in \{m+1, m+2, ... m+n\} \end{cases}.$$

$MorK(\mathbf{N})$ *также является моноидом.*

Объектами категории $Vekt(\mathbf{R})$ являются $n$ - мерные пространства $\mathbf{R}^n$. А морфизмами объявим невырожденные матрицы. И так для заданных пространств $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ множество морфизмов $Mor(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ определим по следующей формуле

$$Mor(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n) = \begin{cases} GL(m, \mathbf{R}) & m = n, \\ \varnothing & m \neq n \end{cases}.$$

В множестве всех морфизмов - $MorVekt(\mathbf{R})$ введем прямую сумму матриц следующей формулой:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \text{ для всех } A \in GL(m, \mathbf{R}) \text{ и } B \in GL(n, \mathbf{R}).$$

*Множество всех морфизмов* $MorVekt(\mathbf{R})$ *относительно прямой суммы матриц является моноидом.*

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976, 465 с.
2. Кассель К. Квантовые группы. М.: Фазис, 1999, 668 с.
3. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972, 259 с.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972, 289 с.
5. Касимов В.А. Асимптотические представления и порожденные ими категории // Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2002, №2, с. 131-137.
6. Касимов В.А. Асимптотические представления и точечные объекты в категориях // «Riyazi nəzəriyyələr, onların tətbiqi və tədrisi sahəsində olan problemlər» adlı Beynəlxalq Elmi Konfransın materialları, Gəncə, 2008, s.70-73.
7. Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопические инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Мир, 1977, 408 с.

## QRUPPOİDLƏR, ONLARIN HOMOMORFİZMLƏRİ VƏ KATEQORİYALAR

**V.Ə.QASIMOV, L.M.NƏSİBOVA**

**XÜLASƏ**

Məqalədə yeni qruppoidlərə baxılır və onların əsasında kateqoriyalarla yeni əlaqələr öyrənilir. Kateqoriyalarla yanaşma üsulu topologiyada cəbri metodların tətbiqinə imkan yaradır.

## GROUPOIDS, THEIR HOMOMORPHISM AND CATEGORIES

**V.A.GASIMOV, L.M.NASIBOVA**

**SUMMARY**

The article deals with some new groupoids and studies their relations with categories on the samples of these groupoids. Category approach allows to apply algebraic methods in topology.