

УДК 517.927.4

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ
И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ
ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ**

Н.Б.МАМЕДОВА

Бакинский Государственный Университет
ntammadova4@rambler.ru

В данной работе исследуются дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях. С помощью принципа сжатых отображений доказано существование и единственность нелокальной краевой задачи при импульсных воздействиях.

Ключевые слова: нелокальные краевые условия, импульсные воздействия, существование и единственности решения, принцип сжатых отображений.

Часто при математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями длительностью возмущения удобно пренебречь и считать, что эти возмущения носят «мгновенный» характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, как их называют, дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями [1]. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями достаточно подробно изучены [1,2]. Однако последние годы интенсивно исследуются дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях [3-7].

В данной работе также исследуются дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях.

Постановка задачи. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad t \neq t_i, \quad (1)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = C, \quad (2)$$

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T, \quad (3)$$

где $x(t) \in R^n$, $f(t, x)$ - n -мерная непрерывная функция, $A, B \in R^{n \times n}$, $C \in R^{n \times 1}$ - заданные постоянные матрицы, $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, $I_i(x)$ - некоторые заданные функции.

Под решением краевой задачи (1) - (3) будем понимать функцию $x(t) : [0, T] \rightarrow R^n$ - непрерывную на $[0, T]$, $t \neq t_i$ и непрерывную слева при $t = t_i$, для которой существует конечный правый лимит $x(t_i^+)$ при $i = 1, 2, \dots, p$.

Пространство таких функций обозначим $PC([0, T], R^n)$. Очевидно, такое пространство является банаховым с нормой

$$\|x\|_{PC} = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|, \quad (4)$$

где $|\cdot|$ - является нормой в R^n .

Определение 1. Функция $x = x(\cdot)$ является классическим решением краевой задачи (1)-(3), если $x(\cdot) \in PC([0, T], R^n) \cap C^1([0, T] \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_p\}, R^n)$ удовлетворяет равенствам (1) - (3).

Основные результаты. Предположим выполнение следующих условий:

1) Пусть $\det(A + B) \neq 0$.

2) $f : [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$, $I_i : R^n \rightarrow R^n$, $i = 1, 2, \dots, p$ - непрерывные функции и существуют постоянные $M > 0$, $L_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, p$

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K|u - v|, \quad t \in [0, T], \quad u, v \in R^n, \quad (5)$$

$$|I_i(u) - I_i(v)| \leq L_i|u - v|, \quad u, v \in R^n, \quad (6)$$

3) $L = \max \left\{ \|(A + B)^{-1} A\|, \|(A + B)^{-1} B\| \right\} [KT + \sum_{i=1}^p L_i] < 1$.

Теорема 1. Пусть выполняется условие 1). Тогда функция $x(\cdot) \in PC([0, T], R^n)$ является классическим решением краевой задачи (1) - (3) тогда и только тогда, когда

$$x(t) = (A + B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^p M(t, t_i) I_i(x(t_i)), \quad (7)$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} (A+B)^{-1}A, & 0 \leq \tau \leq t \\ -(A+B)^{-1}B, & t \leq \tau \leq T \end{cases}$$

$$M(t, t_i) = \begin{cases} (A+B)^{-1}A, & 0 < t_i \leq t \\ -(A+B)^{-1}B, & t \leq t_i \leq T \end{cases}.$$

Доказательство: Если $x = x(\cdot)$ является решением краевой задачи (1) – (3), то для $t \in (t_j, t_{j+1})$

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s, x(s))ds &= \int_0^t x'(s)ds = \int_0^{t_1} x'(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} x'(s)ds + \dots + \int_{t_j}^t x'(s)ds = \\ &= [x(t_1^-) - x(0^+)] + [x(t_2^-) - x(t_1^+)] + \dots + [x(t^-) - x(t_j^+)] = \\ &= -x(0) - [x(t_1^+) - x(t_1^-)] - [x(t_2^+) - x(t_2^-)] - \dots - [x(t_j^+) - x(t_j^-)] + x(t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0 < t_i < t} \Delta x(t_i), \quad (8)$$

где $x(0)$ - пока произвольная постоянная. Для определения $x(0)$ потребуем, чтобы функция, определяемая равенством (8), удовлетворяла условию (2):

$$(A+B)x_0(0) = C - B \int_0^T f(t, x(t))dt - B \sum_{0 < t_i < T} \Delta x(t_i).$$

Так как $\det(A+B) \neq 0$, то

$$x(0) = (A+B)^{-1}C - (A+B)^{-1}B \int_0^T f(t, x(t))dt - (A+B)^{-1}B \sum_{0 < t_i < T} \Delta x(t_i). \quad (9)$$

Теперь учитываем значение $x(0)$, определяемое равенством (9), в (8).

Тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= (A+B)^{-1}C - (A+B)^{-1}B \int_0^T f(t, x(t))dt - (A+B)^{-1}B \sum_{0 < t_i < T} \Delta x(t_i) + \\ &\quad + \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0 < t_i < t} \Delta x(t_i) = \\ &= (A+B)^{-1}C + (A+B)^{-1}A \int_0^t f(s, x(s))ds - (A+B)^{-1}B \int_t^T f(s, x(s))ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (A+B)^{-1} A \sum_{0 < t_i < t} I_i(x(t_i)) - (A+B)^{-1} B \sum_{t < t_i < T} I_i(x(t_i)) = \\
& = (A+B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^P M(t, t_i) I_i(x(t_i)).
\end{aligned}$$

Таким образом, показали, что краевую задачу (1)-(3) можно переписать в виде интегрального уравнения (7). Можно показать, что решение интегрального уравнения (7) также удовлетворяет краевой задаче (1) – (3).

Определим следующий оператор P по правилу:

$$P: PC([0, T], R^n) \rightarrow PC([0, T], R^n),$$

где

$$(Px)(t) = (A+B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^P M(t, t_i) I_i(x(t_i)). \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1)- 3). Тогда для любого $C \in R^n$ краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение, которое удовлетворяет равенству

$$x(t) = (A+B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) f(\tau, x(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^P M(t, t_i) I_i(x(t_i)) . \quad (11)$$

Доказательство: Пусть $C \in R^n$ фиксировано. Рассмотрим отображение $P: PC([0, T], R^n) \rightarrow PC([0, T], R^n)$, определяемое равенством (10). Тогда для любых $v, w \in PC([0, T], R^n)$ имеем

$$\begin{aligned}
& |(Pv)(t) - (Pw)(t)| \leq \int_0^T |K(t, s)| \cdot |f(s, v(s)) - f(s, w(s))| ds + \\
& + \sum_{i=1}^P |M(t, t_i)| \cdot |I_i(v(t_i)) - I_i(w(t_i))| \leq \\
& \leq \max \left\{ \|(A+B)^{-1} A\|, \|(A+B)^{-1} B\| \right\} \left[K \int_0^T |v(s) - w(s)| ds + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^P L_i \cdot |v(t_i) - w(t_i)| \right] \leq \\
& \leq \max \left\{ \|(A+B)^{-1} A\|, \|(A+B)^{-1} B\| \right\} [KT \|v(\cdot) - w(\cdot)\|_{PC} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{i=1}^p L_i \right) \|v(\cdot) - w(\cdot)\|_{PC} = \\
& = \max \left\{ \|(A+B)^{-1}A\|, \|(A+B)^{-1}B\| \right\} KT + \sum_{i=1}^p L_i \left[\|v(\cdot) - w(\cdot)\|_{PC}, \quad t \in [0, T], \right.
\end{aligned}$$

или

$$\|Pv - Pw\|_{PC} \leq L \|v - w\|_{PC}. \quad (12)$$

Оценка (12) показывает, что оператор P является сжимающим на $PC([0, T], R^n)$. Поэтому согласно принципу сжимающих операторов, оператор P , определяемый равенством (11), имеет единственную неподвижную точку на $PC([0, T], R^n)$. Значит интегральное уравнение (7) или краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 содержит в себе различные частные случаи. Например, если $I_i(x) = 0, i = 0, 1, \dots, p$, то получается система дифференциальных уравнений без импульсных воздействий. Тогда условие (11) превращается в следующее условие:

$$\max \left\{ \|(A+B)^{-1}A\|, \|(A+B)^{-1}B\| \right\} KT < 1,$$

которое является достаточным условием для существования и единственности решения краевой задачи:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(t, x) \\
Ax(0) + Bx(T) &= C.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, Киев: Вища Школа, 1987, 287 с.
2. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific. Singapore, 1989, 434 p.
3. Robert Knapik. Impulsive differential equations with non-local conditions. // Morehead Electronic Journal of Applicable Mathematics. Issue3-MATH. 2002, 03, p.1-6.
4. Selvaraj B., Mallika Arjunan M., Kavitha V. Existence of solutions for impulsive nonlinear differential equations with nonlocal conditions. //J. KSIAM, v.13, №3, 2009, p.203-215.
5. Anguraj A., Mallika Arjunan M. Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations. // Elect. J.Diff. Eqns., 2005, №111, p.1-8.
6. Shaochun Ji, Shu Wen. Nonlocal Cauchy Problem for Impulsive Differential Equations in Banach Spaces. // International Journal of nonlinear Science, 2010, v.10, №1, p.88-95.
7. Li M., Han M. Existence for neutral impulsive functional differential equations with non-local conditions. // Indagationes Mathematicae, 2009, v.20, №3, p.435-451.

QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ İMPULS TƏSİRLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN HƏLLİN VARLIĞI VƏ YEGANƏLİYİ HAQQINDA TEOREM

N.B.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

İşdə qeyri-lokal şərtli impuls təsirli diferensial tənliklər sisteminə baxılmışdır. Sıxılmış inikas prinsipinin köməyilə klassik həllin varlığı və yeganəliyi üçün teorem isbat edilmişdir.

Açar sözlər: qeyri-lokal sərhəd şərtləri, impulsu təsirlər, həllin varlığı və yeganəliyi, sıxılmış inikas prinsipi.

THE THEOREM OF THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTION OF IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NON-LOCAL CONDITIONS

N.B.MAMMADOVA

SUMMARY

In this article, we study the existence and uniqueness of classical solutions for impulsive differential equations with non-local conditions. Applying the principle of contracting mappings, the theorem on existence and uniqueness of solution is proved.

Key words: nonlocal boundary conditions, impulsive impact, existence and uniqueness of the solution, principle of contracting mappings

Поступила в редакцию: 17.01.2011 г.

Подписано к печати: 19.12.2011 г.