УДК 517.54

О РАЗЛОЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯД ПО ОБОБЩЕННЫМ ПОЛИНОМАМ ФАБЕРА В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

М.А.ТАГИЕВА
Бакинский Государственный Университет
mtagiyeva@mail.ru

В работе приведены достаточные условия на функцию и на границу области G, при которых имеет место равномерно сходящееся разложение в ряд по обобщенным полиномам Фабера в замкнутой области $\overline{G}$ функции, обобщенной аналитической (по Векуа) в области G и непрерывной в $\overline{G}$.

Ключевые слова: обобщенные аналитические функции, обобщенные полиномы Фабера, обобщенный оператор Фабера, кривая Альпера.

Пусть G – конечная односвязная область, ограниченная кривой Γ, $D=\overline{C}\setminus\overline{G}$. Пусть $\eta=\Phi(z)$ - функция, отображающая область D конформно и однолистно на область $\{|\eta|>1\}$ при условиях $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$; $z=\psi(\eta)$–обратная к ней функция; Γ–кривая Альпера [1].

Пусть $W(z)$– обобщенная аналитическая функция (о.а.ф.) в области G и непрерывная в $\overline{G}$. Ниже, используя свойства обобщенного оператора Фабера в пространстве голоморфных функций [1], мы получаем представление функции $W(z)$ на границе Γ области G через граничные значения функции $\varphi(t)$, голоморфной в $\{|t|\le 1\}$. Это представление позволяет установить оценки приближения функции $W(z)$ в замкнутой области $\overline{G}$ частичными суммами ряда по обобщенным полиномам Фабера, аналогичные соответствующим известным результатам из теории рядов Тейлора.

Итак, пусть $W(z)$ - о.а.ф. в области G и непрерывная в $\overline{G}$. Тогда при $z\in G$ имеет место представление [2]

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\xi,G)W(\xi)d\xi-\Omega_2(z,\xi,G)\overline{W(\xi)d\xi}. \qquad (1)$$

Введем в рассмотрение интеграл типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{W(\xi)d\xi}{\xi-z} \qquad (2)$$

для $z\in G$. Функция $f(z)$ голоморфна в G и непрерывна в $\overline{G}$ [2]. Через $f_1(z)$ обозначим тот же интеграл типа Коши, но для $z\in D$. Тогда для угловых граничных значений функций $f(z)$ и $f_1(z)$ имеет место формула

$$W(\xi)=f(\xi)-f_1(\xi),\ \ \xi\in\Gamma. \qquad (3)$$

Так как функции $W(\xi)$ и $f(\xi)$ непрерывны на Γ, то из (3) следует, что и $f_1(\xi)$ непрерывна на Γ. Поэтому по интегральной теореме Коши для $z\in G$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\xi,G)f_1(\xi)d\xi-\Omega_2(z,\xi,G)\overline{f_1(\xi)d\xi}=0 \qquad (4)$$

(мы здесь учли, что нормированные относительно области G ядра $\Omega_1(z,\xi,G)$ и $\overline{\Omega_2(z,\xi,G)}$ голоморфны относительно $\xi\in D$ и обращаются в нуль на бесконечности). Подставляя (3) в правую часть (1) и учитывая (4), получаем

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\xi,G)f(\xi)d\xi-\Omega_2(z,\xi,G)\overline{f(\xi)d\xi}. \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь интеграл типа Коши

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|t|=1\}}\frac{f(\psi(t))dt}{t-\eta},\ \ |\eta|<1, \qquad (6)$$

где $f(z)$ определена формулой (2). Функция $\varphi(\eta)$ непрерывна в $\{|\eta|\le 1\}$ [3]. Если обозначить через $\varphi_1(\eta)$ тот же интеграл типа Коши, но при условии $|\eta|>1$, тогда граничные значения функций f, φ и φ_1 связаны формулой

$$f(\psi(t))=\varphi(t)-\varphi_1(t),\ \ |t|=1. \qquad (7)$$

Полагая в (7) $\xi=\psi(t)$, находим

$$f(\xi)=\varphi(\Phi(\xi))-\varphi_1(\Phi(\xi)),\ \ \xi\in\Gamma. \qquad (8)$$

Подставляя значение $f(\xi)$ из (8) в (5), получаем

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\xi,G)\varphi(\Phi(\xi))d\xi-\Omega_2(z,\xi,G)\,\overline{\varphi(\Phi(\xi))d\xi}\,,$$

$$z\in G. \qquad (9)$$

Формула (9) определяет обобщенный оператор Фабера, действующий в пространстве функций, голоморфных в $\{|\eta|<1\}$ и непрерывных в $\{|\eta|\le 1\}$, и преобразующий это пространство в пространство функций, о.а. в области G и непрерывных в $\overline{G}$ [1].

Пусть

$$W_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,\xi,G)\varphi(\Phi(\xi))d\xi-\Omega_2(z,\xi,G)\,\overline{\varphi(\Phi(\xi))d\xi}\,,$$

$$z\in D. \qquad (10)$$

Для угловых граничных значений функций $W(z)$ и $W_1(z)$ справедливо равенство

$$W(\xi)=\varphi(\Phi(\xi))+W_1(\xi),\ \xi\in\Gamma. \qquad (11)$$

Сделаем замену переменных в интеграле (10) по формулам $z=\psi(\eta)$, $\xi=\psi(t)$. После несложных преобразований (10) приводится к виду [1]

$$W_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|t|=1\}}F_1(\eta,t)\varphi(t)dt-F_2(\eta,t)\,\overline{\varphi(t)dt}\,, \qquad (12)$$

где $F_1(\eta,t)=\Omega_1(\psi(\eta),\psi(t),U)\psi'(t)-\dfrac{1}{t-z}$,

$$F_2(\eta,t)=\Omega_2(\psi(\eta),\psi(t),U)\overline{\psi'(t)},\quad U=\{|t|<1\}.$$

Подставляя (12) в (11), получаем

$$W(\psi(\eta))=\varphi(\eta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|t|=1\}}F_1(\eta,t)\varphi(t)dt-F_2(\eta,t)\,\overline{\varphi(t)dt}\,,$$

$$z=\psi(\eta),\ |\eta|=1. \qquad (13)$$

Аналогично получается представление обобщенных полиномов Фабера [4]:

$$\Phi_{2k}(\psi(\eta)) = \eta^k + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|t|=1\}} F_1(\eta,t)t^k dt - F_2(\eta,t)\,\overline{t^k dt}\ ,$$
$$\Phi_{2k+1}(\psi(\eta)) = i\eta^k + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|t|=1\}} F_1(\eta,t)it^k dt - F_2(\eta,t)\,\overline{it^k dt}\ . \tag{14}$$

Определим коэффициенты Фабера функции $W(z)$ по формулам

$$a_k = c_{2k} + ic_{2k+1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{W(\xi)\Phi'(\xi)d\xi}{\Phi^{k+1}(\xi)},\ k = 0,1,2,\ldots. \tag{15}$$

Интеграл в правой части (15) существует в силу гладкости кривой Γ. Полагая $\xi = \psi(t)$, правую часть (15) представим в виде

$$a_k = c_{2k} + ic_{2k+1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|t|=1\}}\frac{W(\psi(t))dt}{t^{k+1}}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь разность

$$W(\xi) - \sum_{k=0}^{n} c_{2k}\Phi_{2k}(\xi,G) + c_{2k+1}\Phi_{2k+1}(\xi,G) \tag{17}$$

для $\xi \in \Gamma$. Используя формулы (13),(14) и (16), преобразуем её следующим образом:

$$W(\xi) - \sum_{k=0}^{n} c_{2k}\Phi_{2k}(\psi(\eta),U) + c_{2k+1}\Phi_{2k+1}(\psi(\eta),U) = \varphi(\eta) - \sum_{k=0}^{n} a_k\eta^k +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|t|=1\}}\left(\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)F_1(\eta,t)dt - F_2(\eta,t)\overline{\left(\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)dt}\ . \tag{18}$$

Положим в формуле (3) $\xi = \psi(t)$, тогда

$$W(\psi(\eta)) = f(\psi(\eta)) - f_1(\psi(\eta)). \tag{19}$$

Подставляя (19) в правую часть (16) и учитывая (7), находим

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|t|=1\}}\frac{f(\psi(t))}{t^{k+1}}dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|t|=1\}}\frac{\varphi(t)dt}{t^{k+1}}, \tag{20}$$

т.е. коэффициенты Фабера $a_k = c_{2k} + ic_{2k+1}$ функции $W(z)$ относительно области G являются в то же время коэффициентами Тейлора функции $\varphi(\eta)$, определенной формулой (6).

Формула (18) позволяет переносить на ряды по обобщенным полиномам Фабера для области G многие результаты о скорости сходимости рядов Тейлора. Справедлива следующая

Теорема 1. Если $W(z)$ является о.а.ф. в области G и непрерывной в $\overline{G}$, а кривая Γ является кривой Альпера, то существует постоянная с такая, что выполняется неравенство

$$\left| W(\xi) - \sum_{k=0}^{n} c_{2k}\Phi_{2k}(z,G) + c_{2k+1}\Phi_{2k+1}(z,G) \right| < c\omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\ln n, \quad (21)$$

где $\omega(\delta, f)$ –модуль непрерывности функции f, определенной формулой (2), в замкнутой области $\overline{G}$.

Доказательство. Для рядов Тейлора в случае единичного круга известна оценка [3]

$$\left| \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \right| \le c\omega\left(\frac{1}{n}, \varphi\right)\ln n, \ |t| \le 1, \ n \ge 2, \quad (22)$$

где $\omega(\delta,\varphi)$ –модуль непрерывности функции $\varphi(t)$ в замкнутом круге $\{|t| \le 1\}$. Для модулей непрерывности $\omega(\delta,\varphi)$ и $\omega(\delta, f)$ справедливо неравенство [3]

$$\omega(\delta,\varphi) \le c\omega(\delta, f). \quad (23)$$

Оценивая разность в левой части равенства (18), с помощью неравенства (22) находим неравенство (21). Теорема доказана.

Теорема 2. Если граница Γ области $\overline{G}$ является кривой Альпера, а модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ функции f в замкнутой области $\overline{G}$ удовлетворяет условию Дини

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}, f\right)\ln n = 0, \quad (24)$$

то функция $W(z)$, о.а. в G и непрерывная в $\overline{G}$, разлагается в ряд по обобщенным полиномам Фабера

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\Phi_{2k}(z,G) + c_{2k+1}\Phi_{2k+1}(z,G), \ \ z \in \overline{G}, \quad (25)$$

сходящийся равномерно в замкнутой области $\overline{G}$.

Доказательство. Из условия (24) в силу неравенства (23) следует аналогичное условие для модуля непрерывности $\omega(\delta,\varphi)$ функции $\varphi(\eta)$ в замкнутом круге $\{|\eta| \le 1\}$. Поэтому ряд Тейлора функции $\varphi(\eta)$ сходится равномерно в замкнутом круге $\{|\eta| \le 1\}$ [3]. Следовательно, из формулы (18) следует разложение (25). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тагиева М.А. Обобщенный оператор Фабера в пространстве голоморфных функций//Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2010, №4, с.58-64.
2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988, 512 с.
3. Суетин П.К.Ряды по многочленам Фабера. М.: Наука, 1984, 336 с.
4. Тагиева М.А.О сходимости рядов по обобщенным полиномам Фабера// Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2008, №3, 34-37.

ÜMUMİLƏŞMİŞ ANALİTİK FUNKSİYALARIN QAPALI OBLAST DAXİLİNDƏ ÜMUMİLƏŞMİŞ FABER POLİNOMLARINA NƏZƏRƏN SIRA ŞƏKLİNDƏ GÖSTƏRİLİŞİ

M.A.TAĞIYEVA

XÜLASƏ

Bu məqalədə G oblastında ümumiləşmiş analitik (ü.a.) $\omega(z)$ funksiyasının həmin oblastda ümumiləşmiş Faber polinomlarına nəzərən sıraya ayrılışı üçün kafi şərtlər verilmişdir.

Açar sözləri: ümumiləşmiş analitik funksiyaları, ümumiləşmiş Faber polinomları, ümumiləşmiş Faber operatoru, Alper əyrisi.

ON UNİFORM CONVERGENCE OF A SERIES BY FABER'S GENERALIZED POLYNOMIALS TO A GENERALIZED ANALYTICAL FUNCTION IN CLOSED DOMAIN

M.A.TAGIYEVA

SUMMARY

Some sufficient conditions for the domain of boundary and the behavior of the function on the boundary, at which any generalized analytical function is expanded in a series by Faber's generalized polynomials uniformly converging in a closed domain, are obtained.

Key words: generalized analytical functions, Faber's generalized polynomials, Faber's generalized operator, Alper's curve.

Поступила в редакцию: 18.02.2011 г.
Подписано к печати: 19.12.2011 г.