УДК 517.977.1/.5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ К НЕГЛАДКИМ ЗАДАЧАМ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

М.Г.ИМАНОВ
Бакинский Государственный Университет
imanovmurad@mail.ru

В статье с помощью метода подобных решений для задачи быстродействия с фазовыми ограничениями результаты, полученные ранее автором в гладком случае распространяются на негладкий случай.

Ключевые слова: оптимальное управление, фазовое ограничение, принцип максимума, подобные решения, регулярные решения.

Для классических задач оптимального управления с фазовыми ограничениями необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина были получены впервые Р.В.Гамкрелидзе в работах [1], [2] в случае, когда оптимальная траектория имеет конечное число точек выхода на фазовую границу.

В наиболее общей постановке принцип максимума для таких задач был доказан А.Я.Дубовицким и А.А.Милютиным [3]. После этого к этому вопросу были посвящены многочисленные работы. Отметим здесь лишь некоторые из них [5,6,8-17].

Как известно, в подобных задачах необходимые условия содержат сопряженную функцию с ограниченным изменением, которая имеет сложную связь с оптимальной траекторией, что намного усложняет применение этих результатов к конкретным случаям.

Поэтому возникают вопросы: существуют ли в таких задачах оптимальные траектории, для которых сопряженная функция является абсолютно непрерывной функцией, в случае положительного ответа как их найти?

Исследование результатов и приведенных многочисленных примеров работ [4],[5],[6] во многом помогли в деле появления метода подобных решений, предложенный автором [15], [16], [17] с помощью которого удается получать принцип максимума Понтрягина в таком виде, который помогает выделить регулярные оптимальные траектории и для негладких задач оптимального управления с фазовыми ограничениями.

Суть метода подобных решений заключается в следующем: наряду с исходной задачей оптимального управления с фазовым ограничением рассматривается вспомогательная задача без фазового ограничения и некоторыми измененными граничными условиями, с той целью, чтобы оптимальное значение критерия качества в этой задаче совпало с оптимальным значением критерии качества в исходной задаче с фазовым ограничением. Именно, вспомогательная задача получается от исходной исключением фазового ограничения и введением новых граничных условий.

Например, для задач быстродействия сказанное означает, что время быстродействия одно и то же для обеих задач. По этой причине мы вынуждены дать возможность изменения в начальных и конечных условий. Так же отметим, что в этом процессе одна из этих точек (начальная или конечная) может оставаться без изменения.

Между первоначальной и вспомогательной рассматривается промежуточная задача оптимального управления, которая получается из исходной задачи «урезанием» правой части касательным конусом к множеству X вдоль оптимальной траектории $\bar{x}(t) \in X$, т.е. в промежуточной задаче вместо U рассматривается подмножество

$$U(\bar{x}(t)) = \{u \in U : f(\bar{x}(t), u) \in T(X, \bar{x}(t)), \quad \text{п.в.} \ \ t \in [0,T]\},$$

где $T(X, \bar{x}(t))$ есть касательный конус (в определенном в работе смысле) к X в точке $\bar{x}(t)$ и $f(\bar{x}(t), U)$ есть правая часть в точке $\bar{x}(t), t \in [0,T]$, дифференциального включения в исходной задаче.

Другими словами, промежуточная задача отличается от исходной лишь с множеством скоростей правой части. Остальные данные, в том числе и фазовые ограничения, остаются без изменения.

Нетрудно убедиться в том, что решение $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [0,T]$, исходной задачи есть и решение промежуточной задачи, следовательно, необходимое условие оптимальности этого решения в этой задаче будет и необходимым условием для исходной задачи.

Ставятся некоторые условия в виде включения между касательными конусами (условие существования подобного решения) связанными с решениями в промежуточной и вспомогательной задачах, в случае выполнения которых имеем возможность относить пункты принципа максимума Понтрягина для вспомогательной задачи (существование абсолютно непрерывной нетривиальной функции, сопряженная система уравнений, условие максимума и т.д.) к решению промежуточной, в тоже время и к исходной задаче с фазовыми ограничениями.

Такова в общих чертах суть метода подобных решений.

Более точное изложение метода можно будет найти при детальном ознакомлении с данной работой.

Дополнительно к сказанным отметим, что применение этого метода приводит к выделению оптимальных траекторий исходной задачи, для которых сопряженная функция является и абсолютно непрерывной и нетривиальной, что играет тоже немаловажную роль в подобных задачах оптимального управления, при этом сопряженная система является однородной, хотя в задаче присутствует активное фазовое ограничение.

Проверка поставленных условий и доказательство утверждений отличаются доступностью и простатой изложения.

Аналогичному вопросу о структуре меры, фигурирующей в соотношениях принципа максимума, для классической задачи оптимального управления рассматривался В.В.Хагером [9], К.Малановским [10], Х.Маурером [11], А.А.Милютиным [12], для дифференциальных включений С.М.Асеевым [13]. В работах [9-12] достаточные условия отсутствия сингулярной составляющей получены при условии, что на рассматриваемом интервале времени оптимальное управление принимает значения строго во внутренности множества U и непрерывно.

В работе [13] эти достаточные условия получены при условии, что множество допустимых скоростей строго выпукло и гамильтониан системы удовлетворяет некоторым условиям гладкости.

Эти и полученные в данной работе результаты трудно сравнивать: все они доказаны при разных предположениях и имеют разные условия. Видимо, вопросу сравнения этих результатов нужно посвящать отдельное исследование.

Необходимые понятия негладкого анализа

Пусть A-непустое замкнутое подмножество из E^n. Обозначим через $H(A,\psi)=\sup\{(x,\psi):x\in A\}$ опорную функцию множества A в направлении вектора $\psi\in E^n$. Контингентным конусом к множеству A в точке $x\in A$ называется множество:

$$K(A,x)=\{v\in E^n:\exists v_i\to v,\exists\alpha_i\to+0:x+\alpha_i v_i\in A,\ i\to\infty\}.$$

Касательным конусом к множеству A в точке $x\in A$ называется множество

$$T(A,x)=\{v\in E^n:\forall x_i\overset{A}{\to}x,\ \forall\alpha_i\to+0:\exists v_i\to v:x_i+\alpha_i v_i\in A,\ i\to\infty\}.$$

Нормальный конус Кларка к множеству A в точке $x\in A$ определяется равенством

$$N(A,x)=\{u\in E^n:(u,v)\le 0\quad\forall v\in T(A,x)\}.$$

Пусть f - локально липшицевая функция на E^n. Обозначим через

$$\partial f(x) = \{y \in E^n : (y,-1) \in N(epif, (x, f(x)))\}$$

субдифференциал Кларка функции f в точке x, здесь $epif = \{(x,y) : y \geq f(x)\}$ - надграфик функции f.

Постановка задачи и основной результат

Основным объектом исследования в настоящей работе является следующая задача оптимального управления с фазовым ограничением

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = f(t,x,u),\ t \in [0,T],\\
&x(0) \in C_0,\quad x(T) \in C_1,\\
&u \in U(t),\qquad п.в.\ t \in [0,T],\\
&x(t) \in X,\quad t \in [0,T],\\
&T \to \min,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $f : [0,T] \times E^n \times E^m \to E^n$, и X некоторое непустое регулярное замкнутое подмножество пространства E^n. C_0, C_1 – некоторые компактные подмножества в E^n.

Предполагаем, что для каждого $x \in E^n$ функция $f(t,x,u)$ измерима по t и u.

Существует измеримая вещественнозначная функция $k(t,u)$, для которой функция $f(t, x, y)$ удовлетворяет условию Липщица по x с независимой от x функцией $k(t,u)$. φ – локально липщицевая функция. $U(t)$ компактнозначное многозначное отображение, которое является измеримым и удовлетворяющим оценке $|U(t)| \leq k(t)$, где $k(t)$-некоторая неотрицательная скалярная функция, интегрируемая по Лебегу на любом конечном отрезке времени $[0,T]$.

Функцию $u(t) \in U(t)$, $t \in [0,T]$, назовем допустимым управлением на отрезке $[0,T]$, если она измерима и соответствующее решение $x(t)$, $t \in [0,T]$, заданной системы уравнений удовлетворяет начальному условию $x(0) \in C_0$ и включению $x(t) \in X$, $t \in [0,T]$.

Задача заключается в нахождении допустимого управления $u(t)$, $t \in [0,T]$, которое приводит систему из начального положения C_0 в конечное положение C_1 за минимальное время, при этом траектория не выходит за пределы множества X в течении всего процесса.

Работа посвящена выводу принципа максимума, для которого оптимальное решение регулярно. Оптимальное решение назовем регулярным, если соответствующая сопряженная функция $\psi(t)$, $t \in [0,T]$ является нетривиальной абсолютно непрерывной функцией.

Пусть $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [0, \bar{T}]$, является решением задачи (1), $\bar{T}$ есть время быстродействия, $U(\bar{x}(t), t) \subset U(t)$ является подмножеством, которое определяется следующим образом

$$U(\bar{x}(t), t) = \{u \in U(t) : f(t, \bar{x}(t), u) \in T(X, \bar{x}(t)) \ \text{п.в. } t \in [0, \bar{T}]\},$$

здесь $T(X, \bar{x}(t))$ является касательным конусом к X в точке $\bar{x}(t)$ для каждого фиксированного $t \in [0, \bar{T}]$.

Непустоту этого подмножества будем доказывать ниже.

Рассмотрим соответствующую задачу без фазового ограничения

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t, x, u), \\ &u \in U(t), \quad \text{п.в. } \ t \in [0, T], \\ &x(0) \in \hat{C}_0, \quad x(T) \in \hat{C}_1 \\ &T \to \min. \end{aligned} \tag{2}$$

Определение. *Если существуют компактные подмножества* $\hat{C}_0, \hat{C}_1$ *и соответствующее решение* $(x_0(t), u_0(t))$, $t \in [0, \bar{T}]$, *задачи (2), для которого выполняются включения*

$$T(f(\bar{x}(t), U(\bar{x}(t), t), \dot{\bar{x}}(t)) \subset T(f(x_0(t), U(t), t), \dot{x}_0(t)), \qquad \text{п.в. } \ t \in [0, \bar{T}],$$

$$T(C_0 \cap X, \bar{x}(0)) \subset T(\hat{C}_0, x_0(0)), \ T(C_1 \cap X, \bar{x}(\bar{T})) \subset T(\hat{C}_1, x_0(\bar{T})),$$

то $(x_0(t), u_0(t))$, $t \in [0, \bar{T}]$ *называется подобным к решению* $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [0, \bar{T}]$ *задачи (1).*

Сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема. *Пусть существует подобное к* $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [0, \bar{T}]$ *решение* $(x_0(t), u_0(t))$, $t \in [0, \bar{T}]$, *задачи (2). Тогда существует ненулевое абсолютно непрерывное решение сопряженного дифференциального включения*

$$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x f(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) \qquad \text{п.в.} \qquad t \in [0, \bar{T}],$$

для которого выполняются:

1. *условие максимума*

$$\max\{(f(t, \bar{x}(t), u), \psi(t)), \quad u \in U(\bar{x}(t), t)\} = (\dot{\bar{x}}(t), \psi(t)) \quad \text{п.в. } t \in [0, \bar{T}];$$

2. *условия трансверсальности*

$$\psi(0) \in N(C_0 \cap X, \bar{x}(0)), \qquad -\psi(\bar{T}) \in N(C_1 \cap X, \bar{x}(\bar{T}));$$

3. *если выполняется дополнительное включение*

$$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x f(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) \cap \partial_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\psi(t) \qquad \text{п.в.} \qquad t \in [0, \bar{T}],$$

то сопряженное дифференциальное включение будет иметь вид

$$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))\psi(t) \qquad \text{п.в.} \qquad t \in [0, \bar{T}]$$

с теми же условиями трансверсальности.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $x(t)$, $t \in [0,T]$ *абсолютно непрерывная функция, для которой* $x(t) \in X$, $\forall t \in [0,T]$, *где* X *-некоторое регулярное замкнутое подмножество. Тогда выполняется включение*

$$\dot{x}(t) \in T(X, x(t)) \quad \text{п.в.} \ \ t \in [0,T].$$

Доказательство. Допустим, что в точке $\tau \in (0,T)$ существует производная $\dot{x}(\tau)$. По определению

$$\dot{x}(\tau) = \lim_{t \to \tau} \frac{x(t) - x(\tau)}{t - \tau}.$$

Пусть $t_i > \tau, \quad t_i \to \tau$. Если обозначить

$v_i = \dfrac{x(t_i) - x(\tau)}{t_i - \tau}$ и $\alpha_i = t_i - \tau$, то выполняется включение

$$x(\tau) + \alpha_i \cdot v_i = x(\tau) + (t_i - \tau)\frac{x(t_i) - x(\tau)}{t_i - \tau} = x(\tau) + x(t_i) - x(\tau) = x(t_i) \in X,$$

иными словами $\dot{x}(\tau) \in K(X, x(\tau))$. Из-за регулярности множества X касательный конус совпадает с контингентным конусом, т.е. $T(X,x(\tau))=K(X,x(\tau))$ и, следовательно, $\dot{x}(\tau) \in T(X, \dot{x}(\tau))$.

В концевых точках 0 и T рассматривая правый и левый пределы, соответственно, можно завершить доказательство леммы.

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Так как $(x_0(t),u_0(t)), t \in [0,\overline{T}]$ является решением задачи (2), где отсутствует фазовое ограничение, то, в силу принципа максимума Понтрягина, существует нетривиальная абсолютно непрерывная сопряженная функция $\psi(t)$, $t \in [0,\overline{T}]$, как решение сопряженного дифференциального включения

$$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x f(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) \quad \text{п.в.} \quad t \in [0,\overline{T}],$$

для которого выполняются:

1. условие максимума
$$\max\{(f(t,x_0(t),u),\psi(t)), u \in U(t)\} = (\dot{x}_0(t),\psi(t)) \quad \text{п.в.} \ t \in [0,\overline{T}];$$
2. условия трансверсальности
$$\psi(0) \in N(\hat{C}_0, x_0(0)), \qquad -\psi(\overline{T}) \in N(\hat{C}_1, x_0(\overline{T})).$$

Условие максимума означает, что

$$\psi(t) \in N(f(t, x_0(t), U(t)), \dot{x}_0(t)) \quad \text{п.в.} \ \ t \in [0,\overline{T}], \tag{3}$$

т.е. $\psi((t)$ является абсолютно непрерывной, нетривиальной ветвью многозначного отображения $N(f(t,x_0(t),U(t)),\dot{x}_0(t))$. В силу условия теоремы выполняются включения

$T(f(t,\bar{x}(t),U(\bar{x}(t),t)),\dot{\bar{x}}(t)) \subset T(f(t,x_0(t),U(t)),\dot{x}_0(t))$ *п.в.* $t \in [0,\bar{T}]$,

$T(C_0 \cap X,\bar{x}(0)) \subset T(\hat{C}_0,x_0(0)),\ T(C_1 \cap X,\ \bar{x}(\bar{T})) \subset T(\hat{C}_1,x_0(\bar{T}))$,

из которых следуют включения

$$N(f(t,x_0(t),U(t)),\dot{x}_0(t)),\dot{x}_0(t)) \subset N(f(t,\bar{x}(t),U(\bar{x}(t),t)),\dot{x}(t))$$

п.в. $t \in [0,\bar{T}]$,

$N(\hat{C}_0,x_0(0)) \subset N(C_0 \cap X,\bar{x}(0)),\ N(\hat{C}_1,x_0(\bar{T})) \in N(C_1 \cap X,\bar{x}(\bar{T}))$.

По этой причине абсолютно непрерывная нетривиальная однозначная ветвь $\psi(t)$ многозначного отображения $N(f(t,x_0(t),U(t)),\dot{x}_0(t))$ является однозначной ветвью и многозначного отображения $N(f(t,\bar{x}(t),U(\bar{x}(t),t)),\dot{\bar{x}}(t))$, т.е.

$$\psi(t) \in N(f(t,\bar{x}(t),U(\bar{x}(t),t)),\dot{\bar{x}}(t)) \quad \textit{п.в.}\ \ t \in [0,\bar{T}]$$

с условиями $\psi(0) \in N(C_0 \cap X,\bar{x}(0)),\ -\psi(\bar{T}) \in N(C_1 \cap X,\bar{x}(\bar{T}))$.

Последние включения означают, что

$$\max\{(f(t,\bar{x}(t),u),\psi(t)),\ \ u \in U(\bar{x}(t),t)\} = (\dot{\bar{x}}(t),\psi(t)) \qquad \textit{п.в.}\ \ t \in [0,\bar{T}]$$

и

$$\psi(0) \in N(C_0 \cap X,\bar{x}(0)), \quad -\psi(T) \in N(C_1 \cap X,\bar{x}(\bar{T})).$$

В случае выполнения дополнительного включения нетрудно показать, что сопряженное дифференциальное включение имеет вид

$$-\dot{\psi}(t) \in \partial_x f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))\psi(t) \qquad \textit{п.в.} \qquad t \in [0,T],$$

с теми же условиями трансверсальности.

Таким образом, теорема доказана.

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_2, \end{cases} \qquad U = \left\{(u_1,u_2) \in E^2: \quad u_1 = 0, \quad |u_2| \le 1\right\},$$

$x(0) \in C_0,\ x(T) \in C_1,\quad x_2 \le 1{,}2$,

где

$C_0 = \{(x_1,x_2) \in E^2:\ x_1 = -1,\ |x_2| \le 1\}$,

$C_1 = \left\{(x_1,x_2) \in E^2:\ 1 \le x_1 \le 2,\ x_2 = 0\right\}$,

$T \to \min$.

Решение. Как видно из системы дифференциальных уравнений, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда сопряженная система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

Опорные функции множеств U, C_0, C_1 вычисляются непосредственно. Мы имеем:

$$H(U,\psi) = |\psi_2|, \qquad H(C_0,\psi) = -\psi_1 + |\psi_2|, \quad H(C_1,\psi) = \frac{3}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}|\psi_1|.$$

Если оптимальная траектория находится на границе фазового ограничения на некотором отрезке времени $I \subset [0,T]$, т.е. $\bar{x}_2(t) = 1{,}2, \quad t \in I$, то $\dot{\bar{x}}_2(t) = 0, \quad t \in I$, то $\bar{u}_2(t) = 0$. Соответственно,

$$U(\bar{x}(t)) = U \cap T(X, \bar{x}(t)) = \{(u_1, u_2) \in U : \ u_1 = 0, \ -1 \le u_2 \le 0\}$$

и

$$H(U(\bar{x}(t)),\psi) = \frac{1}{2}|\psi_2| - \frac{1}{2}\psi_2.$$

Данный пример при отсутствии фазового ограничения полностью решен в книге В.И. Благодатских [7] и соответствующее оптимальное решение имеет вид: τ есть момент переключения. Тогда $x(\tau) = \left(-\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ и $x(0) = (-1{,}1)$. Движение начинается с управлением $u_2 = +1$ по параболе $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}$ до точки $x(\tau)$, затем с управлением $u_2(t) = -1$ по параболе $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + 1$ или $x_1(t) = \frac{1}{2}(t+1)^2 - \frac{3}{2}, \quad x_2(t) = t+1, \ t \in [0,\tau]$, где $\tau = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$ и

$$x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + \left(2\sqrt{\frac{2}{5}} - 1\right)t - 4\frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{5}{2}}, \ x_2(t) = -t + 2\sqrt{\frac{5}{2}} - 1, \ t \in \left[\tau, 2\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right].$$

Время быстродействия $\bar{T} = 2\sqrt{\frac{5}{2}} - 1$.

Теперь учитываем фазовое ограничение $x_2 \le 1{,}2$. Рассмотрим управление: $u = +1$ до выхода траектории на фазовое ограничение, затем $u(t) = 0$ при движении по границе фазового ограничения, после чего переключение на управление $u(t) = -1$ до попадания в конечную точку (1,0). Найдены соответствующие моменты переключения: точкой пересечения параболы $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}$ с прямой $x_2 = 1{,}2$ является $x_1 = -\frac{39}{50}$, т.е. $x(\tau_1) = \left(-\frac{39}{50}, \ 1{,}2\right)$,

$\tau_1 = 0{,}2,$ так как $x_2(t) = t + 1,\ t \in [0, \tau_1].$

Чтобы найти момент схода τ_2 с границы найдем точку пересечения прямой $x_2 = 1{,}2$ и параболы $x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2^2 + 1$. Точкой пересечения будет $(x_1(\tau_2), x_2(\tau_2)) = (0{,}28;\ 1{,}2)$. $u_2(t) = 0$ на отрезке $(\tau_1, \tau_2]$, тогда $\dot{x}_1 = 1{,}2,\ t \in [\tau_1, \tau_2]$. Следовательно $\tau_2 = \dfrac{13}{12}$. Время движения по границе будет $\tau_2 - \tau_1 = \dfrac{53}{60}$.

При $u = -1,\ t \in (\tau_2, T]$ имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -1, \end{cases} \qquad t \in [\tau_2, T].$$

$$(x_1(\tau_2), x_2(\tau_2)) = (0{,}28,\ 1{,}2) \Rightarrow x_2(t) = -t + c \Rightarrow x_2(\tau_2) = 1{,}2 = -\frac{13}{12} + c \Rightarrow c = 1{,}2 + \frac{13}{12} = \frac{27{,}4}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = -t + \frac{137}{60} \Rightarrow T - \frac{137}{60} = 0 \Rightarrow T = \frac{137}{60} = 2\frac{17}{60} \approx 2{,}283\ldots$$ *Случай фазового ограничения*

$T = 2{,}1622776$ (случай без фазового ограничения).

Момент выхода на границу $\tau_1 = 0{,}2$, а сход с границы $\tau_2 = \dfrac{13}{12}$. Соответствующие графики управлений и траекторий приведены на рисунках 1 и 2.

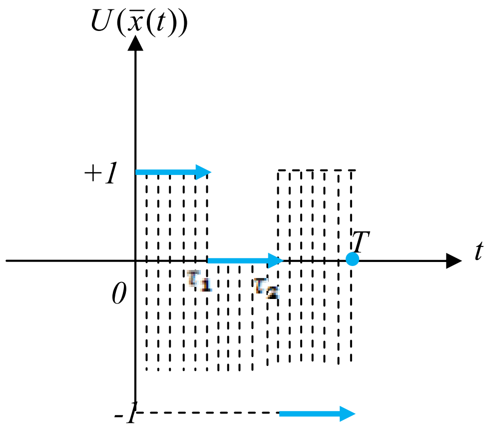

Рис. 1.

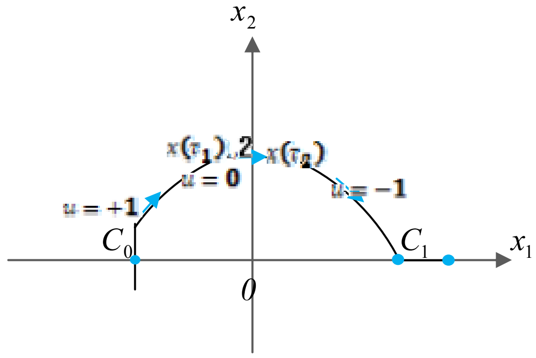

Рис.2.

Соответствующей сопряженной функцией $\psi(t),\ t \in [0, T]$ будет

$$\begin{cases} \psi_1(t) = 1, \\ \psi_2(t) = \dfrac{13}{12} - t, \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{137}{60}\right],$$

которая является нетривиальной и абсолютно непрерывной функцией, для которой выполняется условие максимума (Рис.3):

$$H(U(\bar{x}(t)),\quad \psi(t)) = (\bar{u}(t),\psi(t)) \qquad п.в.\ t \in \left[0,\frac{137}{60}\right].$$

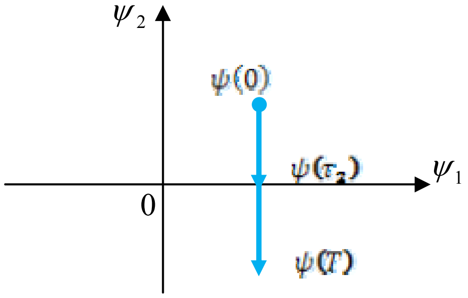

Рис.3.

Из вида сопряженной функции ясно, что

$$(\psi_1(0),\psi_2(0)) = \left(1,\ \frac{13}{12}\right) \quad и \quad (\psi_1(T),\psi_2(T)) = \left(1,\ -\frac{6}{5}\right).$$

В силу формул для опорных функций $H(C_0,\psi), H(C_1,\psi)$ выполнение условий трансверсальности проверяется непосредственно.

При применении теоремы подобное решение существует. Для этого достаточно в качестве начального множества взять $\hat{C}_0 = C_0$, а конечного множества взять $\hat{C}_1$, которое изображено на рисунке 4:

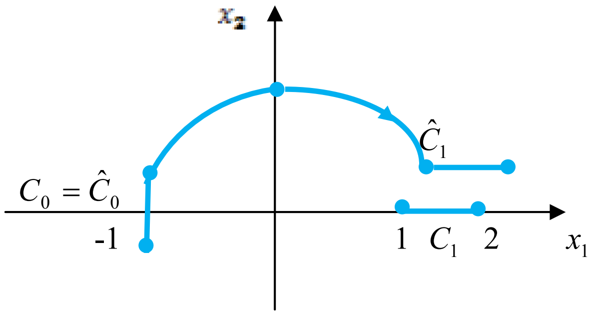

Рис. 4.

Заключение

Как известно, в подобных задачах существуют разные виды сопряженных дифференциальных включений. В данной работе мы использовали максимально простой вид этих необходимых условий, с той целью, чтобы более наглядно передать основную суть метода подобных решений и полученных результатов относительно регулярности решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983, 392 с.
2. Гамкрелидзе Р.В. Оптимальные по быстродействию процессы при ограниченных фазовых координатах // Докл. АН СССР, 1959, т.125, №3, с.475-478.
3. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т.5, №3, с.395-453.
4. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. М., 1985, е. 169, с.194-252.
5. Куржанский А.Б., Осипов Ю.С.К задачам об управлении при стесненных координатах. ПММ, 1969, т. 33, с.705-719.
6. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977, 392 с.
7. Благодатских В.И. Линейная теория оптимального управления. М.: Моск. Ун-т, 1978, 94 с.
8. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988, 280 с.
9. Hager W.W., Mitter S.K.. Lagrange duality theory for convex control problems. I. Control and Optimization. 1976, v. 14, № 5, p.843-856.
10. Malanowski K., On regularity of solutions to optimal control problems for systems with control appearing linearly. Arch. Autom. i Telemech. 23, 1978, p.227 -242.
11. Maurer H. On the minimum principle for optimal control problems with state constraints: Schriftenreihe des Rechenzentrums der Univ. Münster, Münster, 1979, №41, p.32-39.
12. Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А. Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990, 350 с.
13. Асеев С.М. К теории необходимых условий оптимальности для задач с фазовыми ограничениями. Труды МИАН им. В.А.Стеклова. 1998, т. 220, с.35-44.
14. Арутюнов А.В., Асеев С.М., Благодатских В.И. Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями \\ Математический сборник. 1993, т. 184, № 6, с.3-32.
15. Иманов М.Г. Метод подобных решений в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Докл. НАН Азерб., 2010, L. XVII, №5, с.10-18.
16. Иманов М.Г. Метод подобных решений в задачах быстродействия с фазовыми ограничениями. Тр. ИСА РАН. 2010, т.53(2), в. 14, с. 208-216.
17. Imanov M.H. Application of the Method of similar solutions in the time optimal control problems with State Constraints. Appl. Comput. Math., 2011, v.10, № 3, p.463-471.

OXŞAR HƏLLƏR METODUNUN QEYRİ-HAMAR FAZA MƏHDUDİYYƏTLİ ƏN TEZ TƏSİR MƏSƏLƏLƏRİNƏ TƏTBİQİ

M.H.İMANOV

XÜLASƏ

Məqalədə müəllif tərəfindən oxşar həllər metodu vasitəsilə faza məhdudiyyətli ən tez təsir məsələləri üçün alınmış nəticələr qeyri-hamar hala ümumiləşdirilir.

Açar sözlər: Optimal idarə, faza məhdudiyyətli, maksimum prinsipi, oxşar həllər, requlyar həllər.

APPLICATION OF THE METHOD OF SIMILAR SOLUTION TO THE NONSMOOTH PROBLEMS WITH STATE CONSTRAINTS

M.H.IMANOV

SUMMARY

In the paper, the results obtained by the similar solutions method for the time optimal control problems are extended for the nonsmooth cases.

Keywords: Optimal control, state constraints, maximum principle, similar solutions, regular solutions.

Поступила в редакцию: 10.03.2011 г.
Подписано к печати: 19.12.2011 г.