

УДК 517.95

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА И ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ

Э.А.ГАСЫМОВ

Бакинский Государственный Университет
gasymov-elmagha@rambler.ru

В работе исследуется краевая задача для некоторых обыкновенных линейных дифференциальных систем, зависящих от комплексного параметра. При определённых условиях для произвольно кусочно абсолютно-непрерывных вектор-функции через матрицы Грина рассматриваемой задачи установлена формула обращения.

Ключевые слова: параметрическая задача, фундаментальная матрица, формула обращения.

Применение метода конечного интегрального преобразования [3] к решению смешанных задач для дифференциальных уравнений в частных производных приводит к решению задачи вида (1)-(2), зависящая от комплексного параметра λ .

Результаты, полученные в рассматриваемой работе, успешно используется автором (см. напр. [4-12]) при решении смешанных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Постановка задачи. Найти решение системы

$$L_i(\lambda^{q_i}, x, y_i) = \psi_i(x), \quad x \in (a_i, b_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\sum_{i=1}^n U_{i,s}(\lambda^{q_i}, y_i) = \gamma_s, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где

$$L_i(\lambda^{q_i}, x, y_i) \equiv \sum_{j=0}^{2p_i} A_{i,j}(x) \frac{d^j}{dx^j} y_i - (\lambda^{q_i})^{2p_i} y_i, \quad (1_1)$$

$$U_{i,s}(\lambda^{q_i}, y_i) \equiv \sum_{j=1}^2 U_{i,s}^{(j)}(\lambda^{q_i}, y_i),$$

$$U_{i,s}^{(1)}(\lambda^{q_i}, y_i) \equiv \sum_{j=0}^l \sum_{m=0}^q (\lambda^{q_i})^{j2p_i} \alpha_{j,m}^{(i,s)} \frac{d^m}{dx^m} y_i /_{x=a_i},$$

$$U_{i,s}^{(2)}(\lambda^{q_i}, y_i) \equiv \sum_{j=0}^l \sum_{m=0}^q (\lambda^{q_i})^{j2p_i} \beta_{j,m}^{(i,s)} \frac{d^m}{dx^m} y_i /_{x=b_i}, \quad (2_1)$$

$$l \equiv \chi(i, s), \quad q \equiv \sigma(i, j, s),$$

$A_{i,j}(x)$ - квадратные матрицы порядка r_i ; $\alpha_{j,m}^{(i,s)}$, $\beta_{j,m}^{(i,s)}$ - постоянные вектор-строки размера r_i ; r_i, p_i, n - натуральные числа; $N = 2 \sum_{v=1}^n d_v$, $d_v \equiv p_v r_v$; $\chi(i, s)$ - или 0 или 1; $\sigma(i, j, s)$ - целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq \sigma(i, j, s) \leq 2p_i - 1$; $a_i, b_i (a_i < b_i)$ - некоторые вещественные числа; p - наименьшее общее кратное чисел p_1, p_2, \dots, p_n и $q_i = p/p_i$, ψ_i - интегрируемая (в смысле Лебега) вектор-функция размера r_i ; γ_s - постоянные числа; y_i - столбец размера r_i .

Предполагается выполнение следующих ограничений 1⁰-5⁰:

1⁰. Пусть $A_{i,j}(x) \in C(I_i)$, $j = \overline{0, 2p_i}$ и матрицы $B_i(x) \equiv A_{i,2p_i}(x)$ обратимы при $x \in I_i$ где $i = \overline{1, n}$.

2⁰. Пусть

$$\operatorname{Re}(\mu_{i,s}(x)) \leq -\varepsilon_0, \quad x \in I_i, \quad s = \overline{1, r_i}, \quad (i = \overline{1, n}),$$

где $\mu_{i,s}(x)$ ($s = \overline{1, r_i}$)- корни уравнения

$$\det((-1)^{p_i} B_i(x) - \mu E_i) = 0, \quad x \in I_i,$$

ε_0 - некоторое положительное число; E_i - единичная матрица размера r_i ; μ - скалярная переменная.

Обозначим через $\theta_s^{(i)}(x)$, $s = \overline{1, 2d_i}$ корни уравнения

$$\theta^{2p_i} = (-1)^{p_i} / \mu_{i,l}(x), \quad l = \overline{1, r_i}, \quad x \in I_i. \quad (1.1)$$

3⁰. Все $\theta_s^{(i)}(x)$, ($s = \overline{1, 2d_i}$)- различны между собою при всех значениях $x \in I_i$.

4⁰. Аргументы $\theta_s^{(i)}(x)$, ($s = \overline{1, 2d_i}$) и аргументы их разностей не зависят от $x \in I_i$.

5⁰. Пусть $A_{i,2p_i-k}(x) \in C^{2-k}(I_i)$, $k = 0, 1$.

Из ограничений 1⁰, 3⁰, 4⁰, 5⁰ следует, что однородная система, соответствующая i -ой системе из (1), имеет систему фундаментальных частных решений $y_s^{(i)}(x, \lambda^{q_i})$, ($s = \overline{1, 2d_i}$), которые вместе с производными до $(2p_i - 1)$ -го порядка включительно допускают асимптотику [1], [2], [3], [9]

$$\frac{d^k}{dx^k} y_s^{(i)}(x, \lambda^{q_i}) = (\lambda^{q_i})^k \exp \left[\lambda^{q_i} \int_{a_i}^x \theta_s^{(i)}(\xi) d\xi \right] \times \\ \times \left\{ g_{i,s}^{(k)}(x) + O(1/\lambda^{q_i}) \right\}; \quad x \in [a_i, b_i], \quad |\lambda| \geq R, \quad (3)$$

$$k = \overline{0, 2p_i - 1}, \quad s = \overline{1, 2d_i},$$

где $g_{i,s}^{(k)}(x)$ - некоторый непрерывно-дифференцируемый столбец размера r_i , причем

$$\theta_s^{(i)}(x) = -\theta_{s+d_i}^{(i)}(x), \quad s = \overline{1, d_i}, \\ g_{i,s}^{(k)}(x) = (\theta_s^{(i)}(x))^k g_{i,s}^{(0)}(x), \quad k = \overline{0, 2p_i - 1}, \quad s = \overline{1, 2d_i}, \\ g_{i,s}^{(0)}(x) = g_{i,s+d_i}^{(0)}(x), \quad x \in I_i, \quad s = \overline{1, d_i}, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (4)$$

R - достаточно большое положительное число. При этом $O(1/\lambda^{q_i})$ обозначает вектор (столбец размера r_i) вида $E(x, \lambda)/\lambda^{q_i}$, где $E(x, \lambda)$ - вектор-функция (столбец размера r_i), все элементы которой удовлетворяют условиям вида:

$$|E_j(x, \lambda)| \leq M \quad \text{при} \quad |\lambda| \geq R, \quad a_i \leq x \leq b_i,$$

а M и R - некоторые постоянные, не зависящие от x .

Из ограничений 2^0-4^0 следует, что существуют такие углы $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \dots, \varphi_{l_i}^{(i)}$, удовлетворяющие неравенствам

$$-\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4p_i} + \frac{\delta_0}{2p_i} \right) < \varphi_1^{(i)} < \varphi_2^{(i)} < \dots < \varphi_{l_i}^{(i)} < \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4p_i} + \frac{\delta_0}{2p_i} \right), \quad (5)$$

что для всех корней уравнения (1.1) имеет место

$$\theta_s^{(i)}(x) = \pm |\theta_s^{(i)}(x)| \exp(\sqrt{-1} \varphi_{k(s)}^{(i)}), \quad 1 \leq k(s) \leq l_i, \quad s = \overline{1, 2d_i}, \quad (6)$$

здесь l_i - некоторое натуральное число меньше или равное d_i , δ_0 - некоторое положительное число. Положим

$$\psi_{k,m}^{(i)} = \frac{\pi}{2q_i} - \frac{1}{q_i} \varphi_k^{(i)} + \frac{m}{q_i} \pi, \quad 0 \leq m \leq q_i - 1, \quad k = \overline{1, l_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

6⁰. Предположим, что при $i \neq j$ имеет место неравенство:

$$\psi_{k,m}^{(i)} \neq \psi_{s,r}^{(j)} \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad (8)$$

$$i, j = \overline{1, n}, \quad 0 \leq m \leq q_i - 1, \quad 1 \leq k \leq l_i, \quad 0 \leq r \leq q_j - 1, \quad 1 \leq s \leq l_j.$$

7⁰. Предположим, что для задачи (1), (2) граничные условия (2) правильны (см. [9]).

Для знаменателя элементов матрицы Грина задачи (1),(2) имеем:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\ominus} \exp\left(\sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{d_j} \lambda^{q_j} \omega_s^{(j)}\right) \Delta_1(\lambda), \quad (9)$$

где $\ominus \equiv k_1 + k_2 + \dots + k_N$; $k_s = \max(2pj + mq_i)$, при $j = 0, \chi(i, s)$, $0 \leq m \leq \sigma(i, j, s)$, $1 \leq i \leq n$, $(s = \overline{1, N})$; $\omega_m^{(i)} = \int_{a_i}^{b_i} \theta_m^{(i)}(x) dx$.

Из ограничения 1^0-7^0 следует, что в λ -плоскости существует последовательность кусочно-гладких расширяющихся замкнутых контуров Γ_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, обладающая следующими свойствами (см. [9]):

- 1) $\lim_{\nu \rightarrow \infty} r_\nu = \infty$, где r_ν - расстояние ближайшей точки контура Γ_ν от начала λ -плоскости;
- 2) $mes \Gamma_\nu = O(r_\nu)$ при $\nu \rightarrow \infty$;
- 3) $|\Delta_1(\lambda)| \geq a_0$ при $\lambda \in \Gamma_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$,

(10)

где a_0 - некоторое положительное число.

Имеет место:

Лемма. При условиях 1^0-5^0 , если $f_i(\xi)$ - кусочно абсолютно непрерывная (столбец размера r_i) в $[a_i, b_i]$, то имеет место следующая формула обращения:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma_\nu} \lambda^{2p-1} d\lambda \int_{a_i}^{b_i} P_i(x, \xi, \lambda^{q_i}) f_i(\xi) d\xi = \\ = \frac{1}{2} [f_i(x-0) + f_i(x+0)] \quad a_i < x < b_i, \end{aligned} \quad (11)$$

где P_i - фундаментальная матрица i -ой системы из (1).

Доказательство. Согласно [9], пользуясь (3) имеем:

$$\begin{aligned} P_\nu^{(0)}(x, \xi, \lambda^{q_\nu}) &= \sum_{j=1+d_\nu}^{2d_\nu} \frac{1}{\lambda^{2p-q_\nu}} \exp\left[\lambda^{q_\nu} \int_{\xi}^x \theta_j^{(\nu)}(\tau) d\tau\right] M_{\nu,j}(x, \xi) + \\ &+ \sum_{j=1+d_\nu}^{2d_\nu} \frac{1}{\lambda^{2p}} \exp\left[\lambda^{q_\nu} \int_{\xi}^x \theta_j^{(\nu)}(\tau) d\tau\right] O(1), \quad \text{при } a_\nu \leq \xi \leq x \leq b_\nu; \\ P_\nu^{(0)}(x, \xi, \lambda^{q_\nu}) &= -\sum_{j=1}^{2d_\nu} \frac{1}{\lambda^{2p-q_\nu}} \exp\left[\lambda^{q_\nu} \int_{\xi}^x \theta_j^{(\nu)}(\tau) d\tau\right] M_{\nu,j}(x, \xi) - \\ &- \sum_{j=1}^{d_\nu} \frac{1}{\lambda^{2p}} \exp\left[\lambda^{q_\nu} \int_{\xi}^x \theta_j^{(\nu)}(\tau) d\tau\right] O(1), \quad \text{при } a_\nu \leq x \leq \xi \leq b_\nu, \end{aligned} \quad (12)$$

где $M_{v,j}(x, \xi)$ - квадратная матрица размера r_v , s -ый столбец которой определяется по формуле

$$\{M_{v,j}(x, \xi)\}^{(s)} = \frac{1}{F_v(\xi)} F_v^{(s,j)}(\xi) g_{v,j}^{(0)}(x), \quad s = \overline{1, r_v}. \quad (13)$$

Следовательно, принимая во внимание (4) и равенство

$$g_{i,j}^{(0)}(x) = (\theta_j^{(i)}(x))^{2p_i} B_i(x) g_{i,j}^{(0)}(x), \quad j = \overline{1, 2d_i}, \quad (14)$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1+d_i}^{2d_i} \frac{1}{\theta_j^{(i)}(x)} M_{i,j}(x, x) &= \frac{1}{2} B_i(x), \\ \sum_{j=1}^{d_i} \frac{1}{\theta_j^{(i)}(x)} M_{i,j}(x, x) &= \frac{1}{2} B_i(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя (12) и (15), легко получить справедливость леммы.

Аналогично доказывается следующая

Теорема. Пусть выполняются ограничения 1^0-7^0 . Тогда, если $f_s(\xi)$ - кусочно абсолютно непрерывная (столбец размера r_s) в $[a_s, b_s]$, то имеет место следующая формула обращения

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma_v} \lambda^{2p-1} d\lambda \int_{a_s}^{b_s} G_{i,s}(x, \xi, \lambda) f_s(\xi) d\xi = \\ = \begin{cases} 0, & \text{при } s \neq i, \\ \frac{1}{2} [f_s(x-0) + f_s(x+0)], & \text{при } s = i, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

$$a_i < x < b_i, \quad i, s = \overline{1, n},$$

где $G_{i,s}$ - матрицы Грина задачи (1),(2); 0 - нулевой столбец размера r_i .

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917, 208 с.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
3. Гасымов Э.А. Интегральные преобразования и параболические потенциалы; применение их к решению некоторых смешанных задач. Канд.диссертация, МГУ им. М.В.Ломоносова, М., 1984, 157 с.
4. Гасымов Э.А. О разрешимости смешанных задач для параболических уравнений второго порядка в областях с криволинейными границами // Дифференц.уравнения, 1987, т.23, №3, с.514-516.
5. Гасымов Э.А. Применение интегрального преобразования к решению смешанной

- задачи для одного неклассического уравнения // Дифференц.уравнения, 1989, т.25, №5, с.909-911.
6. Гасымов Э.А. Смешанные задачи на сопряжение параболических систем разных порядков с нелокальными краевыми условиями // Дифференц.уравнения, 1990, т.26, №8, с.1364-1374.
 7. Гасымов Э.А. Применение интегральных преобразований к решению некоторых смешанных задач // Дифференц.уравнения, 1992, т.28, №3, с.521-522.
 8. Гасымов Э.А. Применение метода конечного интегрального преобразования к решению смешанной задачи с интегро-дифференциальными условиями для одного неклассического уравнения // Дифференц.уравнения, 2011, т.47, №3, с.322-334.
 9. Гасымов Э.А. Метод конечного интегрального преобразования и его приложения. (Монография). Баку: Элм, 2009, 432 с.
 10. Гасымов Э.А. Application of finite integral transformation method to the solution of a mixed problem for one non-standard equation // Modern problems of applied mathematics and information technologies – Al Khorezmiy, abstracts, Tashkent, September 18-21, 2009, p.33.
 11. Гасымов Э.А. Solvability of some boundary value problems for Laplace equation // Transactions of NAS of Azerbaijan, 2009, v.XXIX, №4, p.63-68.
 12. Гасымов Э.А. Параболические потенциалы и формулы скачков // Тезисы Международной конференции, посвященной 100-летию академика З.И.Халилова, Баку, 2011, с.98-99.

PARAMETRIK MƏSƏLƏ VƏ ÇEVİRMƏ DÜSTURU

E.A.QASIMOV

XÜLASƏ

Məqalədə parametrdən asılı adi xətti diferensial tənliklər sistemi üçün müəyyən sərhəd məsələsi tədqiq olunub.

Baxılan məsələnin Qrin matrisi vasitəsilə istənilən hissə-hissə mütləq kəsilməz vektor-funksiya üçün çevirmə düsturu alınmışdır.

Açar sözlər: parametrik məsələ, fundamental matris, çevirmə düsturu.

PARAMETRIC PROBLEM AND THE INVERSION FORMULA

E.A.GASYMOV

SUMMARY

In this paper we consider a boundary problem for ordinary linear differential systems containing a complex parameter. Under definite conditions, by the Green function, we obtain inversion formula for the arbitrary vector-function.

Key words: parametric problem, fundamental matrix, inversion formula.

Postupila v redaktsiyu: 20.06.2011 g.

Podpisano k печати: 19.12.2011 g.