УДК517.977.1/.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ ВЫПУКЛОСТИ

Г.Ф.КУЛИЕВ, Т.М.МУСТАФАЕВА

Бакинский Государственный Университет

hkuliyev@rambler.ru , tunzalemustafayeva@mail.ru

Проблема существования оптимального управления является одним из важных вопросов в теории оптимальных процессов. В большинстве работ, посвященных существованию оптимального управления в системах, описываемых уравнениями в частных производных или эволюционными уравнениями, рассматриваются выпуклые задачи. К невыпуклым задачам, в основном, относятся задачи, в которых множество допустимых управлений не является выпуклым, а минимизируемый функционал не является выпуклым по управлению. Задачи оптимального управления, описываемые уравнениями в частных производных без предположения выпуклости, изучались сравнительно мало. В настоящей работе доказана теорема существования оптимального управления без предположения выпуклости в эволюционной системе второго порядка.

Ключевые слова: существование оптимального управления, эволюционные уравнения, невыпуклые задачи, множество допустимых управлений, минимизируемый функционал.

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему

$$\ddot{x}(t)+A(t)x(t)=u(t), \tag{1}$$

$$x(0)=x_0, \quad \dot{x}(0)=x_1 \tag{2}$$

с ограничениями на управления

$$u(t)=u(t,z)\in U(t,z) \text{ почти всюду (п.в.) в } [0,T]\times\Omega, \tag{3}$$

где $t\in[0,T]$, $0<T<\infty$, $z\in\Omega$, $\Omega\subset R^n$- ограниченная область в R^n, $A(t)\in L(V,V^*)$, V - сепарабельное гильбертово пространство, которое плотно, непрерывно и компактно вложено в $H=L^2(\Omega)$, V^*- пространство, сопряженное к V, $U:[0,T]\times\Omega\to R=(-\infty,\infty)$ является многозначным отображением с замкнутыми, необязательно выпуклыми значениями.

Отождествляя пространство H с его сопряженным, получаем, что

$V \subset H \subset V^*$. При этом все вложения являются непрерывными, плотными и компактными. Такая тройка пространств обычно называется эволюционной или тройкой Гельфанда.

В работе изучается задача минимизации функционала

$$J(x,u) = G(x) + I(u) \tag{4}$$

на решениях управляемой системы (1)-(3).

Отметим, что задачи, близкие к задаче, рассмотренной нами, изучались в работах [1]-[4].

Здесь $G: C([0,T]; H) \to \overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ является квазивогнутой функцией, $I(u) = \int_0^T \int_\Omega f(t,z,u(t,z))dzdt$, причем $f: [0,T] \times \Omega \times R \to \overline{R}$ является невыпуклым нормальным интегрантом $[5]$.

2. Обозначения и основные условия на данные задачи (1)-(4).

Под $\langle x, x' \rangle$, $x \in V, x' \in V^*$, понимается каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между V и V^*, а $(\cdot,\cdot)$-скалярное произведение в H.

Введем пространства: $Y = L^2(0,T;V)$, $\quad \Re = L^2(0,T;H)$, $Y^* = L^2(0,T;V^*)$ и $X = \{x \in Y : \dot{x} \in \Re\}$, где производная $\dot{x}$ понимается в смысле распределений. Через X обозначим сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\left(\|x\|_Y^2 + \|\dot{x}\|_\Re^2\right)^{1/2}$. Ясно, что $X \subset Y \subset \Re \subset Y^*$. При этом вложение $X \subset C([0,T]; H)$ является непрерывным, а вложение $X \subset \Re$ является компактным $[6]$.

Пусть Z-отделимое локально выпуклое пространство (о.л.в.п.). Функция $g: Z \to \overline{R}$ называется квазивогнутой, если для любых $z_1, z_2 \in Z$, $0 \le \lambda \le 1$ имеет место неравенство

$$g(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2) \ge \min(g(z_1), g(z_2)). \tag{5}$$

Многозначное отображение $U: [0,T] \times \Omega \to R$ называется измеримым, если для любого замкнутого множества $F \subset R$ множество $\{(t,z) \in [0,T] \times \Omega : U(t,z) \cap F \ne \varnothing\}$ измеримо $[4]$, $[7]$.

Будем предполагать, что выполняются следующие условия.

I. Оператор $A(t) \in L(V, V^*)$ такой, что:

1) Отображение $t \to a(t;\varphi,\psi) \equiv \langle \varphi, A(t)\psi \rangle \ \forall \varphi, \psi \in V$ непрерывно дифференцируемо на $[0,T]$;
2) $a(t;\varphi,\psi) = a(t;\psi,\varphi) \ \forall \varphi, \psi \in V$;

3) $a(t;\varphi,\varphi) \ge \alpha\|\varphi\|_V^2$, $\alpha = const > 0$, $\forall \varphi \in V$, $\forall t \in [0,T]$;

4) $|a_t'(t;\varphi,\varphi)| \le \beta\|\varphi\|_V^2$, $\beta = const > 0$, $\forall \varphi \in V$, $\forall t \in [0,T]$.

II. $U:[0,T]\times\Omega \to R$ является измеримым многозначным отображением с замкнутыми значениями и $u \in \Re$.

III. $G: C([0,T];H) \to \overline{R}$ полунепрерывная снизу квазивогнутая функция, удовлетворяющая неравенству

$$G(x) \ge -\beta_1\|x\|_{C([0,T];H)}^2 - \beta_2, \quad \beta_1,\beta_2 > 0. \tag{6}$$

IV. $f:[0,T]\times\Omega\times R \to \overline{R}$ -невыпуклый нормальный интегрант, удовлетворяющий неравенству

$$f(t,z,u) \ge \alpha_1|u|_R^2 - \alpha_2(t,z) \text{ п.в. на } [0,T]\times\Omega \tag{7}$$

для любых $u \in R, \alpha_1 > 0, \alpha_2 \in L^1([0,T]\times\Omega;R^+)$.

V. $x_0 \in V, x_1 \in H$ - заданные элементы.

Под решением управляемой системы (1)-(3) мы понимаем пару $(x,u) \in X\times\Re$, удовлетворяющую соотношениям (1),(2) в ослабленном смысле, т.е. если для $u \in \Re,\ u(t,z) \in U(t,z)$ и для любой $\eta \in X, \eta(T) = 0$ выполняется интегральное тождество

$$-\int_0^T (\dot{x}(t),\dot{\eta}(t))dt + \int_0^T a(t;x(t),\eta(t))dt - (x_1,\eta(0)) = \int_0^T (u(t),\eta(t))dt,$$

а условие $x(0) = x_0$ понимается в смысле $\lim_{t\to+0}\|x(t) - x_0\|_H = 0$.

Можно показать, что для любого $u \in \Re$ задача (1)-(2) имеет единственное решение $x \in X$ [6]. Такое решение задачи (1),(2) при каждом управлении $u \in \Re$ назовем обобщенным решением.

Пару $(x,u) \in X\times\Re$ назовем допустимой для задачи (1)-(4), если она является решением управляемой системы (1)-(3) в приведенном смысле.

Примем еще одно предположение.

VI. Пусть существует допустимая пара (x^*,u^*) задачи (1)-(4) такая, что

$$J(x^*,u^*) < \infty. \tag{8}$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что имеют место предположения I-VI.

3. Вспомогательные факты и результаты

Пусть Z о.л.в.п., Z^* - его сопряженное и $< z,z' >$ - каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между Z и Z^*.

Лемма 3.1 [4]. Пусть $g: Z \to \overline{R}$ -полунепрерывная снизу квазивогнутая функция. Тогда для любого элемента $z_* \in Z$ существует элемент

$z'_* \in Z^{\cdot *}$ такой, что

$$g(z_*) = \sup\{g(z) : < z, z'_* > = < z_*, z'_* >\}. \tag{9}$$

Пусть L-о.л.в.п. Оператор $P: L \to Z$ называется аффинным, если $Py = z_o + P_1 y$, где $z_0 \in Z$ - некоторый фиксированный элемент, а $P_1 : L \to Z$ - линейный оператор. Ясно, что если $P : L \to Z$-аффинный оператор, а $g : Z \to \overline{R}$ - квазивогнутая функция, то функция $\widetilde{g} : L \to \overline{R}$, $\widetilde{g}(y) = g(Py), y \in L$, является квазивогнутой.

Пусть $B_{\Re}(r) = \{u \in \Re : \|u\|_{\Re} \le r\}, r > 0$ ($B_{\Re}(r)$ шар в $\Re$), и $R_r(x_0, x_1)$ - совокупность всех решений задачи (1),(2) с $u \in B_{\Re}(r)$.

Лемма 3.2. Существует $M > 0$ такое, что для любого $x \in R_r(x_0, x_1)$ справедлива оценка

$$\|x\|_X \le M. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $x \in R_r(x_0, x_1)$ - решение задачи (1),(2), соответствующее $u \in B_{\Re}(r)$. Тогда верно равенство $[6]$:

$$\|\dot{x}(t)\|_H^2 + a(t; x(t), x(t)) = \|x_1\|^2 + a(0; x_0, x_0) + \int_0^t a'_t(\sigma; x(\sigma), x(\sigma)) d\sigma + 2\int_0^t (u(\sigma), \dot{x}(\sigma)) d\sigma.$$

В силу условия I, отсюда имеем

$$\|\dot{x}(t)\|_H^2 + \|x(t)\|_V^2 \le c\left(\|x_1\|_H^2 + \|x_0\|_V^2\right) + c\int_0^t \left[\|\dot{x}(\sigma)\|_H^2 + \|x(\sigma)\|_V^2\right] d\sigma + \int_0^t \|u(\sigma)\|_H^2 \, d\sigma,$$

здесь и в дальнейшем через с обозначаются различные постоянные, которые не зависят от оцениваемых величин и допустимых управлений.

Применяя лемму Гронуолла $[6]$, из последнего неравенства получаем, что

$$\|\dot{x}(t)\|_H^2 + \|x(t)\|_V^2 \le c\left[\|x_1\|_H^2 + \|x_0\|_V^2 + \int_0^T \|u(t)\|_H^2 \, dt\right].$$

Поскольку $\|u\|_{\Re} \le r$, то отсюда следует, что существует $M > 0$ такое, что справедливо неравенство (10). Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть $P : \Re \to X$ - оператор, который каждому элементу $u \in \Re$ ставит в соответствие единственное решение $x = Pu$ задачи (1), (2). Тогда P является аффинным, т.е. $Pu = y_0 + P_1 u$, где $y_0 \in X$-фиксированный элемент, а $P_1 : \Re \to C([0, T]; H)$ является линейным компактным оператором.

Доказательство. Пусть $y_0 \in X$ - единственное решение задачи (1),(2), соответствующее $u=0$, и $y=P_1u$ - единственное решение задачи (1),(2) с $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$. Тогда, очевидно, что $P_1:\Re\to X$ является линейным оператором и любое решение x задачи (1),(2) представимо в виде $x=Pu=y_0+P_1u$.

Докажем компактность оператора P_1. Пусть $B_\Re(1)$ - замкнутый единичный шар пространства $\Re$. Достаточно показать, что если последовательность $u_n\in B_\Re(1)$ сходится слабо в $\Re$ к u, то последовательность $x_n=P_1u_n$ сходится к $x=P_1u$ в $C([0,T];H)$.

Пусть $u_n, u\in B_\Re(1)$, $n\geq 1$, таковы, что при $n\to\infty$

$$u_n\to u \text{ слабо в } \Re$$

и $x_n=P_1u_n, x=P_1u$. Из леммы 3.2 следует, что последовательность $x_n, n\geq 1$, ограничена в пространстве X. Тогда выделяя подпоследовательность, если необходимо, мы можем считать, что $x_n\to y$ слабо в X для некоторого $y\in X$ при $n\to\infty$. Так как вложение $X\subset\Re$ компактно, то $x_n\to y$ в $\Re$ при $n\to\infty$. Поскольку задача (1),(2) линейная, то $y=x$. В силу $[6]$ и компактности вложения $V\subset H$ мы получаем, что x_n сходится к x в $C([0,T];H)$. Лемма доказана.

Пусть $u\in\Re$ и $x=P_1u$. Тогда из (1),(2) получаем

$$\|\dot{x}(t)\|_H^2+a(t;x(t),x(t))=\int_0^t a_t'(\sigma;x(\sigma),x(\sigma))d\sigma+2\int_0^t(u(\sigma),\dot{x}(\sigma))d\sigma.$$

Отсюда, в силу условий на данные задачи, имеем:

$$\|\dot{x}(t)\|_H^2+\alpha\|x(t)\|_V^2\leq\beta\int_0^t\|x(\sigma)\|_V^2d\sigma+\int_0^t\|\dot{x}(\sigma)\|_H^2d\sigma+\int_0^t\|u(\sigma)\|_H^2d\sigma.$$

Обозначая $\widetilde{\alpha}=\min(1,\alpha), \widetilde{\beta}=\max(1,\beta)$ из последнего неравенства имеем:

$$\|\dot{x}(t)\|_H^2+\|x(t)\|_V^2\leq\frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}\int_0^t\left[\|\dot{x}(\sigma)\|_H^2+\|x(\sigma)\|_V^2\right]d\sigma+\frac{1}{\widetilde{\alpha}}\int_0^T\|u(t)\|_H^2dt.$$

Применяя лемму Гроноулла отсюда получаем

$$\|x(t)\|_V^2+\|\dot{x}(t)\|_H^2\leq\frac{1}{\widetilde{\alpha}}e^{\frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}T}\int_0^T\|u(t)\|_H^2dt. \tag{11}$$

В дальнейшем будем пользоваться неравенством (11).

4. Релаксационная задача

Пусть $\widetilde{f}:[0,T]\times\Omega\times R\to\overline{R}$ - функция, определенная следующим образом:

$$\widetilde{f}(t,z,u)=\begin{cases} f(t,z,u), & u\in U(t,z),\\ +\infty, & u\notin U(t,z),\end{cases} \tag{12}$$

и $\widetilde{f}^{**}(t,z,u)$ - вторая сопряженная функции $u \to \tilde{f}(t,z,u)$, $[5]$.

Лемма 4.1 $[4]$. Функция $\widetilde{f}^{**}(t,z,u)$ является нормальным интегрантом и

$$\alpha_1 |u|_R^2 - \alpha_2(t,z) \le \widetilde{f}^{**}(t,z,u) \le \widetilde{f}(t,z,u). \tag{13}$$

Рассмотрим релаксационную задачу минимизации функционала

$$J^{**}(x,u) = G(x) + I^{**}(u) \tag{14}$$

на решениях системы (1),(2) с ограничениями на управление

$$u(t)(z) = u(t,z) \in \overline{co}U(t,z) \text{ п.в.}, \tag{15}$$

где

$$I^{**}(u) = \int_0^T \int_\Omega \widetilde{f}^{**}(t,z,u(t,z))dzdt,$$

а $\overline{co}U(t,z)$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества $U(t,z)$.

Теорема 4.1. Если $\alpha_1 > \dfrac{2\beta_1 T^2}{\min(1,\alpha)} e^{\frac{\max(1,\beta)}{\min(1,\alpha)}T}$, то релаксационная задача (1),(2),(14),(15) имеет решение.

Доказательство. Из леммы 4.1 следует, что для любого $u \in \mathfrak{R}$ функция $(t,z) \to \widetilde{f}^{**}(t,z,u(t,z))$ измерима. Поэтому, в силу (6),(13), для любого решения (x,u) управляемой системы (1),(2),(15) имеет место неравенство

$$-\infty < J^{**}(x,u) \le +\infty. \tag{16}$$

Пусть $(x_n,u_n), n \ge 1,$ - минимизирующая последовательность релаксационной задачи. Если (x^*,u^*)- допустимая пара исходной задачи, то из (15) следует, что (x^*,u^*) является допустимой парой и для релаксационной задачи. Пользуясь неравенствами (8) и (16), получаем, что существует $M > 0$ такое, что

$$-\infty < J^{**}(x_n,u_n) < M, \; n \ge 1.$$

Тогда, в силу (6),(13),

$$-\beta_2 - \beta_1 \|x_n\|^2_{C([0,T];H)} + \alpha_1 \|u_n\|^2_{\mathfrak{R}} - \alpha_2 \le M, \tag{17}$$

где $\alpha_2 = \int_0^T \int_\Omega \alpha_2(t,z,)dzdt.$

Из (17) и неравенства (11) следует, что

$$-\beta_2 - 2\beta_1 \|y_0\|^2_{C([0,T];H)} + \left(\alpha_1 - \frac{2\beta_1 T^2}{\min(1,\alpha)} e^{\frac{\max(1,\beta)}{\min(1,\alpha)}}\right)\|u_n\|^2_{\mathfrak{R}} - \alpha_2 \le$$

$$\le -\beta_2 - 2\beta_1 \|y_0 + P_1 u_n\|^2_{C([0,T];H)} + \alpha_1 \|u_n\|^2_{\mathfrak{R}} - \alpha_2 \le M. \tag{18}$$

Так как $\alpha_1 - \frac{2\beta_1 T^2}{\min(1,\alpha)} e^{\frac{\max(1,\beta)}{\min(1,\alpha)}} > 0,$ то из неравенства (18) следует, что последовательность $u_n, n \geq 1$, ограничена в $\Re$. Мы можем считать, что $u_n, n \geq 1$, сходится слабо в пространстве $\Re$ к некоторому $u_* \in \Re$. Тогда, в силу теоремы Мазура $[8]$,

$$u_*(t,z) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co} \bigcup_{k \geq n}^{\infty} u_k(t,z) \in \overline{co} U(t,z) \text{ п.в.} \tag{19}$$

Воспользовавшись леммой 3.3, получаем, что последовательность решений $x_n = Pu_n, n \geq 1$, задачи (1),(2) сходится в пространстве $C([0,T];H)$ к решению $x_* = Pu_*$ задачи (1),(2). Следовательно, в силу (19), пара (x_*, u_*) является решением управляемой системы (1),(2),(15).

Пользуясь леммами 3.3 и 4.1, получаем, что функция $u \to G(Pu) + I^{**}(u)$ слабо полунепрерывна снизу в $\Re$. Поэтому

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} J^{**}(x_n, u_n) \geq J^{**}(x_*, u_*). \tag{20}$$

Из (19),(20) следует, что пара (x_*, u_*) является решением релаксационной задачи. Теорема доказана.

5. Основной результат

Теорема 5.1. Если $\alpha_1 > \frac{2\beta_1 T^2}{\min(1,\alpha)} e^{\frac{\max(1,\beta)}{\min(1,\alpha)}}$, то исходная задача (1)-(4) имеет решение.

Доказательство. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\widetilde{J}(x,u) = G(x) + \widetilde{I}(u) \tag{21}$$

на решениях управляемой системы (1)-(3), где

$$\widetilde{I}(u) = \int_0^T \int_\Omega \widetilde{f}(t,z,u(t,z)) dz dt.$$

Из (12) следует, что любая допустимая пара (x,u) задачи (1)-(4) является допустимой и для задачи (1)-(3),(21). Тогда, в силу (13),

$$\min J^{**}(x,u) \leq \inf \widetilde{J}(x,u) < \infty \tag{22}$$

и, учитывая (12), получаем, что задачи (1)-(4) и (1)-(3),(21) эквивалентны.

Пусть (x_*, u_*)- решение релаксационной задачи. Согласно (22), теорема будет доказана, если мы покажем, что существует допустимая пара (x_0, u_0) задачи (1)-(3),(21) такая, что

$$J^{**}(x_*, u_*) = \widetilde{J}(x_0, u_0).$$

Из (7) и (13) следует, что

$$-\infty < \int_0^T \int_\Omega \tilde{f}^{**}(t,z,u_*(t,z))dzdt < \infty.$$

Поэтому функция $\tilde{f}^{**}(t,z,u_*(t,z))$ интегрируема и

$$\left|\tilde{f}^{**}(t,z,u_*(t,z))\right| < \infty \quad \text{п.в.} \tag{23}$$

Воспользовавшись предложением 3.1 из [5, 11.9, §3] получаем, что существуют измеримые функции $P_i : [0,T]\times\Omega \to R^+$, $u_i : [0,T]\times\Omega \to R, i = 1,2,$ такие, что

$$u_*(t,z) = \sum_{i=1}^{2} p_i(t,z)u_i(t,z) \quad \text{п.в.,} \tag{24}$$

$$\tilde{f}^{**}(t,z,u_*(t,z)) = \sum_{i=1}^{2} p_i(t,z)\tilde{f}(t,z,u_i(t,z)) \quad \text{п.в.,} \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{2} p_i(t,z) = 1 \quad \text{п.в.} \tag{26}$$

Не нарушая равенства (24),(25), можно изменить $u_i(t,z)$ на множестве $E_i = \{(t,z)\in[0,T]\times\Omega : u_i(t,z) \notin U(t,z)\}, i = 1,2$ так, что $u_i(t,z)$ останутся измеримыми функциями и

$$u_i(t,z)\in U(t,z), i = 1,2, \text{ п.в. на } [0,T]\times\Omega. \tag{27}$$

Тогда, в силу (12), (25), (27),

$$\tilde{f}^{**}(t,z,u_*(t,z)) = \sum_{i=1}^{2} p_i(t,z) f(t,z,u_i(t,z)) \quad \text{п.в.} \tag{28}$$

Из (24), (26), (27) следует, что

$$u_*(t,z)\in coU(t,z) \qquad \text{п.в.,} \tag{29}$$

где $coU(t,z)$ означает выпуклую оболочку множества $U(t,z)$.

По теореме Лузина [5] существует последовательность $Q_l, l=1,2,\ldots Q_l \subset [0,T]\times\Omega,$ попарно непересекающихся компактных множеств таких, что $\mu_0\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} Q_l\right) = \mu_0([0,T]\times\Omega)$ и сужение каждой из функций $u_i(t,z), f(t,z,u_i(t,z)), i = 1,2,$ на любое из множества Q_l непрерывно, где $\mu_0(\cdot)$ - мера Лебега множества.

Рассмотрим измеримое многозначное отображение $\Gamma : [0,T]\times\Omega \to R$ с компактными значениями, определенное следующим образом.

$$\Gamma : (t,z) = \bigcup_{i=1}^{2} f(t,z,u_i(t,z)).$$

Из (28) следует, что

$$\tilde{f}^{**}(t,z,u_*(t,z)) \in co\Gamma(t,z) \qquad \text{п.в.} \tag{30}$$

Воспользовавшись свойствами многозначного интеграла [7], получаем

$$\iint\limits_{Q_l}\Gamma(t,z)dzdt=\iint\limits_{Q_l}co\Gamma(t,z)dzdt\ .$$

Отсюда и из (30) следует, что для каждого $l=1,2,...$ существуют попарно непересекающиеся множества $Q_l^i,\ i=1,2$, такие, что $\mu_0\left(\bigcup\limits_{i=1}^{2}Q_l^i\right)=\mu_0(Q_l)$ и

$$\iint\limits_{Q_l}\tilde{f}^{**}\left(t,z,u_*(t,z)\right)dzdt=\iint\limits_{Q_l}\sum_{i=1}^{2}p_i(t,z)\,f\left(t,z,u_i(t,z)\right)dzdt=$$

$$=\iint\limits_{Q_l}\sum_{i=1}^{2}\chi_i\left(Q_l^i\right)(t,z)\,f\left(t,z,u_i(t,z)\right)dzdt\ , \tag{31}$$

где $\chi\left(Q_l^i\right)(t,z)$ означает характеристическую функцию множества Q_l^i.

Далее, учитывая условия на $f(t,z,u)$ и поступая так, как в работе $[4]$, можно показать, что функция

$$g(t,z)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\chi\left(Q_l^i\right)(t,z)f\left(t,z,u_i(t,z)\right) \tag{32}$$

интегрируема на $[0,T]\times\Omega$,

$$u_0(t,z)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\chi\left(Q_l^i\right)(t,z)u_i(t,z)\in U(t,z)\ \text{п.в.} \tag{33}$$

и $u_0\in\Re$.

Используя условия на $G(x)$ и лемму 3.3, получим, что функция $u\to G(Pu)$ является квазивогнутой и полунепрерывной снизу, действующей из $\Re$ в $\overline{R}$. Тогда, в силу леммы 3.1, существует элемент $h\in\Re$, такой, что

$$G(Pu_*)=\sup\{G(Pu):\langle u,h\rangle=\langle u_*,h\rangle\}, \tag{34}$$

где

$$\langle u,h\rangle=\int_0^T\int_\Omega u(t,z)h(t,z)dzdt\ .$$

Рассмотрим измеримые функции $\gamma_i:[0,T]\times\Omega\to R^2,\ i=1,2,$

$$\gamma_i(t,z)=\{u_i(t,z)\cdot h(t,z),\ f\left(t,z,u_i(t,z)\right)\}, \tag{35}$$

где $u_i(t,z)$ удовлетворяют равенству (24).

Пусть $\Gamma^*:[0,T]\times\Omega\to R^2$-измеримое многозначное отображение с компактными значениями, определенное следующим образом

$$\Gamma^*(t,z)=\bigcup_{i=1}^{2}\gamma_i(t,z).$$

Рассмотрим функцию $\gamma^*:[0,T]\times\Omega\to R^2$

$$\gamma^*(t,z)=\{u_*(t,z)\cdot h(t,z),\ \tilde{f}^{**}\left(t,z,u_*(t,z)\right)\}. \tag{36}$$

Тогда из (24),(28),(35) следует, что

$$\gamma^*(t,z)\in co\Gamma^*(t,z) \text{ п.в.}$$

Поэтому

$$\iint\limits_{Q_l}\gamma^*(t,z)\,dzdt=\iint\limits_{Q_l}\sum_{i=1}^{2}\chi\left(Q_l^i\right)(t,z)\,\gamma_i(t,z)\,dzdt\,. \tag{37}$$

В силу (35), (36), (37) получаем

$$\iint\limits_{Q_l}u_*(t,z)\,h(t,z)dzdt=\iint\limits_{Q_l}\sum_{i=1}^{2}\chi\left(Q_l^i\right)(t,z)\,u_i(t,z)\,h(t,z)dzdt\,, \tag{38}$$

$$\iint\limits_{Q_l}\widetilde{f}^{**}(t,z,u_*(t,z))dzdt=\iint\limits_{Q_l}\sum_{i=1}^{i}\chi_i\left(Q_l^i\right)(t,z)f\left(t,z,u_i(t,z)\right)dzdt=$$

$$=\iint\limits_{Q_l}f\left(t,z,\sum_{i=1}^{2}\chi_i\left(Q_l^i\right)(t,z)u_i(t,z)\right)dzdt\,. \tag{39}$$

Из (33), (38), (39) следует, что

$$\int_0^T\int_\Omega u_0(t,z)h(t,z)dzdt=\int_0^T\int_\Omega u_*(t,z)h(t,z)dzdt\,, \tag{40}$$

$$\int_0^T\int_\Omega \widetilde{f}^{**}(t,z,u_*(t,z))dzdt=\int_0^T\int_\Omega f(t,z,u_0(t,z))dzdt\,. \tag{41}$$

Пусть $x_0=Pu_0$ решение задачи (1),(2). Тогда из (34), (40), (41) получаем, что

$$G(Pu_0)\le G(Pu_*). \tag{42}$$

Используя (12), (22), (41), (42), мы приходим к равенству

$$\widetilde{J}(x_0,u_0)=J(x_0,u_0)=J^{**}(x_*,u_*). \tag{43}$$

Теперь из $u_0(t,z)\in U(t,z)$ и (43) следует, что пара (x_0,u_0) является решением основной задачи (1)-(4). Теорема доказана.

Пример.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(x,u)=\min_{1\le i\le n}\int_0^T\int_\Omega g_i\left(t,z,x(t,z)\right)dzdt+\int_0^T\int_\Omega f\left(t,z,u(t,z)\right)dzdt$$

на решениях системы

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(a_{ij}(t,z)\frac{\partial x}{\partial z_j}\right)+a(t,z)x=u(t,z) \text{ в } Q,$$

$$x\big|_S=0,\quad x(0,z)=x_0(z),\ \frac{\partial x(0,z)}{\partial t}=x_1(z) \text{ в } \Omega \text{ с ограничением}$$

$$u(t,z)\in U(t,z),$$

где S является боковой поверхностью цилиндра $Q=\Omega\times(0,T)$.

Пусть выполняются следующие условия:

I. $a_{ij}(t,z),\ a(t,z),\ \dfrac{\partial a_{ij}^{t,z}}{\partial t} \in C(\overline{Q}),\quad i,j=\overline{1,N}$,

$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t,z)\xi_i\xi_j \ge \alpha \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2,\ \alpha = const > 0,\ a(t,z) \ge \alpha$.

II. $u(t,z) \in L^2(Q),\ U(t,z)$ измеримое, замкнутое множество.

III. $x_0 \in H_0^1(\Omega),\ \ x_1 \in L^2(\Omega)$.

IV. Функции $g_i : Q \times R \to \overline{R}$ являются функциями Каратеодори в $Q \times R$;
$x \to g_i(t,z,x)$-вогнутые при почти всех (t,z),
$g_i(t,z,x) \ge -\beta_1|x|^2 - \beta_2(t,z),\ \beta_1 > 0,\ \beta_2(\cdot) \in L^1(Q;R^+)$.

V. $f(t,z,u) \ge \alpha_1|u|^2 - \alpha_2(t,z), \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 \in L^1(Q;R^+)$.

Если положить $V = H_0^1(\Omega),\ H = L^2(\Omega),\ V^* = H^{-1}(\Omega)$, тогда легко проверить, что в данном примере выполняются все условия теоремы 5.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толстоногов А.А. Свойства решений эволюционных управляемых систем второго порядка// Сиб. мат. Ж., 2002, т.43, №4, с.907-923.
2. Lou H.W. Existence of optimal controls in the absence of Cesari-type conditions for semilinear elliptic and parabolic systems// Journal of Optimization Theory and Applications , 2005, v.125, №2, p. 367-391.
3. Толстоногов А.А. Теорема существования оптимального управления в задаче Гурса-Дарбу без предположения выпуклости// Изв. РАН. Сер. Матем. 2000, т.64, №4, с.163-182.
4. Толстоногов А.А. Существование оптимального управления без предположения выпуклости в эволюционной системе первого порядка// Мат. сборник. 2001, т.192, №9, с.125-142.
5. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979, 400 с.
6. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 372 с.
7. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 480 с.
8. Хилле Э, Филипс Р.С. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962, 829 с.

QABARIQLIQ ŞƏRTİ OLMADAN İKİTƏRTİBLİ EVOLYUSİON SİSTEMDƏ OPTİMAL İDARƏEDİCİNİN VARLIĞI HAQQINDA

H.F.QULİYEV, T.M.MUSTAFAYEVA

XÜLASƏ

Optimal proseslər nəzəriyyəsində mühüm məsələlərdən biri optimal idarəedicinin varlığı problemidir. Xüsusi törəməli tənliklərlə və yaxud evolyusion tənliklərlə təsvir olunan sistemlərdə optimal idarəedicinin varlığına həsr olunmuş əksər işlərdə qabarıq məsələlərə baxılır. Qabarıq olmayan məsələlərə, əsasən elə məsələlər aid edilir ki, mümkün idarəedicilər çoxluğu qabarıq deyil, minimallaşdırılan funksional isə idarəediciyə nəzərən qabarıq deyil. Qabarıqlıq şərti olmadan xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri kifayət qədər öyrənilməyib. Təqdim olunan işdə ikitərtibli evolyusion sistemdə qabarıqlıq şərti olmadan optimal idarəedicinin varlığı isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: optimal idarəedicinin varlığı, evolyusion tənliklər, qabarıq olmayan məsələ, mümkün idarəedicilər çoxluğu, minimallaşdırılan funksional.

ON THE EXISTENCE OF OPTIMAL CONTROL IN A SECOND ORDER EVOLUTIONARY SYSTEM WITHOUT CONVEXITY ASSUMPTION

H.F.GULIYEV, T.M.MUSTAFAYEVA

SUMMARY

The problem on the existence of optimal control is one of the important problems in the theory of optimal processes. In great majority of papers devoted to the existence of optimal control in the systems described by partial or evolutionary equations, the convex problems are considered. The problems wherein the set of admissible controls is not convex and the minimized functional is not convex in control mainly belong to nonconvex problems. The optimal control problems described by partial equations without convexity assumption were not studied enough. In the present paper, a theorem on the existence of an optimal control without convexity assumption in a second order evolutionary system is proved.

Key words: existence of optimal control, evolutionary equations, nonconvex problems, the set of admissible controls, the minimized functional.

Поступила в редакцию: 31.05.2011 г.
Подписано к печати: 19.12.2011 г.