

RİYAZİYYAT

УДК 519.622

**ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ГИБРИДНЫХ МЕТОДОВ
К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ*****Г.Ю.МЕХТИЕВА, В.Р.ИБРАГИМОВ, М.Н.ИМАНОВА***Бакинский Государственный Университет**ibvag47@mail.ru*

Как известно, многие научно-технические и прикладные задачи сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, найти точное решение которых удается не всегда. Поэтому многие ученые применяли приближенные методы для их решения. Среди этих методов наиболее популярными в XX веке были численные методы типа Рунге-Кутты и Адамса. Учитывая преимущества и недостатки этих методов, в середине XX века некоторые ученые разработали новый класс методов, которые назвали гибридными. Построенные гибридные методы были более точными, чем соответствующие методы Рунге-Кутты и Адамса. Здесь, для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, построено обобщение известных многошаговых и гибридных методов. Учитывая, что неявные методы являются более точными, рассматривается вопрос об определении неявности гибридных методов, а также построен конкретный метод с точностью $p = 6$ при $k = 2$ и предложен способ для его применения к решению выше названных задач.

Ключевые слова: гибридные методы, задача Коши, ОДУ высших порядков, многошаговый метод с постоянными коэффициентами

Рассмотрим численное решение следующей начальной задачи:

$$y'' = F(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad x_0 \leq x \leq X. \quad (1)$$

Предположим, что задача (1) на отрезке $[x_0, X]$ имеет единственное решение. Для нахождения ее численного решения отрезок $[x_0, X]$ разбиваем на N равных частей. Обозначим через y_m и y'_m приближенные значения решения задачи (1) и его первую производную в точке x_m ($m = 0, 1, 2, \dots$). С помощью значений величины N можно определить количество подинтервалов, на которые делится

* Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской республики № EIF-2011-1(3)-82/27/1

отрезок $[x_0, X]$ с постоянным шагом $h > 0$. Точки разбиения отрезка $[x_0, X]$ обозначим через $x_m = x_0 + mh$ ($m = 0, 1, \dots, N$). Существует ряд работ разных авторов, посвященных численному решению задачи (1). Обычно при численном решении задачи (1) строятся методы как для нахождения приближенного значения решения задачи (1), так и для нахождения приближенных значений его первой производной. Таким образом, для нахождения решений задачи (1) получаем систему численных методов, которая в одном варианте имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i y'_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^k \gamma_i F_{n+i}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^k \alpha'_i y'_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta'_i F_{n+i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-k, \quad (3)$$

здесь коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \alpha'_i, \beta'_i$ - некоторые действительные числа, причем $\alpha_k \neq 0, \alpha'_k \neq 0$, а $F_m = F(x_m, y_m, y'_m)$ ($m = 0, 1, 2, \dots, N$). Обычно величину k называют порядком конечно-разностного метода (2) или (3). Поэтому точность методов (2) или (3) определяют с помощью понятия степени метода, которое определяется в следующей форме.

Определение 1. Допустим, что $y(x)$ - достаточно гладкая функция, а $p > 0$ - целозначная величина. Если выполняется следующее:

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i y(x+ih) - h\beta_i y'(x+ih) - h^2 \gamma_i y''(x+ih)) = O(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0,$$

то говорят, что степень метода (2) равна p . Степень для метода (3) определяется аналогичным образом. Здесь фиксированная точка x определяется в виде $x = x_0 + nh$.

Если задачу (1) с помощью некоторых преобразований сведем к системе дифференциальных уравнений первого порядка, то в этом случае получаем систему, образованную из численных методов типа (3), (см., напр. [1, стр.276], [2, стр.255]). Однако методы типа (2) можно применить к решению задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка (см., напр., [3]-[7]). Но в этом случае возникают некоторые трудности при вычислении функции $y'' = g'_x(x, y) + g'_y(x, y) \cdot y'$ (здесь $y' = g(x, y)$). Рассмотрим случай, когда функция $F(x, y, y') = f(x, y)$ в явном виде не зависит от величины y' . Тогда задачу (1) можно переписать в виде:

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (4)$$

Очевидно, что к решению задачи (4) можно применить методы типа (2). Но в этом случае возникает необходимость вычисления y'_m ($m = 0, 1, 2, \dots$), для чего можно использовать методы типа (3). Следовательно, к численному решению задачи (4) желательно применить следующее обобщение метода Штермера:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}. \quad (5)$$

Этот метод исследован многими авторами (см., напр., [3], [8]) и доказа-

но, что если p является степенью метода (5), то $p \leq 2k$. Здесь степень метода (5) определяется следующим образом.

Определение 2. Если для достаточно гладкой функции $y(x)$ выполняется:

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i y(x+ih) - h^2 \beta_i y''(x+ih)) = O(h^{p+2}), \quad h \rightarrow 0, \quad (6)$$

то говорят, что целочисленная величина $p > 0$ является степенью метода (5).

Известно, что как теоретический, так и практический интерес представляют сходящиеся методы, а для сходимости метода (5) необходимым и достаточным условием является его устойчивость.

Определение 3. Метод (5) называют устойчивым, если корни его характеристического многочлена $\rho(\lambda) \equiv \sum \alpha_k \lambda^k + \alpha_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней, за исключением двукратного корня $\lambda = 1$.

Как известно, если метод (5) устойчив, то $p_{\max} = k + 2$ для четных k , т. е. $k = 2m$ и $p_{\max} = k + 1$ для нечетных k . Чтобы построить устойчивые методы типа (5), имеющие степень $p > k + 2$, ученые предложили использовать экстраполяции Рундсона, сплайн-функции, метод коррекции. Некоторые ученые для построения методов с высокой точностью численного решения задачи (1) предложили использовать гибридные методы. Например, в работе [9] построен гибридный метод для решения задачи (1), который имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i f_{n+i} + h^2 \beta_{s+1} f_{n+s} + h^2 \beta_{1-s} f_{n-s+1}. \quad (7)$$

Здесь, для численного решения задачи (4) предложен один гибридный метод, который можно назвать обобщением метода (7).

Построение гибридного метода для численного решения задачи (4)

Отметим, что гибридные методы построены на стыке методов Рунге-Кутты и Адамса с целью конструирования методов с наилучшими свойствами, как с расширенной областью устойчивости, так и с высокой точностью. Естественно, что каждый из этих методов имеет некоторые преимущества и недостатки. Обычно при построении гибридных методов стараются конструировать их так, чтобы они содержали только лучшие свойства методов Рунге-Кутты и Адамса. Исследованием гибридных методов ученые занимаются давно (см., напр., [10]-[13]). Однако построение гибридных методов с высокой точностью является актуальным и по сей день.

Здесь для решения задачи (4) предлагается следующий метод:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i+l_i}, \quad (|l_i| < 1). \quad (8)$$

Из предложенного метода, в частности, можно получить метод (7).

Учитывая, что основные свойства численных методов определяются по

значениям их коэффициентов, рассмотрим следующие ограничения, налагаемые на их коэффициенты и считающиеся необходимым условием при исследовании метода (8).

А. Величины α_i, β_i, l_i ($i = 0, 1, \dots, k$) - некоторые действительные числа, причем $\alpha_k \neq 0$.

В. Многочлены

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \alpha_i \lambda^i; \quad \sigma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \beta_i \lambda^{i+l_i}$$

не имеют общих множителей, отличных от константы.

С. Имеет место: $\sigma(1) \neq 0$ и $p \geq 1$.

Необходимость условия А связана с исследуемой задачей, поскольку решение этой задачи является действительной функцией, а $\alpha_k \neq 0$ связано с тем, что методом (8) можно было бы определить значение величин y_{n+k} . Рассмотрим условие В и предположим обратное. Тогда многочлены $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ имеют общий множитель, который обозначим через $\varphi(\lambda)$. С учетом полученного и оператора сдвига E ($E^\nu y(x) = y(x + \nu h)$) разностное уравнение (8) перепишем в следующем виде:

$$\rho(E)y_n - h^2 \sigma(E)y_n'' = 0.$$

Учитывая выше принятое предположение, имеем:

$$\varphi(E)(\rho_1(E)y_n - h^2 \sigma_1(E)y_n'') = 0,$$

здесь

$$\rho_1(\lambda) = \rho(\lambda) / \varphi(\lambda),$$

$$\sigma_1(\lambda) = \sigma(\lambda) / \varphi(\lambda).$$

Отсюда получаем, что

$$\rho_1(E)y_n - h^2 \sigma_1(E)y_n'' = 0, \tag{9}$$

поскольку $\varphi(\lambda) \neq \text{const}$. Очевидно, что для того, чтобы разностное уравнение имело единственное решение, должно быть известно не больше, чем $k-1$ начальных данных. Однако, из теории разностных уравнений известно, что для того, чтобы разностное уравнение k -го порядка имело единственное решение, должно быть известно k начальных данных. Но разностные уравнения (8) и (9) эквивалентны. Следовательно, разностное уравнение (8) имеет единственное решение при известности не больше, чем $k-1$ начальных данных, что противоречит вышеуказанной теории. Следовательно, предположения о существовании общего множителя многочленов $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ не верно. Таким образом, доказали, что условие В является необходимым при исследовании метода (8). Теперь рассмотрим справедливость условия С. Предположим, что метод (8) сходится. Тогда переходя к пределу в равенстве (8) при $h \rightarrow 0$ имеем:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y(x) = 0.$$

Учитывая $y(x) \neq 0$, имеем $\rho(1) = 0$, что является необходимым условием сходимости. Рассмотрим следующее представление функции

$$\rho_1(E)y(x) = \rho(1) + \rho'(1)hy'(x) + \frac{1}{2}\rho''(1)h(y'(x+h) - y'(x)) + O(h^3).$$

С учетом полученного, в соотношении (8) имеем:

$$h\rho'(1)y'(x) + \frac{1}{2}\rho''(1)(y'(x+h) - y'(x)) - h\sigma(E)y''(x) = O(h^2). \quad (10)$$

Отсюда при $h \rightarrow 0$ имеем: $\rho(1) = 0$. В соотношении (10) положим $x = x_0 + jh$ и, меняя значения величины j от нуля до n , суммируем полученные равенства, в результате чего получим:

$$\frac{1}{2}\rho''(E)(y'_{n+1} - y'_0) - h\sigma(E)\sum_{j=0}^n y''_j = O(h^2).$$

В этом равенстве переходим к пределу при $h \rightarrow 0$. Тогда получим:

$$\frac{1}{2}\rho''(1)(y'(x) - y'_0) = \sigma(1) \int_{x_0}^x y''(\xi) d\xi.$$

Однако, из задачи (4) имеем:

$$y'(x) = y'(x_0) + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi /$$

Сравнивая полученные равенства, получим:

$$\rho''(1) = 2\sigma(1).$$

Легко можно показать, что из условий

$$\rho(1) = 0; \quad \rho'(1) = 0, \quad \rho''(1) = 2\sigma(1)$$

следует, что $\rho \geq 1$.

Таким образом, доказали необходимость ограничений А, В и С.

Коэффициенты α_i, β_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) и величины l_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) подбираем так, чтобы метод (8) имел степень p . Для этого в предположении достаточной гладкости функции $y(x)$, величины $y(x + ih)$ и $y''(x + \gamma_i h)$ разлагаем в ряд Тейлора вокруг точки x и учтем их в равенстве (6). Тогда для определения значений величин α_i, β_i, l_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \alpha_i &= 0; & \sum_{i=0}^k i \alpha_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^k \left(\frac{i^{l+1}}{(l+1)!} \alpha_i - \frac{\gamma_i^{l-1}}{(l-1)!} \beta_i \right) &= 0 \quad (l = 1, 2, \dots, p, \quad 0! = 1). \end{aligned} \quad (11)$$

В этой системе количество неизвестных равно $3k + 3$, а количество уравнений

равно $p + 2$. Очевидно, что эта система всегда имеет нулевое решение, однако нас интересует ненулевое решение. А для этого между количеством уравнений и неизвестных в системе (11) должно выполняться следующее условие: $p + 2 < 3k + 3$. Отсюда следует, что $p_{\max} = 3k$.

Рассмотрим построение некоторых конкретных методов. Отметим, что в случае $k = 1$ не существуют методы типа (8) (см. [14]), поэтому положим $k = 2$. В этом случае для определения коэффициентов получаем следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 &= 0, \\ 2\alpha_2 + \alpha_1 &= 0, \\ \beta_2 + \beta_1 + \beta_0 &= 1, \\ \gamma_2\beta_2 + \gamma_1\beta_1 + \gamma_0\beta_0 &= 1, \\ \gamma_2^2\beta_2 + \gamma_1^2\beta_1 + \gamma_0^2\beta_0 &= \frac{7}{6}, \\ \gamma_2^3\beta_2 + \gamma_1^3\beta_1 + \gamma_0^3\beta_0 &= \frac{3}{2}, \\ \gamma_2^4\beta_2 + \gamma_1^4\beta_1 + \gamma_0^4\beta_0 &= \frac{31}{15}, \\ \gamma_2^5\beta_2 + \gamma_1^5\beta_1 + \gamma_0^5\beta_0 &= 3.\end{aligned}\tag{12}$$

Решая полученную систему, определяем коэффициенты разных методов, имеющие разные свойства. Например, при $\gamma_i = i$ решая систему (12) получаем следующий метод:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} - y_n + h^2(f_n + 10f_{n+1} + f_{n+2})/12,\tag{13}$$

который входит в класс методов Штермера, имеет степень $p = 4$ и известен, как метод Нумерова (см., напр., [1, стр. 443]). Этот метод интересен тем, что, решая систему (11) при $k = 3$ и $\gamma_i = i$ ($i = 1, 2, 3$) также получаем метод (13). Очевидно, что степень метода (13) в случаях $k = 2$ и $k = 3$ получает максимальное значение $k + 2$ (при $k = 2$) и $k + 1$ (при $k = 3$).

Теперь рассмотрим решение системы (12) в случае $k = 2$ для произвольного γ_i . Тогда получим следующее решение:

$$\beta_0 = \beta_2 = 5/24, \quad \beta_1 = 7/12, \quad \gamma_0 = 1 - \sqrt{10}/5, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1 + \sqrt{10}/5.$$

Тогда из соотношений (8) находим следующий метод:

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + h^2(5f_{n+\gamma_0} + 14f_{n+1} + 5f_{n+\gamma_2})/24,\tag{14}$$

который устойчив и имеет степень $p = 6$. Очевидно, что при использовании метода (14) возникает необходимость известности значений величин $y_{n+\gamma_0}$ и $y_{n+\gamma_2}$. С целью определения этих значений рассмотрим следующие разложения:

$$y(x + \mathcal{h}) = y(x + h) + (\gamma - 1)hy'(x + h) + \frac{(\gamma - 1)^2}{2}h^2y''(x + h) + \frac{(\gamma - 1)^3}{3!}h^3y'''(x + h) + O(h^4). \quad (15)$$

С помощью полученного представления функции для определения ее значений $y_{n+\gamma_0}$ можно предложить следующий метод:

$$y_{n+\gamma_0} = y_{n+1} - \sqrt{10}(y_{n+1} - y_n)/5 + h^2((10 - 4\sqrt{10})f_{n+1} - \sqrt{10}f_n)/50. \quad (16)$$

А для вычисления значений величин $y_{n+\gamma_2}$ с помощью разложений (15) можно построить следующий метод:

$$y_{n+\gamma_2} = y_{n+1} - \frac{\sqrt{10}}{5}(y_{n+1} - y_n) + \frac{h^2}{50}((10 + 4\sqrt{10})f_{n+1} + \sqrt{10}f_n). \quad (17)$$

Таким образом, получаем, что, если нам известны приближенные значения y_0 и y_1 решения задачи (4), то, используя методы (16), (17) и (14), можем вычислить его приближенные значения y_m ($m \geq 2$). Отметим, что методы (16) и (17) имеют степень $p = 2$. Следовательно, порядок для их локальных погрешностей равен 4. Поэтому учет их в методе (14) не изменяет его точность.

Рассмотрим использование гибридного метода со степенью $p = 6$ и с этой целью построим следующий алгоритм.

Алгоритм для применения метода (14) к решению задачи (1).

Шаг 1. Вычисление значений величины $y_{n+1+\gamma}$ при $\gamma = -\alpha, \alpha, 2\alpha$ с помощью следующего метода:

$$y_{n+1+\gamma} = (1 + \gamma)y_{n+1} - \gamma y_n + \mathcal{h}^2((\gamma^2 + 3\gamma + 2)y''_{n+1} + (1 - \gamma^2)y''_n)/6;$$

Шаг 2. Вычисление значений величины hy'_{n+1} по следующим методам:

$$hy'_{n+1} = y_{n+1} - y_n + \frac{h^2}{360\alpha^3}((10\alpha^3 - 3)\hat{y}''_{n+1+2\alpha} + (-60\alpha^2 + 15\alpha + 9)\hat{y}''_{n+1+\alpha} + (30\alpha^2 - 30\alpha + 180\alpha^3 - 9)y''_{n+1} + (20\alpha^2 + 15\alpha + 3)\hat{y}''_{n+1-\alpha}) \quad (\alpha = \sqrt{10});$$

Шаг 3. Вычисление значений величины $y_{n+1+\gamma}$ при $\gamma = -\alpha, \alpha$ для $\alpha = \sqrt{10}/5$ по формуле:

$$y_{n+1+\gamma} = y_{n+1} + \mathcal{h}y'_{n+1} + \frac{(\mathcal{h})^2}{360\alpha^3}((3\gamma^3 - 10\alpha^2)\hat{y}''_{n+1+2\alpha} + (60\gamma\alpha^2 + 15\gamma^2\alpha - 9\gamma^3)\hat{y}''_{n+1+\alpha} + (180\alpha^3 - 30\gamma\alpha^2 - 30\gamma^2\alpha + 9\gamma^3)y''_{n+1} + (-3\gamma^3 + 15\gamma^2\alpha - 20\gamma\alpha^2)\hat{y}''_{n+1-\alpha});$$

Шаг 4. Вычисление искомой величины y_{n+2} по следующим методам:

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + h^2(5f_{n+1+\alpha} + 14f_{n+1} + 5f_{n+1-\alpha})/24 \quad (\alpha = \sqrt{10}/5).$$

Заключение. Таким образом, при численном решении начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью выше построенного метода используем систему разностных методов, состоящую из трех формул. Следовательно, при решении задачи (4) используем систему чис-

ленных методов, с которыми сталкиваемся и при решении задачи (1). Отметим, что при численном решении задачи (4) с помощью неявного метода Штермера также приходится использовать систему численных методов. Однако подобные методы типа Штермера при $k = 2$ имеют степень $p_{\max} = 4$. Отметим, что гибридные методы, построенные в [9], также имеют степень $p_{\max} = 4$ и при их использовании сталкиваемся с системой численных методов. Учитывая, что предложенный здесь метод имеет степень $p = 6$ и при его использовании объем вычислительных работ не увеличивается, тогда получаем, что этот метод представляет как научный, так и практический интересы.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Hairier, S.P.Norsett, G.Wanner. Solving ordinary differential equations. (Russian) M.: Mir, 1990, 512 p.
2. V.M. Verzhbitskiy. Numerical methods, Mathematical analysis and ordinary differential equations, M.: Vishay Shkola, 2001, p. 382.
3. G. Dahlquist. Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations, Math. Scand, 1956, №4, p.33-53.
4. Kobza J. Second derivative methods of Adams type. Aplikace Mathematicky, 1975, №20, p.389-405.
5. Enrite W.H. Second derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations, SIAM, J.Numer.Anal., 1974, №2, p.321-332.
6. Urabe M. An implicit one-step method of high-order accuracy for the numerical integration of ordinary differential equations, Numer.Math., 1970, №2, p.15-164.
7. Ибрагимов В.Р. Об одной связи между порядком и степенью для устойчивой формулы с забеганием вперед. Ж.Вычис. мат. и мат. физ., 1990, № 7, с.1045-1056.
8. Huta A.A. An a priori bound of the discretization error in the integration by multistep difference method for the differential equations $y(s) = f(x, y)$, Acta F.R.N. Univer. Comen. Math., 1979, №34, p.51-56.
9. J.O. Ehigie, S.A.Okunuga, A.B. Sofoluwe, M.A.Akanbi. On generalized 2-step continuous linear multistep method of hybrid type for the integration of second order ordinary differential equations. Archives of Applied Research, 2010, 2(6), p.362-372.
10. P.C. Hammer, J.W. Hollingsworth, trapezoidal methods of approximating solution of differential equations, MTAC. 1955, v.9, p.92-96.
11. C.S Gear. Hybrid methods for initial value problems in ordinary differential equations. SIAM, J. Numer. Anal. 1965, v. 2, p. 69-86.
12. Ибрагимов В.Р. Один нелинейный метод численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, Дифференциальные уравнения и их применения. Труды второй конференции, Руссе, Руссе, Болгария, 29 июня-4 июля, 1981, с.310-319.
13. Modern numerical methods for ODE. Edited by G.Holl, T.M.Uatt, Moscow, 1979, 312 p.
14. V.R. Ibrahimov. On the maximum degree of the k-step Obrechhoff's method. Bulletin of Iranian Mathematical Society, 2002, v. 20, №1, p.1-28.

YÜKSƏK TƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN ƏDƏDİ HƏLLİNƏ HİBRİD ÜSULLARIN BİR TƏTBİQİ

G.Yu.MEHDİYEVA, V.R.İBRAHİMOV, M.N.İMANOVA

XÜLASƏ

Məlumdur ki, bir çox elmi-texniki və tətbiqi məsələlər adi diferensial tənliklərin həllinə gətirilir. Bu tənliklərin dəqiq həllərinin həmişə tapılması mümkün olmadığı üçün bir çox alimlər tərəfindən onların həllinə təqribi üsullar tətbiq olunur. XX əsrdə bu üsulların ən çox tanınmış nümayəndələri Runqe-Kutta və Adams üsullarıdır. Bu üsulların üstün və çatışmayan cəhətlərini nəzərə alaraq XX əsrin ortalarında alimlər yeni hibrid üsullar qurdular. Hibrid üsullar uyğun Runqe-Kutta və Adams üsullarına nisbətən daha dəqiq idilər.

Bu məqalədə ikinci tərtib adi diferensial tənliklərin ədədi həlli üçün məlum çoxaddımlı və hibrid üsulları ümumiləşdirən bir üsul qurulmuşdur. Qeyri-aşkar üsulların daha dəqiq olduğunu nəzərə alaraq hibrid üsulların qeyri-aşkar forması təyin olunmuş və $k \leq 2$ olduqda dəqiqlik dərəcəsi $p = 6$ olan konkret hibrid üsul qurulmuş və onun yuxarıda qeyd olunan məsələlərin həllinə tətbiq olunması üçün bir sxem verilmişdir.

Açar sözlər: hibrid üsul, Koşi məsələsi, yüksək tərtibli adi diferensial tənliklər, sabit əmsallı çoxaddımlı üsul

AN APPLICATION OF THE HYBRID METHODS TO THE NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER

G.Yu.MEHDİYEVA, V.R.İBRAHİMOV, M.N.İMANOVA

SUMMARY

Apparently, many scientific technical and applied problems are reduced to solving ordinary differential equation whose exact solution is not always succeeded to find. Therefore, many scientists applied approximate methods for their solution. In the XX century, the Runge-Kutta and Adams type numerical methods were more popular among these methods. Taking into account the advantage and storages of these methods, in the middle of the XX century the scientists constructed a new class of methods and called them hybrid ones. The constructed hybrid methods were more precise than appropriate Runge-Kutta and Adams methods. Here, for the solution of ODE of the second order we construct a new class of hybrid methods of multistep type that generalizes the known multistep and hybrid methods. Taking into account that implicit methods are more precise, we consider a question on the definition of the implicit character of hybrid methods and construct methods with the order of accuracy $p = 6$ for $k = 2$ and suggested a way for its application in the solution of the above mentioned problem.

Key words: hybrid method, initial value problem, ODE of higher order, multistep method with the constant coefficients

Поступила в редакцию: 02.05.2011 г.

Подписано к печати: 03.10.2011 г.