УДК 512.57

НЕКОТОРЫЕ ТОЛЕРАНТНОСТИ РЕШЕТОК ЧЕЛЯКОВСКОГО

Л.К.ГАСАНОВА, А.А.ГУСЕЙНОВА, О.М.МАМЕДОВ
Бакинский Государственный Университет
Lehasan@gmail.com, Afahusein@gmail.com, Okmamedov@gmail.com

В 2008 году Я. Челяковский ввёл понятие решётки с коммутаторной делимостью. В настоящей работе показывается, что каждой коммутаторной делимости соответствует некоторая система толерантностей этой решётки. Более того, некоторые из этих толерантностей образуют inf-подполурешётку решётки всех толерантностей.

Ключевые слова: решётка, толерантность, решётка толерантностей.

Работа посвящена толерантностям решёток, наделенных дополнительной бинарной операцией (так называемой, *коммутаторной делимостью*); исторически решётки с делимостью появились как обобщения решёток идеалов колец (см. обзор [10]; подробно - в [7]). Решётки с коммутаторной делимостью были введены в обиход недавно Я. Челяковским (удобно называть их *решётками Челяковского*; см.[4]) в связи с развитием коммутаторного исчисления в дедуктивных системах логики (см. [5]). Сама же коммутаторная теория, утвердившаяся в рамках конгруэнц-модулярных многообразий [6] универсальных алгебр, распространилась далее и в теорию категорий (см., напр., [8], [9]).

Алгебраической теории толерантностей посвящена монография [2]. Хорошо известно, что множество всех толерантностей произвольной алгебры A образует алгебраическую решётку Tol(A) (о её свойствах для общих решёток см., напр., в [3]). Толерантности решеток подробно рассматривались впервые Г. Бандельтем [1], а Д. Швайгерт [12] обнаружил связь между толерантностью и коммутатором. В дальнейшем эта связь была расширена на более широкий класс толерантностей [11].

Целью настоящей работы является выявление толерантностей, возникающих в решётках Челяковского; используемая при этом техника навеяна работами [11] и [12].

1^0. Алгебры и решётки Челяковского

Алгеброй Челяковского $\mathbb{L} = (L; \wedge, \vee, \rightarrow)$ называется (в [4] эта алгебра названа решеткой с коммутаторной делимостью) полная решётка $(L; \wedge, \vee)$, наделённая бинарной операцией $\rightarrow$, удовлетворяющей для любых элементов $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{L}$ и любого подмножества $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{L}$ следующим пяти аксиомам:

(a) если $a \leq b$, то $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$;
(b) $a \rightarrow \bigwedge X = \bigwedge\{a \rightarrow x | x \in X\}$;
(c) $b \leq a \rightarrow (a \wedge b)$;
(d) $a \leq b \rightarrow c$ тогда и только тогда, когда $b \leq a \rightarrow c$;
(e) если $a \leq b$, то $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$.

Соответствующая решётка $\mathbb{L} = (L; \wedge, \vee)$ будет называться *решёткой Челяковского*. Наибольший и наименьший элементы $\mathbb{L}$ обозначаем через **1** и, соответственно, $\mathbf{0}$.

Замечание 1. (1) В аксиоме (c) положим $b = \mathbf{1}$. Тогда имеем: $\mathbf{1} \leq a \rightarrow (a \wedge \mathbf{1}) = a \rightarrow a$. Итак $a \rightarrow a = \mathbf{1}$ для всех $a \in L$; в частности, $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{1}$.

(2) Из аксиом (c) и (b) получаем: $b \leq a \rightarrow (a \wedge b) = (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b) = \mathbf{1} \wedge (a \rightarrow b) = (a \rightarrow b)$; итак, $b \leq a \rightarrow b$ для всех $a, b \in L$.

(3) Положив в аксиоме (a) $b = \mathbf{1}, c = a$, будем иметь: $a \rightarrow a \leq a \rightarrow \mathbf{1}$. Следовательно, $\mathbf{1} = a \rightarrow a = a \rightarrow \mathbf{1}$ для всех $a \in L$. В частности, $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Более того, из (a) при $a = \mathbf{0} = c$ имеем: $\mathbf{1} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0} \leq \mathbf{0} \rightarrow b$. Итак, $\mathbf{0} \rightarrow b = \mathbf{1}$ для любого $b \in L$.

(4) В аксиоме (a) положим $c = a$. Тогда имеем: $\mathbf{1} = a \rightarrow a \leq a \rightarrow b$. Следовательно, для всех $a \leq b$ будем иметь: $a \rightarrow b = \mathbf{1}$.

Нижеприводимое утверждение доказано в [4] с помощью коммутаторов, но мы даем прямое доказательство.

Утверждение 1. [4] Пусть $\mathbb{L}$ - алгебра Челяковского. Тогда для любого элемента $a \in L$ и любого подмножества $X \subseteq L$ справедливо равенство:

$$(\tilde{b}) \qquad \bigvee X \to a = \bigwedge\{x \to a | x \in X\}\,.$$

Доказательство. Очевидно, $x \leq \bigvee X$ для любого элемента $x \in X$. Тогда по аксиоме (e) получаем: $\bigvee X \to a \leq x \to a$. Следовательно, $\bigvee X \to a \leq \bigwedge\{x \to a|\, x \in X\}$. Пусть y есть некоторая нижняя грань множества $\{x \to a|x \in X\}$, т.е. $y \leq x \to a$ для всех $x \in X$. Тогда согласно аксиоме (d), $x \leq y \to a$ и, следовательно, $\bigvee X \leq y \to a$. Опять применив сюда аксиому (d) получим: $y \leq \bigvee X \to a$. Итак, $\bigvee X \to a$ является точной нижней гранью множества $\{x \to a|\, x \in X\}$. Таким образом, равенство $(\tilde{b})$ доказано. □

Замечание 2. Из утверждения 1 имеем: $\bigvee X \to \mathbf{0} = \bigwedge\{x \to \mathbf{0}|\, x \in X\}$ для любого подмножества $X \subseteq L$ алгебры Челяковского $\mathbb{L}$.

Удобно называть элемент $x \in L$ *ложным*, если $x \to \mathbf{0} = \mathbf{1}$; напр., $x = \mathbf{0}$ - ложный элемент. Согласно замечанию 2, в алгебре Челяковского $\mathbb{L}$ существует наибольший ложный элемент **Л**. Главный идеал (**Л**] в $\mathbb{L}$, порождённый этим элементом **Л**, состоит в точности из всех ложных элементов $\mathbb{L}$. Двойственное понятие *истинного* элемента $x \in L$ естественно определяется так: $\mathbf{1} \to x = \mathbf{1}$; напр., $x = \mathbf{1}$ - истинный элемент. В $\mathbb{L}$ существует наименьший истинный элемент **И** и главный фильтр [**И**) состоит в точности из всех истинных элементов.

2^0. Толерантность

Для алгебры Челяковского $\mathbb{L} = (L; \wedge, \vee, \to)$ и элемента $a \in L$ определим бинарное отношение $t(a) \subseteq L \times L$ так: $(x, y) \in t(a)$ тогда и только тогда, когда $a \leq x \to y$ и одновременно $a \leq y \to x$.

Теорема 1. Пусть $\mathbb{L} = (L; \wedge, \vee)$ - решётка Челяковского. Для каждого фиксированного элемента $a \in L$ отношение $t(a)$ является толерантностью этой решётки $\mathbb{L}$.

Доказательство. Поскольку $a \leq x \to x = \mathbf{1}$ для любого $x \in L$, то $t(a)$ - рефлексивное отношение. Симметричность автоматически следует из определения $t(a)$. Докажем устойчивость $t(a)$ относительно решёточных операций.

Пусть $(x, y), (z, t) \in t(a)$. Тогда $a \leq x \to y$ & $a \leq z \to t$. Следовательно, $(x \vee z) \to (y \vee t) =$ (по утверждению 1) $= \big(x \to (y \vee t)\big) \wedge$

$(z \to (y \vee t)) \geq$ (по аксиоме (a)) $\geq (x \to y) \wedge (z \to t) \geq a \wedge a = a$. Аналогично доказывается второе неравенство: $a \leq (y \vee t) \to (x \vee z)$. Итак, отношение $t(a)$ совместимо с операцией $\vee$.

Теперь докажем совместимость $t(a)$ с операцией $\wedge$. Пусть $a \leq x \to y$ & $a \leq z \to t$. Рассмотрим элемент $(x \wedge z) \to (y \wedge t)$. По аксиоме (b) получим: $(x \wedge z) \to (y \wedge t) = [(x \wedge z) \to y] \wedge [(x \wedge z) \to t] \geq$ (по аксиоме (e)) $\geq [x \to y] \wedge [z \to t] \geq a \wedge a = a$. Другое неравенство: $a \leq (y \wedge t) \to (x \wedge z)$ доказываем аналогично. □

Лемма 1. Если $a \leq b$ в $\mathbb{L}$, то выполнено включение $t(b) \subseteq t(a)$.

Доказательство почти очевидно: если $(x, y) \in t(b)$, то $b \leq x \to y$ и $b \leq y \to x$. В частности, $a \leq x \to y$ и $a \leq y \to x$. Итак $(x, y) \in t(a)$. □

Лемма 2. Для любых элементов a, b решётки $\mathbb{L}$ справедливо равенство:

$$t(a) \cap t(b) = t(a \vee b).$$

Доказательство. Поскольку $a \leq a \vee b$, то по лемме 1.1, $t(a) \cap t(b) \supseteq t(a \vee b)$. С другой стороны, пусть $(x, y) \in t(a) \cap t(b)$, т.е. $a \leq x \to y$ & $a \leq y \to x$ и одновременно $b \leq x \to y$ & $b \leq y \to x$. Эти условия влекут, что $a \vee b \leq x \to y$ & $a \vee b \leq y \to x$, т.е. $(x, y) \in t(a \vee b)$. Итак, равенство $t(a) \cap t(b) = t(a \vee b)$ доказано. □

Из этой леммы легко вытекает доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. Множество всех толерантностей вида $\{t(a) | \ a \in L\}$ образует $\cap$–подполурешётку в алгебраической решётке $Tol(\mathbb{L})$ всех толерантностей решётки Челяковского $\mathbb{L}$ с наибольшим элементом $d(\mathbf{0}) = L \times L$ и наименьшим элементом $d(\mathbf{1})$ (помимо всех диагональных здесь вообще говоря возможны и недиагональные пары).

3^0. Разные типы толерантностей

Здесь мы разнообразим конструкцию пункта 2^0. Пусть дана алгебра Челяковского $\mathbb{L} = (L; \wedge, \vee, \to)$ и зафиксирован элемент $\bar{a} := (a_1, \dots, a_n) \in L^n$. Определим бинарное отношение $t(\bar{a}) \subseteq L \times L$ так:

$$(x, y) \in t(\bar{a}) \overset{Def}{\Longleftrightarrow} x \leq a_1 \to (a_2 \to \cdots (a_{n-1} \to (a_n \to y)) \dots) \quad \& \quad y \leq a_1 \to (a_2 \to \cdots (a_{n-1} \to (a_n \to x)) \dots).$$

Теорема 3. Для каждого фиксированного элемента $\bar{a} \in L^n$ решётки Челяковского отношение $t(\bar{a})$ является толерантностью.

Доказательство. По второму замечанию пункта 1^0, $x \leq a \to x$. Многократно применив к этому неравенству аксиому (a), получим: $x \leq a_1 \to (a_2 \to \cdots (a_{n-1} \to (a_n \to y)) \dots)$; итак, $t(\bar{a})$ – рефлексивно. Очевидно, что $t(\bar{a})$
симметрично.

Пусть $(x, y), (z, t) \in t(\bar{a})$. Докажем, что $(x \vee z, y \vee t) \in t(\bar{a})$. Имеем:
$x \leq a_1 \to (a_2 \to \cdots (a_{n-1} \to (a_n \to y)) \dots) \leq \big(\text{по аксиоме } (a)\big) \leq a_1 \to$
$(a_2 \to \cdots (a_{n-1} \to (a_n \to (y \vee t))) \dots)$.
Аналогично, $z \leq a_1 \to \big(a_2 \to \cdots \big(a_{n-1} \to (a_n \to t)\big) \dots\big) \leq a_1 \to$
$\cdots \big(a_n \to (y \vee t)\big) \dots$. Поэтому $x \vee z \leq a_1 \to \cdots \to \big(a_n \to (y \vee t)\big) \dots$.
Точно так же
доказывается второе неравенство: $y \vee t \leq a_1 \to \cdots \to \big(a_n \to (x \vee z)\big) \dots$.

Теперь докажем, что $(x \wedge z, y \wedge t) \in t(\bar{a})$. Поскольку $x \leq a_1 \to$
$\big(a_2 \to \cdots \big(a_{n-1} \to (a_n \to y)\big) \dots\big)$ и $z \leq a_1 \to \big(a_2 \to \cdots \big(a_{n-1} \to$
$(a_n \to t)\big) \dots\big)$, то $x \wedge z \leq [a_1 \to \cdots \to (a_n \to y) \dots] \wedge [a_1 \to \cdots \to$
$(a_n \to t) \dots]$ $=$
(после многократного применения аксиомы (b) последовательно для элементов $a_1, \dots, a_n$) $= a_1 \to \cdots \to (a_n \to (y \wedge t) \dots)$. Аналогично доказываем второе неравенство: $y \wedge t \leq a_1 \to \cdots \to \big(a_n \to (x \wedge z)\big) \dots$. □

Обобщением леммы 1 является

Лемма 3. Если $\bar{a} \leq \bar{b}$ (т.е. $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$), то $t(\bar{b}) \subseteq t(\bar{a})$.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in t(\bar{b})$. Тогда, в частности, $x \leq b_1 \to \cdots \to (b_n \to y) \dots$. Поскольку $a_1 \leq b_1$, то по аксиоме (e) $x \leq b_1 \to (b_2 \to \cdots \to (b_n \to y) \dots) \leq a_1 \to (b_2 \to \cdots \to (b_n \to y) \dots)$. Продолжая по этой схеме, через n шагов получим требуемое неравенство: $x \leq a_1 \to \cdots \to (a_n \to y) \dots$. Аналогично доказывается второе неравенство: $y \leq a_1 \to \cdots \to (a_n \to x) \dots$. Итак, $(x, y) \in t(\bar{a})$. □

Обозначим элемент $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in L^n$ через $\overline{aa_{n+1}}$; при этом $\bar{a} := (a_1, \dots, a_n)$. Тогда легко проверить,что если $(x, y) \in t(\bar{a})$, то $(x, y) \in t(\overline{aa_{n+1}})$; следовательно, $t(\bar{a}) \subseteq t(\overline{aa_{n+1}})$.

Лемма 4. $t(\bar{a}) \circ t(\bar{a}) \subseteq t(\overline{aa})$; здесь $\circ$ - композиция отношений и $\overline{aa} := (a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n)$.

Доказательство. Пусть $(x,y) \in t(\bar{a}) \circ t(\bar{a})$. Тогда существует $z \in L$ такой, что $(x,z) \in t(\bar{a})$ & $(z,y) \in t(\bar{a})$. Тогда $x \le a_1 \to \cdots \to (a_n \to z) \dots$ и $z \le a_1 \to \cdots \to (a_n \to y)$. Многократно применив аксиому (a), отсюда будем иметь: $x \le a_1 \to \cdots \to \big(a_n \to (a_1 \to \cdots \to (a_n \to y) \dots)\big) \dots$. Аналогично доказывается другое неравенство: $x \le a_1 \to \cdots \to \big(a_n \to (a_1 \to \cdots \to (a_n \to y) \dots)\big) \dots$. Итак, $(x,y) \in t(\overline{aa})$. □

Лемма 5. $t(\overline{aa}) \subseteq t(\bar{a}) \circ t(\bar{a})$.

Доказательство. Пусть $(x,y) \in t(\overline{aa})$. Бандельт [1] доказал, что в любой решётке L пара (x,y) принадлежит некоторой толерантности ξ тогда и только тогда, когда $(x \wedge y, x \vee y) \in \xi$. Поэтому можно заранее считать, что $x \le y$. Имеем: $x \le a_1 \to \cdots \to \big(a_n \to (a_1 \to \cdots \to (a_n \to y) \dots)\big) \dots$ и $y \le a_1 \to \cdots \to \big(a_n \to (a_1 \to \cdots \to (a_n \to x) \dots)\big) \dots$. Положим $z = a_1 \to \cdots \to (a_n \to x) \dots$.
Тогда $(x,z) \in t(\bar{a})$, ибо $a_1 \to \cdots \to (a_n \to z) \dots = a_1 \to \cdots \to \big(a_n \to (a_1 \to \cdots \to (a_n \to x) \dots)\big) \dots \ge x$ и, очевидно, $z \le a_1 \to \cdots \to (a_n \to x) \dots$.

Далее, $(z,y) \in t(\bar{a})$, ибо $x \le y$ и потому $z = a_1 \to \cdots \to (a_n \to x) \dots \le a_1 \to \cdots \to (a_n \to y) \dots$. С другой стороны, по условию $(x,y) \in t(\overline{aa})$; поэтому верно неравенство:
$a_1 \to \cdots \to (a_n \to z) \dots = a_1 \to \cdots \to \big(a_n \to (a_1 \to \cdots \to (a_n \to x) \dots)\big) \dots \ge y$. Итак, $(x,y) \in t(\bar{a}) \circ t(\bar{a})$. □

Из лемм 4 и 5 немедленно вытекает такое

Следствие 1. Для любого элемента $\bar{a} \in L^n$ толерантность $t(\bar{a})$ решётки Челяковского $\mathbb{L}$ удовлетворяет равенству $t(\bar{a}) \circ t(\bar{a}) = t(\overline{aa})$.

Теперь установим критерии конгруэнтности для $t(\bar{a})$.

Теорема 4. Пусть $\mathbb{L} = (L; \wedge, \vee)$ - решётка Челяковского и зафиксирован элемент $\bar{a} \in L^n$. Следующие условия эквивалентны:

(1) отношение $t(\bar{a})$ транзитивно (т.е. $t(\bar{a})$ является конгруэнцией $\mathbb{L}$) ;

(2) $t(\bar{a}) \circ t(\bar{a}) = t(\overline{aa})$;

(3) для любого $x \in L$

$a_1 \to \cdots \to \big(a_n \to (a_1 \to \cdots \to (a_n \to x) \dots)\big) \dots = a_1 \to \cdots \to (a_n \to x) \dots$.

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Если $t(\bar{a})$ транзитивно, то $t(\bar{a}) = t(\bar{a}) \circ t(\bar{a})$. Теперь по следствию 1 имеем: $t(\bar{a}) = t(\overline{aa})$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Обозначим левую часть равенства в пункте (3) через y. Тогда очевидно, $y \le a_1 \to \dots \to \big(a_n \to (a_1 \to \dots \to (a_n \to x) \dots)\big) \dots$ (здесь фактически – равенство) и $x \le a_1 \to \dots \to \big(a_n \to (a_1 \to \dots \to (a_n \to y) \dots)\big) \dots$ (достаточно вместо y подставить его значение и последовательно применять очевидное неравенство $x \le b \to x$ для всех $b, x \in L$). Итак, $(x, y) \in t(\overline{aa})$. Тогда $(x, y) \in t(\bar{a})$. В частности это влечёт: $y \le a_1 \to (a_2 \to \dots \to (a_n \to x) \dots)$. С другой стороны, обратное неравенство $y \ge a_1 \to (a_2 \to \dots \to (a_n \to x) \dots)$ также очевидно. Итак, $y = a_1 \to (a_2 \to \dots \to (a_n \to x) \dots)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $(x, y) \in t(\overline{aa})$. Тогда
$y \le a_1 \to \dots \to \big(a_n \to (a_1 \to \dots \to (a_n \to x) \dots)\big) \dots = a_1 \to \dots \to (a_n \to x) \dots$. Аналогично, $x \le a_1 \to (a_2 \to \dots \to (a_n \to y) \dots)$. Итак, $(x, y) \in t(\bar{a})$ и потому $t(\overline{aa}) \subseteq t(\bar{a})$. По следствию 1, $t(\bar{a}) \circ t(\bar{a}) = t(\overline{aa})$; поэтому $t(\bar{a}) \circ t(\bar{a}) \subseteq t(\bar{a})$, - транзитивность доказана. □

Хотя и для толерантностей вида $t(\bar{a})$ не удается получить полный аналог теоремы 2, тем не менее, для некоторых таких толерантностей (задаваемых элементами специального типа) это можно сделать. Для этого введём такое обозначение: $\overline{u(v)} := (u, v, \dots, v) \in L^n$. При этом $t(\,\overline{u(v)}\,) \subseteq L \times L$ есть толерантность типа $t(\bar{a})$ для $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) = (u, v, \dots, v) = \overline{u(v)} \in L^n$.

Лемма 6. Для любых элементов u, v, w решётки Челяковского имеем:

$$t\big(\,\overline{u(v)}\,\big) \cap t\big(\,\overline{w(v)}\,\big) = t\big(\,\overline{u(v)} \vee \overline{w(v)}\,\big) = t(\,\overline{[u \vee w](v)}\,)\,,$$

здесь $\overline{u(v)} \vee \overline{w(v)} = (u, v, \dots, v) \vee (w, v, \dots, v) = (u \vee w, v, \dots, v) = \overline{[u \vee w](v)}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2. □

Как следствие отсюда вытекает аналог теоремы 2.

Теорема 5. Для любого фиксированного элемента $v \in L$ решётки Челяковского $\mathbb{L}$ множество $D(v) := \big\{\, d\big(\,\overline{u(v)}\,\big) \,\big|\, u \in L \,\big\}$ образует *inf*–подполурешётку решётки $Tol(\mathbb{L})$ всех толерантностей с наименьшим элементом $t(\,\overline{\mathbf{1}(v)}\,)$ и наибольшим элементом $t\big(\,\overline{\mathbf{0}(v)}\,\big) = t(\overline{\mathbf{0}}) = L \times L$. Если $v \le w$ в $\mathbb{L}$, то существует $\wedge$–гомоморфизм

$$D(v) \longrightarrow D(w):\;\; t(\,\overline{u(v)}\,) \longmapsto t(\,\overline{u(w)}\,)\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bandelt H.-J. Tolerance relations on lattices// Bull. Austral. Math. Soc., 1981, v.23, № 3, p. 367-381.
2. Chajda I. Algebraic theory of tolerance relations. Olomouc: “Univerzita Palackeho” Press, 1991, 119 p.
3. Czedli G., Horvath E. K., Radeleczki S. On tolerance lattices of algebras in congruence modular varieties// Acta math. Hungar., 2003, v.100, №1-2, p. 9-17.
4. Czelakowski J. Additivity of the commutator and residuation// Reports on Math. Logic, 2008, v. 43, p. 109-132.
5. Czelakowski J. General theory of the commutator for deductive systems. Part I: Basic facts// Studia Logica, 2006, v. 83, №1-3, p. 183-214.
6. Freese R., McKenzie R. Commutator theory for congruence modular varieties. New York: Cambridge University Press, 1987, vii+227 p.
7. Galatos N., Jipsen P., Kowalski T., Ono H. Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics. Amsterdam: Elsevier (Studies in Logic, v. 151), 2007, xxi+509 p.
8. Janelidze G., Pedicchio. Pseudogroupoids and commutators//Theory and Appl. Categories, 2001, v. 19, №15, p. 408-456.
9. Jibladze M., Pirashvili T. Linear extensions and nilpotence of Maltsev theories// Beitrage zur Algebra und Geometrie, 2005, v. 46, №1, p.71-102.
10. Jipsen P., Tsinakis C. A survey of residuated lattices/ In: “Ordered Algebraic Structures” (J. Martinez, editor), Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2002, p. 19-56.
11. Mamedov O.M. Tolerance relations and a commutator on a complete lattice// Proc. IMM Azer. AS, 2003, v. 18, p. 85-90.
12. Schweigert D. Tolerances and commutators on lattices// Bull. Austral. Math. Soc., 1988, v. 37, p. 213-218.

ÇELYAKOVSKİ QƏFƏSLƏRİNİN BƏZİ TOLERANTLIQLARI

L.К.HƏSƏNOVA, A.Ə.HÜSEYNOVA, O.M.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

B 2008-ci ildə Çelyakovski kommutator bölgüsü olan qəfəs anlayışı daxil etmişdir. Biz göstəririk ki, bu qəfəsin hər bir kommutator bölgüsünə uyğun toletantlıqlar sistemi var. Bundan başqa, bəzi belə toletantlıqlar bütün toletantlıqlar qəfəsində *inf*-altyarımqəfəs təşkil edir.

Açar sözlər: qəfəs, tolerantlıq, tolerantlıqlar qəfəsi.

SOME TOLERANCES OF CZELAKOWSKI LATTICES

L.К.HASANOVA, A.A.HUSEINOVA, O.M.MAMEDOV

SUMMARY

In 2008, J.Czelakowski introduced the notion of a lattice with a commutator residuation. We show that, to every commutator residuation of this lattice corresponds a system of tolerances. Moreover, some of such tolerances constitute an inf-subsemilattice of the lattice of tolerances.

Key words: lattice, tolerance, lattice of tolerances

Поступила в редакцию: 31.05.2011 г.
Подписано к печати: 19.12.2011 г.