ГЛАВА IV

$SU(2)$ – МОДЕЛЬ НАМБУ-ИОНА-ЛАЗИНИО В РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМ ЕВКЛИДОВЫМ ОБРЕЗАНИЕМ

Поскольку в основе модели НИЛ лежит неперенормируемое четырехфермионное взаимодействие, то весьма существенным моментом применения модели является регуляризация [107, 132, 184, 191, 198]. В научной литературе уже много раз высказывалось мнение о том, что в разных регуляризациях модель НИЛ приводит к разным физическим результатам. С выбором регуляризации существенным образом отличаются модели. Поэтому модели являются абсолютно разными [34, 41, 183, 184]. В применении к наиболее употребляемым регуляризациям модели НИЛ (таким, например, как регуляризация с четырехмерным обрезанием в евклидовом пространстве импульсов в сравнении с регуляризацией “собственного времени” Фока-Швингера или регуляризацией Паули-Вилларса) это утверждение не придает сколько-нибудь принципиального различия в описании основных эффектов в рамках главного приближения модели. В следующем, за главным порядком, включающем в себя мезонные вклады в киральный конденсат и поправки к пропагатору кварка, эти различия проявляются отчетливее (см., например [100, 147, 155, 171, 185] и цитируемые там литературы), но и тут они не меняют существенно физического содержания модели. Существует, однако, регуляризация модели НИЛ [170], в которой физические эффекты отличаются от эффектов классического варианта модели, основанного на регуляризации с 4-мерным обрезанием уже на уровне двухчастичных амплитуд. Это размерная регуляризация, рассматриваемая как вариант аналитической регуляризации. Такая трактовка размерной регуляризации была развита для модели НИЛ в приближении среднего поля в главе III, где в рамках этой регуляризации были вычислены мезонные вклады в киральный конденсат [28, 34, 38, 38].

В предлагаемой главе мы проводим систематическое исследование $SU(2)$-модели НИЛ в регуляризации с 4-мерным обрезанием. В разделе 4.1

приведены результаты главного приближения для кирального конденсата и двухчастичных амплитуд. В разделах 4.2 - 4.3 приводятся основные различия в следующем за главным порядке РСП, поскольку основными результатами являются вычисления, проделанные в этом порядке. Помимо поправок к киральному конденсату нами здесь вычислены также поправки к массе кварка. При сравнении результатов размерно-аналитической регуляризации этот вклад того же знака, что и главный, а в регуляризации с 4-мерным обрезанием – противоположного. Это различие является определяющим при решении вопроса об устойчивости модели относительно квантовых флюктуаций, вызываемых мезонными амплитудами. В разделе 4.3 проведена фиксация параметров модели с учетом мезонных поправок. При этом оказывается, что противоположность знака мезонных вкладов со знаком главного приближения могут приводить к дестабилизации. Эта дестабилизация проявляется в том, что само существование набора параметров модели оказывается критически зависящим от значения кирального конденсата c : при $|c| \leq 230\, МэВ$ система уравнений для параметров модели не имеет решения. Таким образом, $SU(2)-$модель НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием оказывается в опасной зоне нестабильности относительно квантовых флюктуаций, причем простая оценка показывает, что для $U(3)-$модели ситуация может только ухудшится. Этот наш результат в известной мере перекликается с утверждением работы [166] (вызвавшей активную дискуссию [100, 109, 183, 197]), в которой применимость модели НИЛ с регуляризацией с 4-мерным обрезанием к описанию явления ДНКС ставится под сомнение.

4.1. Двухчастичная амплитуда и параметры модели в главном приближении

В настоящем разделе исследуется соотношение между конденсатами первого шага РСП и главного приближения в полюсном приближении амплитуд в $SU(2)-$модели НИЛ.

Лагранжиан теории описывается формулой (3.76).

В главном приближении единственной связной функцией является пропагатор кварка

$$S_{cd,\,jk} = \delta_{cd}\delta_{jk}\left(m - \hat{p}\right)^{-1}, \tag{4.1}$$

где динамическая масса кварка m есть решение уравнения самосогласования

$$m = -8ign_c m \int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - q^2}. \tag{4.2}$$

В евклидовом пространстве импульсов уравнение (4.2) примет вид

$$1 = \frac{gn_c}{2\pi^2} \int \frac{q_e^2 dq_e^2}{m^2 + q_e^2}. \tag{4.3}$$

Введем в подынтегральное выражение весовую функцию $w\left(q_e^2\right)$, вид которой будет определять выбор регуляризации. Для 4-мерного обрезания весовая функция выбирается в виде [41, 155].

$$w_\Lambda\left(q_e^2\right) = \theta\left(\Lambda^2 - q_e^2\right) \tag{4.4}$$

и уравнение самосогласования (4.3) принимает вид

$$1 = \kappa_\Lambda \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right) \tag{4.5}$$

(это соотношение в точности соответствует классическому результату [169, 181, 182]), где

$$\kappa_\Lambda = \frac{gn_c\Lambda^2}{2\pi^2}. \tag{4.6}$$

Основным параметром порядка, определяющего степень ДНКС, является величина

$$\chi = \langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle = itrS(x)\big|_{x\to 0},$$

где след берется по всем дискретным индексам. Легко видеть, что в главном порядке из формул (4.1) и (4.2) следует

$$\chi^{(0)} = itrS(x)\big|_{x\to 0} = -\frac{m}{g}. \tag{4.7}$$

Отметим, что эта формула не зависит от регуляризации.

Кварковый киральный конденсат c определяется для каждого аромата в отдельности и в рассматриваемом здесь в киральном пределе есть величина:

$$c = \left(\frac{\chi}{2}\right)^{1/3}. \tag{4.8}$$

Двухчастичная амплитуда первого шага A (связная часть ампутированной двухчастичной функции) имеет следующую цветовую и ароматовую структуру [41]

$$A^{cd,jk}_{c'd',j'k''} = \delta^{cd}\delta^{c'd'}\left[\delta_{jk}\delta_{j'k'}A_\sigma + \tau^a_{jk}\tau^a_{j'k'}A_\pi\right]. \tag{4.9}$$

Здесь амплитуды A_σ и A_π зависят только от одной импульсной переменной p – суммы импульсов кварка и антикварка и имеют вид

$$A_\sigma = \frac{1}{4n_c\left(4m^2 - p^2\right)I_0(p^2)}, \tag{4.10}$$

$$A_\pi = \frac{1}{4n_c p^2 I_0(p^2)}, \tag{4.11}$$

где интеграл $I_0(p^2)$ определяется формулой (3.44).

Интеграл I_0 также вычисляется в регуляризации с обрезанием:

$$I_0(p^2) = -\frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 du\left[\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - p^2u(1-u) + m^2} - \right.$$

$$\left. - \log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{-p^2u(1-u) + m^2}\right)\right]. \tag{4.12}$$

Полученные выражения для конденсата и двухчастичных амплитуд позволяют фиксировать значения параметров модели в главном приближении РСП. Для этой цели используются не зависящие от регуляризации формулы (4.7), (4.8) и формула для распадной константы пиона (3.103) в модели НИЛ. В это известное выражение входит интеграл $I_0(0)$, который определяется из (4.12) и имеет вид:

$$I_0(0) = \frac{i}{(4\pi)^2}\left[\log\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2}\right]. \tag{4.13}$$

Соответственно отсюда для распадной константы пиона в регуляризации с 4-мерным обрезанием получаем следующую формулу

$$\left(f_\pi^2\right) = \frac{3m^2}{4\pi^2}\left[\log\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2}\right]. \tag{4.14}$$

Эти формулы вкупе с формулами для конденсата (4.7)-(4.8) и уравнением самосогласования (4.5) позволяют нам определить значения основных параметров модели. Из этих формул, а также из формулы (4.6) для константы κ_Λ не трудно получить следующую систему уравнений, связывающую значение распадной константы пиона $f_\pi = 93\ МэВ$, киральный конденсат c, динамическую массу кварка m, параметр регуляризации Λ и безразмерную константу связи κ_Λ

$$\begin{cases} 4\pi^2 f_\pi^2 = m^2 n_c \left[\log\dfrac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - \dfrac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} \right] \\ 4\pi^2 c^3 = -m^3 n_c \left[\dfrac{\Lambda^2}{m^2} - \log\dfrac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right] \end{cases} \qquad (4.15)$$

Результаты фиксации параметров модели НИЛ с 4-мерным обрезанием в главном приближении РСП (при $n_c = 3$) даны в табл. 4.1 [41].

Таблица 4.1

Параметры $SU(2)-$модели НИЛ в регуляризации 4-мерным обрезанием в главном порядке: киральный конденсат c, динамическая масса кварка m, параметр регуляризации Λ и безразмерная константа связи κ_Λ

$c\ (МэВ)$	$m\ (МэВ)$	$\Lambda\ (МэВ)$	$\kappa_\Lambda = 3g\Lambda^2/2\pi^2$
-210	423	733	1.86
-220	323	791	1.448
-230	276	873	1.315
-240	253	947	1.240
-250	236	1029	1.187

Сравним результаты фиксации параметров $SU(2)-$модели НИЛ в регуляризации с 4-мерным обрезанием и в размерно-аналитической регуляризации. Как видно из табл. 3.3 и табл. 4.1, значение основного параметра массы кварка m - в модели с 4-мерным обрезанием гораздо чувствительнее к значению кирального конденсата, чем в модели с размерно-аналитической регуляризацией. В то же время следует отметить, что каких-либо принципиальных отличий в этих вариантах $SU(2)-$модели НИЛ на уровне главного приближения для пропагатора кварка и двухчастичных амплитуд не наблюдается, за исключением поведения скалярной амплитуды A_σ в пороговой области. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Псевдоскалярная амплитуда A_π естественным образом ассоциируется с пионом, который в пределе киральной симметрии является безмассовым голдстоуновским возбуждением, связанным с ДНКС в рассматриваемой модели. В обеих рассматриваемых регуляризациях можно представить полюсное приближение для A_π, соответствующее главной сингулярности псевдоскалярной амплитуды как пропагатор пиона:

$$A_\pi^{pole}(p) = \frac{1}{4n_c I_0(0) p^2}, \tag{4.16}$$

где $I_0(0)$ согласно (3.48) определяется формулой

$$I_0(0) = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\xi}{\kappa} \tag{4.17}$$

для размерно-аналитической регуляризации, и формулой (4.13) для четырехмерного обрезания, соответственно.

Ситуация иная со скалярной амплитудой. Функция $I_0(p^2)$ как для размерно-аналитической регуляризации, так и для 4-мерного обрезания, имеет разрез с началом в точке $p^2 = 4m^2$. Для 4-мерного обрезания, тем не менее, можно определить пропагатор скалярного сигма-мезона как

$$A_\sigma^{pole}(p) = \frac{1}{4n_c I_0(4m^2)(4m^2 - p^2)}, \tag{4.18}$$

поскольку, согласно (4.12)

$$I_0\left(4m^2\right)=\frac{i}{\left(4\pi\right)^2}\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}+\frac{\Lambda}{m}\arctan\frac{m}{\Lambda}\right] \quad (4.19)$$

конечная величина. По-иному обстоит дело в размерно-аналитической регуляризации: величина $I_0^{DAR}\left(4m^2\right)$

$$I_0\left(4m^2\right)\Big|_{\xi<-1/2}=-\frac{i}{8gn_c m^2}\frac{\xi}{1+2\xi}$$

конечна лишь при $\xi<-1/2$.

4.2. Мезонные вклады в киральный конденсат

Уравнения первого шага РСП определяют поправки к пропагатору кварка. Массовый оператор первого порядка $\Sigma^{(1)}$ определяется уравнением (3.49) [41].

В качестве меры мезонных вкладов в киральный конденсат выбирается отношение конденсата первого порядка (3.57) к конденсату главного приближения (3.52)

$$r\equiv\frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}}=r_\sigma+r_\pi=$$

$$=-\frac{8ign_c}{1-8ign_c J}\int\frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}}{\left(m^2-\left(p-q\right)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2}\times$$

$$\times\left[\left(3p^2-2\left(pq\right)+m^2\right)A_\sigma\left(q\right)+3\left(-p^2+2\left(pq\right)+m^2\right)A_\pi\left(q\right)\right]. \quad (4.20)$$

Амплитуды, входящие во выражение (4.20) определяются формулами (4.10) и (4.11), соответственно. Интеграл $I_0(p)$ (3.44), входящий в знаменатель в амплитудах (4.10) и (4.11) вычисляется в регуляризации с 4-мерным евклидовым обрезанием и имеет вид:

$$I_0(q^2) = \frac{i}{(4\pi)^2}\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2} - \frac{4\Lambda^2}{\sqrt{q^2\left(4\left(\Lambda^2+m^2\right)-q^2\right)}}\arctan\sqrt{\frac{q^2}{4\left(\Lambda^2+m^2\right)-q^2}} + \right.$$

$$+2\sqrt{\frac{4\left(\Lambda^2+m^2\right)-q^2}{q^2}}\arctan\sqrt{\frac{q^2}{4\left(\Lambda^2+m^2\right)-q^2}} -$$

$$-2\sqrt{\frac{4m^2-q^2}{q^2}}\arctan\sqrt{\frac{q^2}{4m^2-q^2}} \quad . \qquad (4.21)$$

В вышеуказанном выражении (4.20) также фигурирует интеграл J, который в регуляризации с 4-мерном евклидовым обрезанием, примет вид

$$J = \int d\tilde{p}\,\frac{m^2+p^2}{\left(m^2-p^2\right)^2} = \frac{1}{8ign_c} + 2m^2 I_0(0), \qquad (4.22)$$

где $I_0(0)$ имеет вид (4.13).

Для вычисления отношения конденсатов используем полюсное приближение амплитуд (4.16) и (4.18), т.е. в них используем значения интегралов (4.13) и (4.19), соответственно.

$$r_\sigma = -\frac{8ign_c}{(1-8ign_c J)I_0(4m^2)}\int\frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}\left(3p^2-2(pq)+m^2\right)}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2(4m^2-q^2)}, \qquad (4.23)$$

$$r_\pi = -\frac{6ig}{(1-8ign_c J)I_0}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}\left(-p^2+2(pq)+m^2\right)}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2 q^2}, \tag{4.24}$$

Переходя в евклидовую метрику, вводя стандартную фейнмановскую параметризацию и сдвигая импульсную переменную, мы можем выполнить интегрирование по углам. В соответствии с нашими правилами, далее мы вводим под интеграл весовую функцию (4.4) и вычисляем интегралы для dq_e^2. В итоге получим [37]:

$$r_\sigma = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}\cdot\frac{1}{\log(1+x)+\sqrt{x}\arctan\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\times$$

$$\times\int_0^1 du\int_0^x dz\,\frac{z[1-(3-2u)]}{(1+z)^2}\left[\log\left(1+\frac{x}{4-3u+zu(1-u)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{x}{x+4-3u+zu(1-u)}\right], \tag{4.25}$$

$$r_\pi = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left[\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}\right]^2}\int_0^1 du\int_0^x dz\,\frac{z[1+z(1-2u)]}{(1+z)^2}\times$$

$$\times\left[\log\left(1+\frac{x}{u+zu(1-u)}\right)-\frac{x}{x+u+zu(1-u)}\right], \tag{4.26}$$

где $z=\dfrac{p_e^2}{m^2}$, $x=\dfrac{\Lambda^2}{m^2}$.

Для пионного вклада получаем компактное выражение

$$r_\pi = -\frac{\log(1+x)}{8\left[\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}\right]}. \tag{4.27}$$

При этом, однако не удается получить окончательный компактный вид для r_σ. Обращает на себя внимание тот факт, что как r_σ, так и r_π зависят от отношения квадрата параметра обрезания к квадрату массы кварка , и не зависят от других параметров модели при ($n = 3$). Ниже приведены (см. таб. 4.2) результаты вычислений в области $1 < x < 20$, соответствующей характерным значениям конденсата.

Таблица 4.2

Зависимость вкладов сигма-мезона r_σ и r_π пиона от отношения квадрата параметра обрезания Λ^2 к квадрату массы кварка m^2

r_σ	r_π	$x = \Lambda^2 / m^2$
0	-0.449	1
-0.002	-0.318	2
-0.007	-0.272	3
-0.013	-0.249	4
-0.019	-0.234	5
-0.026	-0.223	6
-0.032	-0.216	7
-0.039	-0.210	8
-0.046	-0.205	9
-0.053	-0.201	10
-0.06	-0.198	11
-0.067	-0.195	12
-0.074	-0.193	13
-0.081	-0.191	14
-0.088	-0.189	15
-0.095	-0.187	16
-0.102	-0.186	17
-0.109	-0.184	18
-0.116	-0.183	19
-0.123	-0.182	20

Выше для вычисления отношения конденсатов использовались выражения для амплитуд (4.16) и (4.18) - приближение главных сингулярностей, т.е. в них применялись значения интегралов (4.13) и (4.19). В рамках регуляризации с 4-мерным обрезанием был уже вычислен интеграл $I_0(p)$ входящий в знаменатель в амплитудах (4.10), (4.11) и который имеет вид (4.21).

Ниже мы будем проводить вычисления отношений конденсата первого порядка к конденсату главного приближения, где нами будут использованы выражения амплитуд без всяких приближений, т. е. вне полюсном приближении амплитуд [37].

Используя выражения (4.10) и (4.11) в (4.20) , в сигма-мезонном и пионном секторах для выяснения отношения конденсатов получим:

$$r_\sigma = -\frac{2ig}{1-8ign_c J}\int \frac{d\tilde{q}}{\left(4m^2-q^2\right)I_0\left(q^2\right)}\int d\tilde{p}\,\frac{3p^2-2pq+m^2}{\left(m^2-p^2\right)^2\left(m^2-\left(p-q\right)^2\right)} \quad , \tag{4.28}$$

$$r_\pi = -\frac{6ig}{1-8ign_c J}\int \frac{d\tilde{q}}{q^2 I_0\left(q^2\right)}\int d\tilde{p}\,\frac{-p^2+2pq+m^2}{\left(m^2-p^2\right)^2\left(m^2-\left(p-q\right)^2\right)} \quad . \tag{4.29}$$

Вычислим (4.28) и (4.29). Переходя в евклидовую метрику, вводя стандартную фейнмановскую параметризацию и сдвигая импульсную переменную, мы можем выполнить интегрирование по углам. В соответствии с нашими правилами, далее мы вводим под интеграл весовую функцию (4.4) и проведя интегрирования по dp_e, введя обозначение $z = q_e^2/m^2$, получим [34, 37]

$$r_\sigma = \frac{gm^2}{8\pi^2 k}\int_0^1 (1-u)du\int_0^x \frac{zdz}{(4+z)I_o(z,x)}\times$$

$$\times\left\{-3\ln\frac{1+u(1-u)z+x}{1+u(1-u)z} - \frac{2(1+u(1-u)z)-5x}{1+u(1-u)z+x} + \frac{2(1+u(1-u)z)^2}{(1+u(1-u)z+x)^2} + \right.$$

$$+uz(1-2u)\left[-\frac{1}{1+u(1-u)z+x}+\frac{1}{2(1+u(1-u)z)}+\frac{1+u(1-u)z}{2(1+u(1-u)z+x)^2}\right]\Bigg\}, \qquad (4.30)$$

$$r_\pi=-\frac{3gm^2}{(4\pi)^2 k}\int_0^1(1-u)du\int_0^x\frac{dz}{I_0(z,x)}\cdot\left\{2\ln\frac{1+u(1-u)z+x}{1+u(1-u)z}-\frac{2x}{1+u(1-u)z+x}-\right.$$

$$\left.-u(3-2u)\frac{zx^2}{(1+u(1-u)z)\cdot(1+u(1-u)z)}\right\}, \qquad (4.31)$$

где

$$k=2\left(k_\Lambda\frac{x}{1+x}-1\right),\quad x=\frac{\Lambda^2}{m^2},\quad k_\wedge=\frac{gn_c\Lambda^2}{2\pi^2},$$

$$I_0(z,x)=\log(1+x)-\frac{4x}{\sqrt{-z(4(1+x)+z)}}\arctan\sqrt{\frac{-z}{4(1+x)+z}}\quad+$$

$$+2\sqrt{\frac{4(1+x)+z}{-z}}\arctan\sqrt{\frac{-z}{4(1+x)+z}}-2\sqrt{\frac{4+z}{-z}}\arctan\sqrt{\frac{-z}{4+z}}\quad .$$

Численные вычисления [32] (4.30) и (4.31) дают возможность сделать следующее заключение: в регуляризации с 4-мерным обрезанием вычисления по точным формулам для амплитуд (4.10) и (4.11) показывают, что приближение главной сингулярности (в данном случае это полюсное приближение как для псевдоскалярной, так и для скалярной амплитуд) дает главный вклад в конденсат. Так, при $x=3$ вычисление по точным формулам (4.30) и (4.31) дает для пионного вклада значение $r_\pi=-0.267$, которое отличается от результата полюсного приближения (см. табл. 4.2) менее чем на 2%. Для сигма вклада это различие более существенно: вычисление по точным формулам дает значение $r_\sigma=-0{,}031$, но поскольку сам этот вклад гораздо меньше пионного, то это различие опять-таки практически не влияет на конечный результат.

4.3. Поправка к массе кварка и параметры модели с учетом поправок к конденсату

Приведенные в разделе 3.5 формулы (3.102), (3.103), (3.106), (3.109)-(3.115) и (3.130), а также формула $\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)} = -\frac{m}{g}(1 + r(x))$ позволяют нам уточнить параметры $SU(2)$ – модели [34, 37, 41].

4.3.1. Вклад пиона

Уравнения (3.114) и (3.115) в пионном секторе имеет вид (3.117) и (3.118). Для вычисления этих уравнений в регуляризации 4-х мерным обрезанием используем полюсное приближение для псевдоскалярной амплитуды (4.16) (с учетом формулы (4.13) для 4-х мерной регуляризации). Проводя стандартную процедуру получим:

$$b_{1\pi}\left(p^2\right) = r_\pi + \frac{3}{4n_c\left[\log\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2}\right]} \times$$

$$\times \int_0^1 du \left[\log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2 u - p^2 u(1-u)}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2 u - p^2 u(1-u)}\right], \qquad (4.32)$$

$$a_{1\pi}\left(p^2\right) = r_\pi + \frac{3}{4n_c\left[\log\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2}\right]} \times$$

$$\times \int_0^1 (1-u) du \left[\log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2 u - p^2 u(1-u)}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2 u - p^2 u(1-u)}\right]. \qquad (4.33)$$

Далее вычисляя интегралы (4.32) и (4.33) при $p^2 = m^2$ согласно формуле для поправки к массе кварка (3.111) получаем:

$$\frac{\delta m^{(\pi)}}{m} = b_{1\pi}\left(m^2\right) - a_{1\pi}\left(m^2\right) = r_\pi + \frac{3}{n_c}\frac{\log(1+x)}{8\left[\log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}\right]}. \tag{4.34}$$

Согласно (4.27) из (4.34) вытекает, что в $SU(2)-$модели НИЛ в регуляризации с 4-мерным обрезанием поправка пиона в массу кварка также как и в $SU(2)-$модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией равна нулю [34, 159]. Можно сделать следующий вывод, что этот факт является особенностью $SU(2)-$модели НИЛ вне выбора регуляризации [34, 159].

4.3.2. Вклад сигма мезона

Теперь исследуем вклад сигма-мезона в конденсат и в массу кварка. Для определения массовых функций первого порядка $a_{1\sigma}$ и $b_{1\sigma}$ в сигма-мезонном секторе в выражениях (3.123) - (3.124) используем полюсное приближение для скалярной амплитуды A_σ

$$A_\sigma^{pole} = \frac{1}{4n_c I_0\left(4m^2\right)\left(4m^2 - p^2\right)},$$

где $I_0\left(4m^2\right)$ вычисляется по формуле (4.12) и имеет вид (4.19).

Итак получаем следующую систему уравнений

$$b_{1\sigma}\left(p^2\right) = r_\sigma + \frac{4i\pi^2}{n_c\left[\log\dfrac{\Lambda^2+m^2}{m^2} + \dfrac{\Lambda}{m}\arctan\dfrac{m}{\Lambda}\right]}\times$$

$$\times\int\frac{d\widetilde{q}}{\left(4m^2-q^2\right)\left(m^2-\left(p-q\right)^2\right)},$$

$$a_{1\sigma}\left(p^2\right)=\frac{4i\pi^2}{n_c\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}+\frac{\Lambda}{m}\arctan\frac{m}{\Lambda}\right]}\times$$

$$\times\int\frac{d\widetilde{q}\left(p^2-pq\right)}{\left(4m^2-q^2\right)\left(m^2-\left(p-q\right)^2\right)}.$$

Вычисление для случая полюсного приближения приводит нас к вычислению интегралов

$$I_0\left(p^2;m^2,\mu^2\right)=\int\frac{d\widetilde{q}}{\left(m^2-\left(p-q\right)^2\right)\left(\mu^2-q^2\right)},$$

$$I_\nu\left(p^2;m^2,\mu^2\right)=\int\frac{q_\mu d\widetilde{q}}{\left(m^2-\left(p-q\right)^2\right)\left(\mu^2-q^2\right)}.$$

Эти интегралы вычисляются по тем же правилам, как было показано выше (см. разделы 4.1 - 4.2) и в регуляризации с 4-мерным обрезанием, приводят нас к следующим выражениям:

$$I_0\left(p^2;m^2,\mu^2\right)=\frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 du\left[\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2u+\mu^2(1-u)-u(1-u)p^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2u+\mu^2(1-u)-u(1-u)p^2}\right],$$

$$I_\nu\left(p^2;m^2,\mu^2\right)=\frac{ip_\nu}{(4\pi)^2}\int_0^1 udu\left[\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2u+\mu^2(1-u)-u(1-u)p^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2u+\mu^2(1-u)-u(1-u)p^2}\right].$$

Для массовых функций первого порядка получим

$$b_{1\sigma}\left(p^2\right)=r_\sigma-\frac{1}{4n_c\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}+\frac{\Lambda}{m}\arctan\frac{m}{\Lambda}\right]}\times$$

$$\times\int_0^1 du\left[\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2(4-3u)-p^2u(1-u)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2(4-3u)-p^2u(1-u)}\right], \tag{4.35}$$

$$a_{1\sigma}\left(p^2\right)=\frac{1}{4n_c\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}+\frac{\Lambda}{m}\arctan\frac{m}{\Lambda}\right]}\times$$

$$\times\int_0^1(1-u)du\left[\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2(4-3u)-p^2u(1-u)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2(4-3u)-p^2u(1-u)}\right]. \tag{4.36}$$

Далее вычисляя интегралы (4.35) и (4.36) при $p^2=m^2$ для поправки сигма-мезона к массе кварка, получим

$$\delta m^{(\sigma)} = m\left(b_{1\sigma}\left(m^2\right) - a_{1\sigma}\left(m^2\right)\right) =$$

$$= m\left(r_\sigma - \frac{4\log(1 + x/4) - \log(1+x)}{8n_c\left[\log(1+x) + \sqrt{x}\arctan\sqrt{\frac{1}{x}}\right]} \right). \tag{4.37}$$

Вычисленные в разделе 4.2 поправки к киральному конденсату вкупе с формулами (3.102) - (3.103), (3.106), (4.13) и $\chi = -\frac{m}{g}(1 + r(x))$ приводит нас к системе алгебраических уравнений для определения улучшенных параметров модели:

$$\begin{cases} m = -\dfrac{c^3}{f_\pi^2} \cdot \dfrac{\log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{x - \log(1+x)}\left(1 + r(x)\right) \\ 1 = \dfrac{3}{4\pi^2} \cdot \dfrac{m^2}{f_\pi^2}\left(\log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}\right) \end{cases}. \tag{4.38}$$

Значения улучшенных параметров модели при $n_c = 3$ даны в табл. 4.3 [41].

В табл. 4.3 не приведены значения параметров при $c = -210\, МэВ$, $c = -220\, МэВ$ и $c = -230\, МэВ$. Это не случайно. Дело в том, что система уравнений (4.38) для определения параметров не имеет вещественных решений при $f_\pi = 93\ МэВ$ и при $|c| \le 230\ МэВ$. Очень важным обстоятельством является то, что в регуляризации с 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут дестабилизировать модель НИЛ. Хотя эти вклады относительно невелики (не превышают 25% от вклада главного приближения), но их отрицательный знак приводит к нестабильности всей системы в целом. Ситуация весьма схожа с той, которая отмечена в работах [166, 167]. Отметим, что при увеличении числа ароматов, т.е. для $U(n_f)$ – модели НИЛ (n_f – число ароматов) ситуация может только ухудшиться, поскольку основной псевдоскалярный вклад пропорционален n_f. В то же время для размерно-аналитической регуляризации ситуация принципиально иная. В виду совпадения знака мезонных вкладов в конденсате и знака конденсата главного приближения в этой регуляризации происходит стабилизация модели, что хорошо видно из табл. 4.1: значения массы кварка m_r очень мало зависят от значений c, а значения параметра регуляризации ξ увеличиваются по сравнению с соответствующими значениями главного приближения и сдвигаются в область стабильности модели, т.е. в ту область, в которой сами эти вклады уменьшаются [41].

Таблица 4.3

Параметры модели с учетом поправок первого порядка (регуляризация четырехмерным обрезанием): киральный конденсат c, динамическая масса кварка m_r, параметр регуляризации Λ и безразмерная константа связи κ_Λ

$c\ (МэВ)$	$m_r\ (МэВ)$	$\Lambda\ (МэВ)$	$\kappa_\Lambda = 3g\Lambda^2/2\pi^2$
-240	310	785	1.501
-250	283	819	1.408

Результаты, представленные в главах III и IV показывают, что модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией существенно отличается от модели НИЛ с регуляризацией с 4-мерным обрезанием по крайней мере в двух аспектах.

Во первых, это различное поведение скалярной амплитуды в пороговой области. В регуляризации с 4-мерным обрезанием вблизи порога можно выделить полюсной член, который обычно ассоциируется со скалярной частицей – сигма-мезоном (отметим, однако, что обоснованные сомнения в возможности такой интерпретации были высказаны еще в работе основоположников модели [181, 182]). В размерно-аналитической регуляризации особенностью скалярной амплитуды при физических значениях параметра регуляризации является наличие неполюсного члена, который, если не исключает совсем, то делает затруднительной интерпретацию ее как физической частицы.

Гораздо более важной нам представляется различие в поведении этих моделей относительно квантовых флюктуаций, вызываемых вкладами скалярных амплитуд в киральный конденсат. Как следует из результатов этого раздела и раздела 3.5, модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией стабильна относительно таких флюктуаций, в то время как в модели НИЛ с регуляризацией с 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации. Конечно, многие физические приложения модели НИЛ связаны исключительно с главным порядком разложения среднего поля (приближение среднего поля), где возможность такой дестабилизации можно просто игнорировать. Но, с другой стороны, существуют физические приложения модели НИЛ, связанные прежде всего с многокварковыми функциями [1, 155-161] (такие как, например, барионы [131, 145, 151, 226], пион-пионное рассеяние [106, 111, 113, 118, 140, 188, 190, 193], распады σ и $\rho-$мезонов [141, 143] и т.п.), киральная динамика адронов [101, 111, 126, 127, 138, 139, 142, 150, 194, 215], также изучение динамики адронов при наличии окружающей среды, т.е. при конечных температурах и плотностях [95, 102, 125, 177, 219, 221], в которых пренебрежение мезонными вкладами в пропагатор кварка заведомо некорректно с точки зрения РСП, и, следовательно, стабильность основных параметров модели относительно таких вкладов приобретает решающее значение.

Выводы по главе IV

1. Исследована модель НИЛ с регуляризацией четырехмерным обрезанием.

2. Определены параметры $SU(2)$- модели НИЛ с четырехмерным обрезанием в главном порядке РСП.

3. Вычислены поправки к киральному конденсату кварка. Основным вкладом в киральный конденсат первого порядка является вклад псевдоскалярной амплитуды (пиона). Также вычислены поправки к массе кварка. По-

правка пиона в массу кварка как и в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией равна нулю. Этот факт в модели НИЛ не зависит от выбора регуляризации.

4. Определены параметры модели с учетом мезонных поправок.

5. В модели НИЛ с регуляризацией 4 – мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации ситуации относительно квантовых флюктуаций. Эта дестабилизация проявляется в том, что само существование набора параметров модели оказывается критически зависящим от значения кирального конденсата c, при $|c| \leq 230 МэВ$ система уравнений для параметров модели не имеет решения.

Таким образом, $SU(2)$- модель НИЛ с регуляризацией 4 – мерным обрезанием оказывается в опасной зоне нестабильности относительно квантовых флюктуацией.