

## ГЛАВА III

## МОДЕЛЬ НАМБУ – ИОНА-ЛАЗИНИО С РАЗМЕРНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ И РАЗЛОЖЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

В начале прошлого столетия после того, как была обнаружена субструктура атомного ядра были предприняты упорные попытки понять и объяснить, как же взаимодействуют нуклоны. Уже в тридцатых годах Юкава предположил, что это взаимодействие может быть описано посредством тяжелого мезона, который позже был идентифицирован с пионом. Вскоре эта идея стала основополагающей для большинства феноменологических моделей взаимодействия нуклонов путем обмена мезонами различных квантовых чисел.

Но не только наше настоящее понимание взаимодействия нуклонов, но и также все феноменологические модели, которые претендуют на описание сильновзаимодействующих частиц – мезонов и барионов в области низкой энергий, по существу созданы под влиянием идеи Юкавы. Эти модели включают в себя мезоны и барионы как главные степени свободы в низкоэнергетической области. Во многих случаях определение спектра адронов, распад и рассеяния адронов получены в пределах этих феноменологических моделей.

Как известно, адроны не представляют собой фундаментальные степени свободы. В настоящее время КХД является общепринятой теорией сильного взаимодействия, которая содержит кварки и глюоны как фундаментальные степени свободы. КХД имеет две основные особенности – это, во-первых, “конфайнмент”, согласно которой наблюдаются только бесцветные объекты и, во-вторых “асимптотическая свобода”. При формировании глюоны и кварки не могут быть наблюдаемы, они ограничены в адронах. Согласно асимптотической свободе следует, что константа связи уменьшается с увеличением энергии. В области низких

энергий, “которая является актуальной в нашем адронном мире”, пертурбативные методы не применимы.

Согласно теореме Голдстоуна [67, 77] спонтанное нарушение симметрии лагранжиана осуществляется из-за существования массивных бозонов. Малость массы пиона по сравнению с другими массивными адронами, позволяет описывать их природу также, как голдстоуновские бозоны. Ненулевая масса этих частиц указывает на тот факт, что симметрия здесь явно нарушается, из – за ненулевых масс  $u$ - и  $d$ - кварков.

Поскольку адронные вычисления очень успешно описывают собственные легких адронов, то может возникнуть вопрос, в каком именно направлении все это трактовать согласно кварковой субструктуре. Так как этот вопрос не может быть объяснен, исходя из начальных принципов, то всё это надо пересмотреть в рамках кварковой модели. Основным недостатком всех известных моделей может быть недостаток конфайнмента. Тем не менее, по крайней мере, для легких адронов киральная симметрия и ее спонтанное нарушение в физическом вакууме кажется играет решающую роль в описании их собственных свойств, тогда вопрос с конфайнментом становится менее важен [3, 14, 146, 202].

Можно привести два примера из наиболее известных кварковых моделей, обладающих киральной симметрией и которые были предложены ещё в шестидесятых годах прошлого столетия, это модель Гелл-Манна - Лоу, первоначально включающая в себя нуклоны, пионы и  $\sigma$ - мезоны, и модель НИЛ [181, 182], первоначально включающая в себя только нуклоны. В настоящее время эти модели переинтерпретированы для кварков вместо нуклонов [168, 169].

В работах [181, 182] Намбу и Иона-Лазинио была предложена динамическая модель сильно взаимодействующих элементарных частиц (нуклоны), основанная по аналогии со сверхпроводящей моделью. Исходным лагранжианом был взят кирально - симметричный 4-фермионный лагранжиан с безмассовыми частицами. Мезоны появлялись как составные

фермион-антифермионные состояния. Подобно тому как в сверхпроводнике при образовании электронных пар возникала энергетическая щель при низких энергиях, здесь также при введении мезонных полей как фермион-антифермионных пар происходило спонтанное нарушение киральной симметрии и фермионные поля приобретали массу.

Модель НИЛ была применена многими авторами для изучения особенностей адронов [114, 122, 192, 224]. С пригодным выбором параметров модели, пионы возникают при спонтанном нарушении киральной симметрии как безмассовые голдстоуновские бозоны. Спонтанное нарушение симметрии также находит отражение на ненулевой величине кваркового конденсата. Согласно теореме Голдстоуна [65, 67, 77] спонтанное нарушение симметрии лагранжиана приводит к появлению массивных бозонов. В настоящем случае эта киральная симметрия  $SU(2)_V \times SU(2)_A$  группы, соответствующая сектору *u*- и *d*-кварков.

В подавляющем большинстве этих исследований модель НИЛ применялась либо в приближении среднего поля, либо в эквивалентном ему главном порядке  $1/n_c$ -разложения ( $n_c$  – число цветов). В то же время успехи в феноменологическом описании стимулировали изучение структуры модели НИЛ или за рамками приближения среднего поля, или в порядке  $1/n_c$ -разложения [37, 97-98, 109, 136, 162, 166, 167, 169, 186, 194, 212]. Эти исследования необходимы для уяснения области применимости результатов и их устойчивости относительно вариации параметров модели и квантовых флуктуаций, вызываемых эффектами высших порядков, тем более, что в последнее время появляются работы, ставящие под сомнение основные физические эффекты модели НИЛ [136, 166, 167].

Для построения разложения среднего поля мы используем итерационную схему решения уравнения ШД с биллокальным источником фермионов [201, 205, 208, 210], которая уже была использована нами в главе II (см. раздел 2.1).

3.1. Разложение среднего поля в формализме бислокального источника в теории с симметрией группы  $U(1)$

Мы будем рассматривать теорию самодействующего спинорного поля  $\psi(x)$  с лагранжианом [155, 162]

$$L = \bar{\psi} i \hat{\partial}_0 \psi + \frac{g}{2} [(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2]. \quad (3.1)$$

Здесь  $g > 0$  – константа связи, имеющая размерность квадрата обратной массы,  $\bar{\psi} \equiv \psi^* \gamma_0$ . Лагранжиан (3.1) инвариантен относительно преобразований киральной группы  $U(1)_V \times U(1)_A$ . Теорию с таким лагранжианом будем называть  $U(1)$ - моделью НИЛ. Эта модель не имеет непосредственных физических приложений, но как будет показано в разделе 3.4., результаты теории с лагранжианом с симметрией группы  $SU(2)_V \times SU(2)_A$  ( $SU(2)$  – модели НИЛ) для вклада мезонов в киральный конденсат практически идентичны результатам  $U(1)$ -модели, что не удивительно, так как эти вклады являются чисто динамическими. Симметричные различия проявляются в виде простых коэффициентов [155].

Производящий функционал функций Грина (вакуумных ожиданий  $T$ -произведений полей) может быть представлен в виде функционального интеграла с бислокальным источником [155]:

$$G(\eta) = \int D(\psi, \bar{\psi}) \exp i \left[ \int dx L - \int dx dy \bar{\psi}^\beta(y) \eta^{\beta\alpha}(y, x) \psi^\alpha(x) \right], \quad (3.2)$$

где  $\eta^{\beta\alpha}(y, x)$  есть бислокальный источник спинорного поля ( $\alpha$  и  $\beta$  – спинорные индексы). Вставка билинейной формы  $\bar{\psi}^\beta(y) \psi^\alpha(x)$  под знаком

функционального интеграла эквивалентна дифференцированию исходного интеграла по  $\eta(y, x)$

$$\bar{\psi}^\beta(y)\psi^\alpha(x) \rightarrow \frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y, x)}.$$

Введение бислокального источника фермионов  $\eta(y, x)$  необходимо для того, чтобы установить связь производящего функционала  $G$  с ядром уравнения (см. ниже). Кроме того, использование такого источника вместо обычных (простых) источников  $\eta(x)$  и  $\bar{\eta}(x)$  весьма удобно с точки зрения практичности вычислений: во-первых, не надо следить за знаками (бислокальный источник коммутирует со всеми объектами), во-вторых, сильно уменьшается объем вычислительной работы с многочастичными функциями Грина, так как число дифференцирований уменьшается вдвое.

Функциональная производная  $G$  по источнику  $\eta$  есть одночастичная (двухточечная) функция Грина (пропагатор поля  $\psi$ ):

$$\left. \frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y, x)} \right|_{\eta=0} = i \langle 0 | T \{ \psi^\alpha(x) \bar{\psi}^\beta(y) \} | 0 \rangle \equiv S^{\alpha\beta}(x-y) \quad (3.3)$$

$n$ -ая функциональная производная  $G$  по источнику  $\eta$  есть  $n$ -частичная ( $2n$ -точечная) функция Грина:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^n G}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y_1, x_1) \cdots \delta\eta^{\beta^{(n)}\alpha^{(n)}}(y_n, x_n)} \right|_{\eta=0} &= \langle 0 | T \{ \psi^\alpha(x_1) \bar{\psi}^\beta(y_1) \cdots \psi^{\alpha^{(n)}}(x_n) \bar{\psi}^{\beta^{(n)}}(y_n) \} | 0 \rangle \equiv \\ &\equiv S_n \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ \cdots \cdots \\ x_n y_n \end{pmatrix}_{\alpha^{(n)} \beta^{(n)}}^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эвристический вывод уравнений ШД для производящего функционала  $G$  основан на соотношении [13, с.72-80], [155, 162]:

$$0 = \int D(\psi, \bar{\psi}) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} \bar{\psi}(y) \times \\ \times \exp i \left[ \int dx' L(x') - \int dx' dy' \bar{\psi}^\beta(y') \eta^{\beta\alpha'}(y', x') \psi^{\alpha'}(x') \right] \quad (3.5)$$

Произведя в (3.5) дифференцирование и принимая во внимание (3.3), получаем уравнение ШД для производящего функционала  $G$  функций Грина

$$\delta^{\alpha\beta} \delta(x-y) G + i \widehat{\partial}_x^{\alpha\alpha_1} \frac{\delta G}{\delta \eta^{\beta\alpha_1}(y, x)} + \\ + ig \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y, x)} \text{tr} \left[ \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x)} \right] - \gamma_5^{\alpha\alpha_1} \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha_1}(y, x)} \text{tr} \left[ \gamma_5 \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x)} \right] \right\} = \\ = \int dx_1 \eta^{\alpha\alpha_1}(x, x_1) \frac{\delta G}{\delta \eta^{\beta\alpha_1}(y, x_1)}. \quad (3.6)$$

Решение этого уравнения будем искать методом, предложенным в разделе 2.1, которое является для рассматриваемой нами модели НИЛ одним из способов построения РСП. Уравнением главного приближения является аппроксимация уравнения ШД (3.6) с нулевой правой частью:

$$\delta^{\alpha\beta} \delta(x-y) G^{(0)} + i \widehat{\partial}_x^{\alpha\alpha_1} \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta^{\beta\alpha_1}(y, x)} + \\ + ig \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y, x)} \text{tr} \left[ \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x, x)} \right] - \gamma_5^{\alpha\alpha_1} \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha_1}(y, x)} \text{tr} \left[ \gamma_5 \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x, x)} \right] \right\} = 0. \quad (3.7)$$

Решением уравнения ШД (3.7) является функционал

$$G^{(0)} = \exp Tr(\eta * S). \quad (3.8)$$

Здесь  $Tr$  означает след в операторном смысле, а  $*$  - операторное умножение.  $S$  есть решение уравнения:

$$\begin{aligned} & \delta(x) + i\widehat{\partial}_x S(x) + \\ & + ig \{S(x)trS(0) - \gamma_5 S(x)tr\gamma_5 S(0)\} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Главное приближение (3.7)- (3.8) генерирует линейную итерационную схему:

$$G = G^{(0)} + G^{(1)} + \dots + G^{(n)} + \dots,$$

где функционал  $n$ -го шага  $G^{(n)}$  есть решение уравнения

$$\begin{aligned} & \delta^{\alpha\beta} \delta(x)G^{(n)} + i\widehat{\partial}_x^{\alpha\alpha_1} \frac{\delta G^{(n)}}{\delta \eta^{\beta\alpha_1}(y,x)} + \\ & + ig \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y,x)} tr \left[ \frac{\delta G^{(n)}}{\delta \eta(x,x)} \right] - \gamma^{\alpha\alpha_1} \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha_1}(y,x)} tr \left[ \gamma_5 \frac{\delta G^{(n)}}{\delta \eta(x,x)} \right] \right\} = \eta \frac{\delta G^{(n-1)}}{\delta \eta}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решением уравнения (3.10) является функционал

$$G^{(n)} = P^{(n)} G^{(0)},$$

где  $P^{(n)}$  – полином степени  $2n$  по источнику  $\eta$ .

Как видно из (3.8), единственная связная функция главного приближения есть пропагатор  $S_1^{(0)} \equiv S$ . Остальные связные функции Грина появляются в последующих шагах итерационной схемы.

Решение уравнения (3.9) в импульсном пространстве есть свободный пропагатор:

$$S = \frac{1}{m - \hat{p}}$$

с динамической массой  $m$ , которая является решением уравнения самосогласования  $U(1)$ -модели НИЛ:

$$m = -4igm \int \frac{d\tilde{p}}{m^2 - p^2}. \quad (3.11)$$

Здесь и всюду в дальнейшем  $d\tilde{p} \equiv \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$ .

Расходящийся интеграл в правой части уравнения (3.11) должен пониматься как некоторая регуляризация. Всегда существует кирально-симметричное тривиальное решение  $m=0$ . Мы будем рассматривать физически интересное решение  $m \neq 0$ , соответствующее ДНКС.

С учетом уравнения главного приближения (3.7) система уравнений для  $P^{(n)}$  принимает вид

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y,x)} + \\ & + ig \int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1) \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha_1}(y,x_1)} \text{tr} \left[ \frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1,x_1)} \right] + S^{\alpha_1\beta}(x_1-y) \text{tr} \frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1,x_1)} - \right. \\ & \left. - \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha_2}(y,x_1)} \text{tr} \left[ \gamma_5 \frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1,x_1)} \right] \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} S^{\alpha_2\beta} (x_1 - y) \text{tr} \left[ \gamma_5 \frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} \right] = \\
& = \int dx_1 dx_2 S^{\alpha\alpha_1} (x - x_1) \eta^{\alpha_1\alpha_2} (x_1, x_2) \left\{ \frac{\delta P^{(n-1)}}{\delta \eta^{\beta\alpha_2} (y, x_2)} + P^{(n-1)} S^{\alpha_2\beta} (x_2 - y) \right\}, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Поскольку

$$P^{(0)} \equiv 1, \quad (3.13)$$

то очевидно, что при любом  $n$  функционал  $P^{(n)}$  есть полином от функционального переменного  $\eta$ . Это обстоятельство весьма важно, так как оно означает, что система уравнений для коэффициентных функций этого функционала является замкнутой в каждом порядке итерационной схемы. В этой итерационной схеме нет малого параметра. Его роль играет, в определенном смысле, источник  $\eta$ . Разложение производящего функционала (3.2) следует понимать как аппроксимацию  $G(\eta)$  вблизи точки  $\eta = 0$ . По существу, вместо вопроса о малом параметре следует ставить вопрос о сходимости итерационного ряда. Не обсуждая здесь вопрос о сходимости разложения для квантовополевой задачи, ограничимся замечанием о том, что можно привести ряд качественных соображений в пользу того, что сходимость разложения такого типа не хуже, чем сходимость ряда ТВ по константе связи [205, 208].

Приступим к получению уравнений первого шага итераций. Итак уравнение для  $P^{(1)}$  примет вид [155, 162]

$$\begin{aligned}
& -\frac{\delta P^{(1)}}{\delta \eta^{\beta\alpha} (y, x)} + ig \int dx_1 S^{\alpha\alpha_1} (x - x_1) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha_1} (y, x_1)} \text{tr} \left[ \frac{\delta P^{(1)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} \right] + S^{\alpha_1\beta} (x_1 - y) \text{tr} \frac{\delta P^{(1)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} S^{\alpha_2\beta} (x_1 - y) \text{tr} \left[ \gamma_5 \frac{\delta P^{(1)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} \right] - \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha_2}(y, x_1)} \text{tr} \left[ \gamma_5 \frac{\delta P^{(1)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} \right] \Bigg\} = \\
& = \int dx_1 dx_2 S^{\alpha\alpha_1}(x - x_1) \eta^{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2) S^{\alpha_2\beta}(x_2 - y), \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Решением уравнения первого шага (3.14) есть функционал

$$\begin{aligned}
P^{(1)}[\eta] &= \frac{1}{2} \int S_2 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}_{\alpha_2\beta_2}^{\alpha_1\beta_1} \cdot \eta^{\beta_1\alpha_1}(y_1, x_1) \eta^{\beta_2\alpha_2}(y_2, x_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 + \\
&+ \int (S^{(1)})^{\alpha_1\beta_1}(x_1, y_1) \cdot \eta^{\beta_1\alpha_1}(y_1, x_1) dx_1 dy_1. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Выражение (3.15) подставляя в (3.14) после дифференцирования с учетом (3.9), а затем исключая источник  $\eta$ , получим уравнение для поправки первого шага для пропагатор  $S^{(1)}$  (графический вид уравнения приведен на рис. 3.1):

$$\begin{aligned}
S^{(1)\alpha\beta}(x - y) &= ig \int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x - x_1) \left\{ S_2 \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}_{\alpha_2\alpha_2}^{\alpha_1\beta} - \gamma_5^{\alpha_1\beta_1} S_2 \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}_{\alpha_3\alpha_2}^{\beta_1\beta} \gamma_5^{\alpha_2\alpha_3} \right\} + \\
&+ ig \int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x - x_1) S^{\alpha_1\beta}(x_1 - y) \text{tr} S^{(1)}(0). \tag{3.16}
\end{aligned}$$

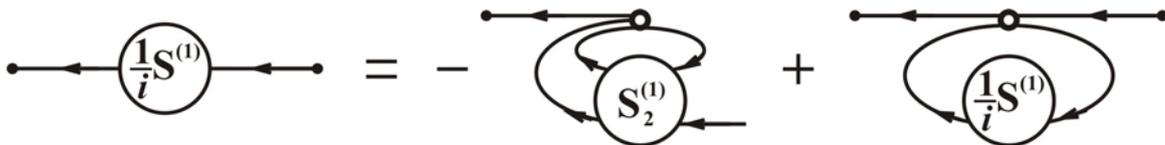


Рис. 3.1. Уравнение для пропагатора первого порядка

Дважды проводя дифференцирование выражения (3.14) с учетом (3.9), мы получаем уравнение для двухчастичной (четырёххвостка) функции  $S_2$  :

$$\begin{aligned}
 S_2 \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} &= -S^{\alpha\beta'}(x-y)S^{\alpha'\beta}(x'-y) + \\
 + ig \int dx_1 \{ &(S(x-x_1)S(x_1-y))^{\alpha\beta} tr S_2 \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix} - \\
 - (S(x-x_1)\gamma_5 S(x_1-y))^{\alpha\beta} &tr \gamma_5 S_2 \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix} \}. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Графический вид этого уравнения приведен на рис. 3.2.

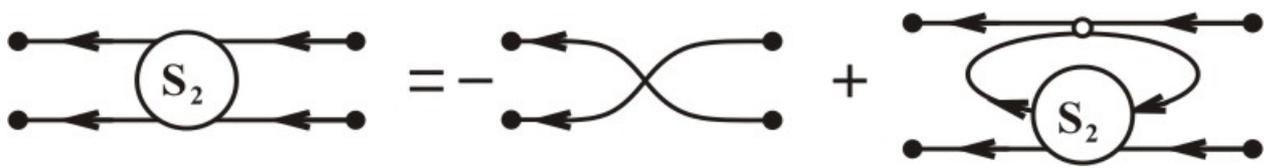


Рис. 3.2. Уравнение (3.17) для двухчастичной функции

В рисунках 3.1, 3.2 и далее используются следующие графические правила ( см. рис. 3.3):

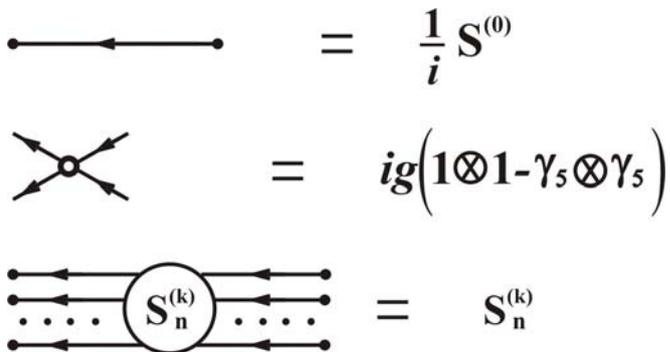


Рис. 3.3.Графические правила

Рассмотрим следующий шаг итерационной схемы, изложенной в этом разделе. Решение функционально-дифференциального уравнения для производящего функционала второго шага имеет вид:

$$G^{(2)} = \left\{ \frac{1}{4!} \text{Tr}(S_4 * \eta^4) + \frac{1}{3!} \text{Tr}(S_3 * \eta^3) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \text{Tr}(S_2^{(1)} * \eta^2) + \text{Tr}(S^{(2)} * \eta) \right\} G^{(0)},$$

т.е. в уравнениях второго шага появляются четырехчастичная и трехчастичная функции  $S_4$  и  $S_3$ . Уравнения для  $S_2^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  имеют тот же вид, что и уравнения первого шага, за исключением неоднородного члена, в который для уравнений второго шага входят  $S_4$  и  $S_3$  (подробно см. в разделе 5.1). Эти вопросы мы будем обсуждать в V главе.

### 3.2. Главный порядок разложения среднего поля и размерно-аналитическая регуляризация в модели Намбу - Иона-Лазинио

Поскольку модель НИЛ в современной трактовке рассматривается с одной стороны, как эффективная модель КХД в непертурбативной области, а с другой стороны, так как приближение среднего поля включает в себя кварковые петли, поэтому существенным моментом применения модели НИЛ является регуляризация.

Наиболее употребляемыми регуляризациями модели НИЛ традиционно являются регуляризации с 4-мерным обрезанием в евклидовом пространстве импульсов, либо с нековариантным обрезанием в трехмерном импульсном пространстве. Реже используются и другие схемы регуляризации, такие как регуляризация Паули-Вилларса [11] или нелокальные гауссовы формфакторы (см.[168, 169, 183, 185] и цитируемая там литература). Наименее употребляемой

в модели НИЛ является размерная регуляризация. На первый взгляд это выглядит странным, поскольку достоинства размерной регуляризации общеизвестны, именно эта регуляризация наиболее часто употребляется для вычислений в перенормируемых теориях, особенно в калибровочных. По-видимому, этот факт связан с тем, что, в отличие от перенормируемых моделей, параметр регуляризации в модели НИЛ входит в выражения для физических величин и является одним из существенных параметров модели. В то же время параметр размерной регуляризации, если традиционно трактовать его как отклонение от физической размерности пространства, не допускает в этой трактовке какой-либо физической интерпретации.

Существует, однако, альтернативная трактовка размерной регуляризации как варианта аналитической регуляризации. В этой трактовке все вычисления производятся в четырехмерном евклидовом пространстве импульсов, а параметр регуляризации трактуется как степень весовой функции, регуляризирующей расходящиеся интегралы. Такая трактовка размерной регуляризации, основанная на идеях Вильсона и Коллинза [52,с.65], последовательно развита и применена в описании модели НИЛ (в приближении среднего поля) в работе Крювальда и Накаямы [170]. Подчеркнем, что при такой трактовке размерной регуляризации параметр регуляризации вовсе не является отклонением от физической размерности пространства. Мы предполагаем, что возможна трактовка этого параметра как степени некоторого эффективного влияния глюонов на четырехфермионное самодействие кварков модели НИЛ, что в определенной степени перекликается с популярными в последнее время нелокальными вариантами модели НИЛ [196, 197].

Как уже было отмечено, в связи с неперенормируемостью модели НИЛ, регуляризация является существенным компонентом этой модели.

Мы будем использовать размерную регуляризацию в варианте, предложенном в работе [170]. Основные положения предложенного в работе [170] способа регуляризации можно суммировать следующим образом:

- все вычисления производятся в 4-мерном евклидовом пространстве;
- постулируется трансляционная инвариантность;
- процедура регуляризации состоит в изменении меры интегрирования путем введения степенной весовой функции, обеспечивающей сходимость интегралов.

В этом подходе размерная регуляризация рассматривается, по существу, как один из вариантов аналитической регуляризации. Этот момент является весьма существенным при использовании и интерпретации данной регуляризации. В связи с этим, мы будем в дальнейшем использовать для данной регуляризации термин “размерно-аналитическая” (или сокращенно DAR), подчеркивая тем самым особенности ее применения и интерпретации по сравнению с обычной трактовкой размерной регуляризации как формального выхода в  $D$ -мерное пространство.

Рассмотрим применение этой регуляризации на примере уравнения самосогласования (3.11)  $U(1)$ -модели НИЛ.

При  $m \neq 0$  после перехода в евклидово пространство и интегрирования по углам уравнение (3.11) принимает вид

$$1 = 2g \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \int \frac{q_e^2 dq_e^2}{m^2 + q_e^2}, \quad (3.18)$$

где  $\Omega_4 = 2\pi^2$  – поверхность единичной сферы в 4-мерном пространстве. В соответствии с вышесказанным, мы вводим в подынтегральное выражение весовую функцию:

$$w_{\Lambda, D}(q_e^2) = w_{\Lambda}(q_e^2) w_D(q_e^2) = \theta(\Lambda^2 - q_e^2) \left( \frac{\mu^2}{q_e^2} \right)^{2-D/2}. \quad (3.19)$$

Весовая функция  $w_{\Lambda, D}$  представляет собой произведение двух весовых функций  $w_{\Lambda}$  и  $w_D$ . Функция  $w_{\Lambda}$  соответствует регуляризации 4-мерным обрезанием в евклидовом пространстве, а функция  $w_D$  соответствует размерно-аналитической регуляризации.

Вычисление интеграла по  $dq_e^2$  дает [155]

$$1 = \frac{2gm^2\Omega_4}{(2\pi)^4} \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{D/2-2} \cdot B_{\frac{\Lambda^2}{m^2+\Lambda^2}}(D/2, 1-D/2). \quad (3.20)$$

Здесь  $B_x(u, v)$  – неполная Бета-функция [9, с.23], [10, с.138-146].

(а) Обрезание

Полагая  $D = 4$ , получаем

$$1 = \kappa_{\Lambda} \left( 1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \log \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right), \quad (3.21)$$

где  $\kappa_{\Lambda} = \frac{g\Lambda^2}{4\pi^2}$ .

Это соотношение в точности соответствует классическому результату работы [169, 181, 182].

(б) Размерно-аналитическая регуляризация

При  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ , используя формулу [9, с.24]

$$B_1(D/2, 1-D/2) = \Gamma(D/2)\Gamma(1-D/2)$$

и переопределив масштабный параметр  $\mu^2$  по формуле

$$(\mu^2)^{2-D/2} = \frac{\Omega_D}{\Omega_4} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^D} (M^2)^{2-D/2} \quad (3.22)$$

(Здесь имеется ввиду определение  $\Omega_D = 2\pi^{D/2} / \Gamma(D/2)$ ), тогда мы получаем уравнение самосогласования в виде

$$1 = \kappa \Gamma(1 - D/2) \left( \frac{m^2}{4\pi M^2} \right)^{D/2-2}. \quad (3.23)$$

Здесь вместо  $g$  введена безразмерная величина

$$\kappa = \frac{gm^2}{4\pi^2}. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.23) в точности соответствует результату вычисления с помощью формального перехода в  $D$ -мерное пространство

$$d\tilde{q} \equiv \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{(M^2)^{2-D/2} d^D q}{(2\pi)^D},$$

но поскольку в нашем случае, все вычисление проводились в 4-мерном пространстве, то при данной трактовке  $D$  не является размерностью пространства, а является неким параметром регуляризации. В частности, здесь мы не связаны условием  $D \rightarrow 4$  для того, чтобы трактовать результаты вычислений.

Всюду далее мы будем использовать *параметр регуляризации*  $\xi$ , определенный соотношением

$$D = 2 - 2\xi.$$

Отметим, что параметр  $\xi$  отличен от обычно вводимого параметра  $\varepsilon$ , для которого  $D = 4 - 2\varepsilon$ . Легко видеть, что они связаны соотношением  $\varepsilon = 1 + \xi$ . Введение этого нового обозначения проделано для того, чтобы избежать ненужных ассоциаций со стандартной трактовкой размерной регуляризации.

Кроме того, именно в терминах параметра  $\xi$  все последующие формулы модели НИЛ имеют наиболее простой вид [155].

В терминах параметра  $\xi$  уравнение самосогласования (3.23) принимает вид:

$$1 = \kappa \Gamma(\xi) \left( \frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^{1+\xi}. \quad (3.25)$$

Эта формула может быть аналитически продолжена в любую точку  $\xi \neq 0, 1, \dots$ .

Областью сходимости интеграла является область  $0 < \xi < 1$ . Как мы увидим в дальнейшем ( см. разделы 3.3 и 3.5.), именно эта область значений параметра  $\xi$  соответствует наблюдаемым физическим значениям.

3.3. Двухчастичная амплитуда в следующем порядке, за главным приближением разложения среднего поля и мезонные вклады в киральный конденсат

Уравнения для поправки первого шага к пропагатору  $S^{(1)}$  и уравнение для двухчастичной функции  $S_2$  получены в разделе 3.1 и имеют вид (3.16) и (3.17), соответственно.

Переходим к ампутированной функции

$$\begin{aligned} F_2 \left( \begin{array}{c} x \quad y \\ x' \quad y' \end{array} \right)_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} = \\ = \int dx_1 dx'_1 dy_1 dy'_1 [S]_{\alpha\alpha_1}^{-1}(x-x_1) [S]_{\alpha'\alpha'_1}^{-1}(x'-x'_1) S_2 \left( \begin{array}{c} x_1 \quad y_1 \\ x'_1 \quad y'_1 \end{array} \right)_{\alpha'\beta'_1}^{\alpha\beta} \times \\ \times [S]_{\beta_1\beta}^{-1}(y_1-y) [S]_{\beta'_1\beta'_1}^{-1}(y'_1-y'). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Итак уравнение для ампутированной функции примет вид

$$\begin{aligned}
F_2 \left( \begin{array}{c} x & y \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} &= -[S]_{\alpha\beta'}^{-1}(x-y)[S]_{\alpha'\beta}^{-1}(x'-y) + \\
+ ig\delta(x-y) \int dx_1 dy_1 &\left\{ \delta_{\alpha\beta} S_{\alpha_1\alpha} (x-x_1) F_2 \left( \begin{array}{c} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha'\beta'}^{\alpha_2\beta_2} S_{\beta_2\alpha_1} (y_1-x) - \right. \\
- \gamma_5^{\alpha\beta} S_{\alpha_1\alpha_2} (x-x_1) &F_2 \left( \begin{array}{c} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha'\beta'}^{\alpha_2\beta_2} S_{\beta_2\beta_3} (y_1-x) \gamma_5^{\beta_3\alpha_1} \left. \right\}. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Связная функция (амплитуда) имеет вид

$$A \left( \begin{array}{c} x & y \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} = F_2 \left( \begin{array}{c} x & y \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} - [S]_{\alpha\beta'}^{-1}(x-y)[S]_{\alpha'\beta}^{-1}(x'-y). \quad (3.28)$$

Используя (3.28) в (3.27) получим уравнение для амплитуды

$$\begin{aligned}
A \left( \begin{array}{c} x & y \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} &= -ig\delta(x-y)\delta(x-x')\delta(x-y') \left\{ \delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha'\beta'} - \gamma_5^{\alpha\beta} \gamma_5^{\alpha'\beta'} \right\} + \\
+ ig\delta(x-y) \int dx_1 dy_1 &\left\{ \delta_{\alpha\beta} S_{\alpha_1\alpha_2} (x-x_1) A \left( \begin{array}{c} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha'\beta'}^{\alpha_2\beta_2} S_{\beta_2\alpha_1} (y_1-x) - \right. \\
- \gamma_5^{\alpha\beta} S_{\alpha_1\alpha_2} (x-x_1) &A \left( \begin{array}{c} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha'\beta'}^{\alpha_2\beta_2} S_{\beta_2\beta_3} (y_1-x) \gamma_5^{\beta_3\alpha_1} \left. \right\}. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Вводя анзац,

$$A \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = -ig\delta(x-y)\delta(x-x')\delta(x-y') \times \\ \times \left\{ \delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha'\beta'} \cdot A_{\sigma}(x-x') - \gamma_5^{\alpha\beta} \gamma_5^{\alpha'\beta'} \cdot A_{\pi}(x-x') \right\}$$

(здесь  $A_{\sigma}$  - скалярная амплитуда, а  $A_{\pi}$  - псевдоскалярная амплитуда), получим

$$A \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'} = -ig\delta(x-y)\delta(x'-y') \left\{ \delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha'\beta'} \cdot A_{\sigma}(x-x') - \gamma_5^{\alpha\beta} \gamma_5^{\alpha'\beta'} \cdot A_{\pi}(x-x') \right\} = \\ = -ig\delta(x-y)\delta(x'-y') \left\{ \delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha'\beta'} \delta(x-x') - \gamma_5^{\alpha\beta} \gamma_5^{\alpha'\beta'} \delta(x-x') \right\} + \\ + ig\delta(x-y)\delta(x'-y') \int dx_1 \left\{ \delta^{\alpha\beta} tr[S(x-x_1)S(x_1-x)] \delta^{\alpha'\beta'} \cdot A_{\sigma}(x_1-x') - \right. \\ \left. - \gamma_5^{\alpha\beta} tr[S(x-x_1)\gamma_5 S(x_1-x)\gamma_5] \cdot A_{\pi}(x_1-x') \right\}. \quad (3.30)$$

После проведения суммирования по спинорным индексам для скалярной  $A_{\sigma}$  и псевдоскалярной  $A_{\pi}$  амплитуд получим следующие уравнения:

$$A_{\sigma}(x) = -ig\delta(x) + ig \int dx_1 tr[S(x-x_1)S(x_1-x)] A_{\sigma}(x_1), \quad (3.31)$$

$$A_{\pi}(x) = ig\delta(x) - ig \int dx_1 tr[S(x-x_1)\gamma_5 S(x_1-x)\gamma_5] A_{\pi}(x_1), \quad (3.32)$$

Переходя в импульсное пространство, окончательно получим

$$A_{\sigma} = -\frac{ig}{1-L_s}, \quad (3.33)$$

$$A_\pi = \frac{ig}{1 + L_p}, \quad (3.34)$$

где

$$\begin{aligned} L_s(p) &= ig \int d\tilde{q} tr_\alpha [S(p+q)S(q)] = \\ &= 4ig \int d\tilde{q} \frac{m^2 + q^2 + (pq)}{[m^2 - (p+q)^2][m^2 - q^2]} \end{aligned} \quad (3.35)$$

скалярная петля,

$$\begin{aligned} L_p(p) &= ig \int d\tilde{q} tr_\alpha [S(p+q)\gamma_5 S(q)\gamma_5] = \\ &= 4ig \int d\tilde{q} \frac{m^2 - q^2 + (pq)}{[m^2 - (p-q)^2][m^2 - q^2]} \end{aligned} \quad (3.36)$$

псевдоскалярная петля.

Преобразуем подынтегральные выражения из (3.35) и (3.36) следующим образом

$$\begin{aligned} &\frac{m^2 + q^2 + (pq)}{[m^2 - (p+q)^2][m^2 - q^2]} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{m^2 - q^2} - \frac{1}{m^2 - (p+q)^2} + \frac{4m^2 - p^2}{[m^2 - (p+q)^2][m^2 - q^2]} \right], \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} &\frac{m^2 - q^2 + (pq)}{[m^2 - (p-q)^2][m^2 - q^2]} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{m^2 - q^2} + \frac{1}{m^2 - (p-q)^2} + \frac{p^2}{[m^2 - (p-q)^2][m^2 - q^2]} \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Согласно (2.37) и (2.38) выражения (2.35) и (2.36) примут вид:

$$L_S = 2ig(-I_1 - I_2 + (4m^2 - p^2)I_0), \quad (3.39)$$

$$L_P = 2ig(I_1 + I_2' + p^2I_0). \quad (3.40)$$

где

$$I_1(p^2) = \int d\tilde{q} \frac{1}{m^2 - (p+q)^2}, \quad (3.41)$$

$$I_2(p^2) = \int d\tilde{q} \frac{1}{m^2 - q^2}, \quad (3.42)$$

$$I_2'(p^2) = \int d\tilde{q} \frac{1}{m^2 - (p-q)^2}, \quad (3.43)$$

$$I_0(p^2) = \int d\tilde{q} \frac{1}{[m^2 - (p-q)^2][m^2 - q^2]}. \quad (3.44)$$

В силу трансляционной инвариантности интегралы (3.41), (3.42) и (3.43) равны:

$I_1 = I_2 = I_2'$ . И согласно уравнению самосогласования (3.11)

$$I_2 = \frac{i}{4g}. \quad (3.45)$$

Для скалярных амплитуд  $A_\sigma$  и  $A_\pi$  окончательно получим следующие представления:

$$A_\sigma = \frac{1}{2(4m^2 - p^2)I_0(p)}, \quad (3.46)$$

$$A_\pi = \frac{1}{2p^2I_0(p)}, \quad (3.47)$$

Интеграл  $I_0$  ( см. (3.44)), который является частью скалярных амплитуд  $A_\sigma$  и  $A_\pi$ , также вычисляется в размерно-аналитической регуляризации, т.е. переходя в евклидову метрику и вводя стандартную фейнмановскую параметризацию, а затем сдвигая импульсную переменную ( что возможно в силу трансляционной инвариантности процедуры, см. [37, 155, 170]), мы можем выполнить интегрирование по углам. В соответствии с нашими правилами, далее мы вводим под интеграл весовую функцию  $w_D(q_e^2)$  и, после переопределения масштабного параметра, получим результат, который также, как было выше показано, в точности соответствует результату интегрирования с формальным переходом в  $D$  – мерное пространство. В итоге получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 I_0(p^2) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\xi}{\kappa_0} \int_0^1 du \left( 1 - u(1-u) \frac{p^2}{m^2} \right)^{-1-\xi} = \\
 &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\xi}{\kappa} F(1 + \xi, 1; 3/2; -\frac{p^2}{4m^2}). \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

Здесь  $F(a, b; c; x)$  - гипергеометрическая функция Гаусса.

Уравнение самосогласования (3.11) в этой регуляризации уже нами определено ( см. раздел 3.1 ) и имеет вид (3.25).

Уравнение (3.16) для  $S^{(1)}$  с учетом полученных для  $S_2$  результатов сводится в импульсном пространстве к системе простых алгебраических соотношений. Если ввести массовый оператор первого шага по формуле

$$\Sigma^{(1)} = [S]^{-1} * S^{(1)} * [S]^{-1},$$

то мы получим для него из уравнения (3.16) с учетом полученных выше результатов следующее выражение

$$\Sigma^{(1)\alpha\beta}(x) = ig\delta(x)\text{tr}S^{(1)}(0) + S^{\alpha\beta}(x)A_\sigma(x) + S^{\alpha\beta}(-x)A_\pi(x). \quad (3.49)$$

Киральный конденсат в главном приближении имеет вид:

$$(c^3)^{(0)} = \chi^{(0)} = \text{itr}S(0) = 4im \int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - q^2}. \quad (3.50)$$

Интеграл (3.50) нами уже вычислен (см. (3.18)-(3.23)). Тогда окончательно имеем:

$$\chi^{(0)} = -\frac{m^3}{4\pi^2} \left( \frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^{1+\xi} \Gamma(\xi). \quad (3.51)$$

С учетом уравнения самосогласования (3.25) киральный конденсат  $\chi^{(0)}$  примет окончательный вид

$$\chi^{(0)} = -\frac{m}{g} \quad (3.52)$$

Конденсат первого шага, т.е. следующее приближение за главным приближением РСП есть:

$$(c^3)^{(1)} = \chi^{(1)} = \text{itr}S^{(1)}(0), \quad (3.53)$$

где

$$S^{(1)} = A_1 \hat{p} + B_1. \quad (3.54)$$

После вычисления шпуров приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} p^2(m^2 + p^2)A_1 - 2mp^2B_1 = \int d\tilde{q} \frac{p^2 - (pq)}{m^2 - (p-q)^2} (A_\sigma(q) - A_\pi(q)) \\ (m^2 + p^2)B_1 - 2mp^2A_1 = g\chi^{(1)} + m \int d\tilde{q} \frac{1}{m^2 - (p-q)^2} (A_\sigma(q) + A_\pi(q)) \end{cases}. \quad (3.55)$$

Решая эту систему двух линейных уравнений, получим

$$B_1(p) = g\chi^{(1)} \frac{m^2 + p^2}{(m^2 - p^2)^2} + m \int d\tilde{q} \frac{1}{(m^2 - (p - q)^2)(m^2 - p^2)^2} \times \\ \times \left( (3p^2 - 2(pq) + m^2) A_\sigma(q) + 3(-p^2 + 2(pq) + m^2) A_\pi(q) \right) \quad (3.56)$$

Отметим, что второе уравнение из системы (3.55) получено путем умножения (3.54) на  $\hat{p}$ , а далее вычислением шпуров.

Итак,

$$\chi^{(1)} = 4i \int d\tilde{p} B_1(p). \quad (3.57)$$

В качестве меры мезонных вкладов в киральный конденсат выбираем отношение конденсата первого шага (3.57) (с учетом (3.56)) к конденсату главного приближения (3.52):

$$r \equiv \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}} = r_\sigma + r_\pi = \\ = -\frac{4ig}{1 - 4igJ} \int \frac{d\tilde{q} d\tilde{p}}{(m^2 - (p - q)^2)(m^2 - p^2)^2} \times \\ \times \left[ (3p^2 - 2(pq) + m^2) A_\sigma(q) + (-p^2 + 2(pq) + m^2) A_\pi(q) \right]. \quad (3.58)$$

Здесь  $r_\sigma$  - вклад скалярного мезона (сигма-мезон),  $r_\pi$  - вклад псевдоскалярного мезона (пион), а  $J$  есть

$$J = \int \frac{m^2 + p^2}{(m^2 - p^2)^2} d\tilde{p}, \quad (3.59)$$

Для вычисления интеграла (3.59), сначала его преобразуем как,

$$J = J_1 + 2m^2 J_2, \quad (3.60)$$

где

$$J_1 = -4 \int d\tilde{p} \frac{1}{m^2 - p^2}, \quad (3.61)$$

$$J_2 = 4 \int d\tilde{p} \frac{1}{(m^2 - p^2)^2} = 4I_0(0). \quad (3.62)$$

Согласно уравнения самосогласования (3.25),  $J_1$  есть

$$J_1 = \frac{1}{ig}. \quad (3.63)$$

Из (3.44) и (3.48) вытекает, что при  $p^2 = 0$ :

$$J_2 = -\frac{\xi}{igm^2}. \quad (3.64)$$

А согласно (3.60) и (3.63)-(3.64) получим:

$$J = \frac{1}{ig}(1 - 2\xi). \quad (3.65)$$

Представляет интерес также вычисление вклада сигма-мезона  $r_\sigma$  и вклада пиона  $r_\pi$  отдельно. С этой целью, согласно (3.58):

$$r_\sigma = -\frac{2ig}{\xi} \int \frac{d\tilde{q} d\tilde{p} (3p^2 - 2(pq) + m^2)}{(m^2 - (p-q)^2)(m^2 - p^2)^2} A_\sigma(q), \quad (3.66)$$

$$r_\pi = -\frac{2ig}{\xi} \int \frac{d\tilde{q} d\tilde{p} (-p^2 + 2(pq) + m^2)}{(m^2 - (p-q)^2)(m^2 - p^2)^2} A_\pi(q), \quad (3.67)$$

где амплитуды  $A_\sigma(q)$  и  $A_\pi(q)$  определяются формулами (3.46) и (3.47).

Подставляя эти выражения в (3.66) и (3.67) с учетом (3.48) получим следующие выражения:

$$r_{\sigma} = -\frac{(4\pi)^2 g\kappa}{\xi^2} \int \frac{d\tilde{q}d\tilde{p}}{(m^2 - (p-q)^2)(m^2 - p^2)^2} \times \\ \times \frac{(3p^2 - 2(pq) + m^2)}{(4m^2 - q^2)F(1 + \xi, 1; 3/2; \frac{q^2}{4m^2})}, \quad (3.68)$$

$$r_{\pi} = -\frac{(4\pi)^2 g\kappa}{\xi^2} \int \frac{d\tilde{q}d\tilde{p}}{(m^2 - (p-q)^2)(m^2 - p^2)^2 q^2} \times \\ \times \frac{(-p^2 + 2(pq) + m^2)}{F(1 + \xi, 1; 3/2; \frac{q^2}{4m^2})}. \quad (3.69)$$

Однако вычисления показали, что не удастся найти аналитические выражения для  $r_{\sigma}$  и  $r_{\pi}$ . Поэтому придется использовать полюсные приближения амплитуд  $A_{\sigma}$  и  $A_{\pi}$ .

Используя уравнение самосогласования (3.25) с учетом формулы (3.48) при ( $p^2 = 4m^2$  и  $p^2 = 0$ ) мы получим полюсные приближения для скалярных амплитуд (3.46) и (3.47):

$$A_{\sigma} = \frac{2igm^2(1 + 2\xi)}{(4m^2 - p^2)\xi^2}, \quad (3.70)$$

$$A_{\pi} = -\frac{2igm^2}{p^2\xi}. \quad (3.71)$$

Подставляя амплитуды (3.70) и (3.71) в (3.66) и (3.67), соответственно,

окончательно получим

$$r_{\sigma} = \frac{4g^2 m^2 (1 + 2\xi)}{\xi^2} \int \frac{d\tilde{q} d\tilde{p}}{(m^2 - (p - q)^2)(m^2 - p^2)^2} \times \\ \times \frac{(3p^2 - 2(pq) + m^2)}{(4m^2 - q^2)}, \quad (3.72)$$

$$r_{\pi} = -\frac{4ig^2 m^2}{\xi^2} \int \frac{d\tilde{q} d\tilde{p} (-p^2 + 2(pq) + m^2)}{(m^2 - (p - q)^2)(m^2 - p^2)^2 q^2}, \quad (3.73)$$

Вычисление этих интегралов дает нам ответ на поставленную задачу. Для этой цели в интегралах (3.72) и (3.73) переходим в евклидову метрику, вводя стандартную фейнмановскую параметризацию и сдвигая импульсную переменную, мы можем выполнить интегрирование по углам. В соответствии с нашими правилами ( см. раздел 3.2) вводим под интеграл весовую функцию  $w_D(q_e^2)$ .

Интегралы для  $r_{\pi}$  вычисляются в размерно-аналитической регуляризации в замкнутом виде, и тогда ответ имеет очень простой вид

$$r_{\pi} = \frac{1}{4\xi}. \quad (3.74)$$

Скалярный вклад может быть представлен в виде

$$r_{\sigma} = \frac{4^{\xi} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \xi\right)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(3 + \xi)} \int_0^1 \frac{du}{(4 - 3u)^{1+\xi}} \left[ (3 - 2u)(1 - \xi) F\left(1 + \xi, 2 - \xi; 3 + \xi; \frac{(u - 2)^2}{4 - 3u}\right) - \right.$$

$$-(1+2\xi)F\left(1+\xi, 1-\xi; 3+\xi; \frac{(u-2)^2}{4-3u}\right). \quad (3.75)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что как  $r_\pi$ , так и  $r_\sigma$  зависят только от параметра регуляризации  $\xi$  и не зависят от других параметров модели. Эта особенность характерна только для размерно-аналитической регуляризации. Результаты вычислений в области значений параметра  $0 < \xi \leq 1$  представлены в виде табл. 3.1. Мы видим, что вклад сигма-мезона в этой области невелик, в то время, как вклад пиона при  $0 < \xi \leq 0.3 \div 0.5$  значителен, и, строго говоря, в этой последней области мы не можем считать этот вклад поправкой, т.е. при этих значениях параметра квантовые флуктуации велики и могут приводить к коренному изменению всей физической картины в модели НИЛ, как это считается, например, в работах [136, 148, 166, 167].

Таблица 3.1

Относительные вклады сигма-мезона ( $r_\sigma$ ) и пиона ( $r_\pi$ ) в киральный конденсат  $c^3 U(1)$ -модели и отношение конденсата первого шага к конденсату главного приближения ( $c^{(1)}/c^{(0)}$ ) как функции параметра регуляризации  $\xi$

$\xi$	$r_\sigma$	$r_\pi$	$c^{(1)}/c^{(0)}$
0.1	0.264	2.50	0.556
0.2	0.189	1.250	0.346
0.3	0.119	0.833	0.250
0.4	0.057	0.625	0.189
0.5	0	0.50	0.145
0.6	-0.050	0.417	0.110
0.7	-0.094	0.357	0.081
0.8	-0.131	0.313	0.057
0.9	-0.162	0.278	0.037
1.0	-0.188	0.250	0.021

3.4. Теория с симметрией группы  $SU_V(2) \times SU_A(2)$ . Мезонные вклады в киральный конденсат

$U(1)$ -модель, рассмотренная выше, не имеет непосредственных физических приложений, и, хотя исследуемые нами мезонные вклады в киральный конденсат определяются полевой динамикой модели и не зависят критически от симметричных факторов, мы не можем оставаясь в рамках этой модели, оценить физические значения параметров модели и, соответственно, сделать какой-либо определенный вывод о роли мезонных вкладов. Для фиксации возможных значений параметров  $m$ ,  $\kappa$  и  $\xi$  необходимо рассмотреть модель, связанную с феноменологией легких адронов. В качестве такой модели мы рассмотрим модель с лагранжианом [37, 155]

$$L = \bar{\psi} i \hat{\partial} \psi + \frac{g}{2} \left[ (\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \tau^a \psi)^2 \right], \quad (3.76)$$

которую мы будем называть  $SU(2)$ -моделью НИЛ. Здесь,  $g > 0$  – константа связи с размерностью квадрата обратной массы.  $\psi \equiv \psi^\alpha(x)_j$  и  $\alpha = 1, \dots, 4$ ;  $c = 1, \dots, n_c$ ;  $j = 1, 2$ .  $\tau_{jk}^\alpha$  – генераторы группы  $SU(2)$  (матрицы Паули):

$$\tau^a \tau^b = \delta^{ab} + i \varepsilon^{abc} \tau^c, \quad a = 1, 2, 3;$$

которые нормированы следующим образом:

$$\text{tr} \tau^a \tau^b = 2 \delta^{ab}.$$

Уравнение ШД определяется из соотношения [155]

$$0 = \int D(\psi, \bar{\psi}) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}^\alpha(x)_j} \bar{\psi}^\beta(y)_k \times$$

$$\times \exp i \left[ \int dx' L(x') - \int dx' dy' \bar{\psi}(y') \eta(y', x') \psi(x') \right], \quad (3.77)$$

где

$$\bar{\psi}(y) \eta(y, x) \psi(x) \equiv \bar{\psi}^\beta(y)_k \eta^{\beta\alpha}(y, x)_{kj}^{dc} \psi^\alpha(x)_j^c,$$

$$\bar{\psi}^\beta(y)_k \psi^\alpha(x)_j^c \rightarrow i \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y, x)_{kj}^{dc}}.$$

Трансляционная инвариантность меры функционального интегрирования в (3.77) приводит к функционально-дифференциальному уравнению ШД для производящего функционала:

$$\begin{aligned} & \delta^{\alpha\beta} \delta^{cd} \delta_{jk} \delta(x-y) G + (i\hat{\partial} - m^0)_{ji}^{\alpha\alpha'} \frac{\delta G}{\delta \eta^{\beta\alpha'}(y, x)_{ki}^{dc}} + \\ & + ig \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y, x)_{kj}^{dc}} \text{tr} \left[ \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x)} \right] - \gamma_5^{\alpha\alpha'} \tau_{ji}^a \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha'}(y, x)_{kj_1}^{dc}} \text{tr} \left[ \gamma_5 \cdot \tau^a \cdot \frac{\delta G}{\delta \eta(x, x)} \right] \right\} = \\ & = \int dx_1 \eta^{\alpha\beta_1}(x, x_1)_{ji}^{cc_1} \frac{\delta G}{\delta \eta^{\beta\beta'}(y, x_1)_{ki}^{dc_1}}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Решение этого уравнения будем искать методом, предложенным в работах [201, 205, 208, 219], аналогично тому как было показано в разделе 3.1.

Уравнением главного приближения является аппроксимация уравнения ШД (3.78) с нулевой правой частью:

$$\delta^{\alpha\beta} \delta^{cd} \delta_{jk} \delta(x-y) G^{(0)} + (i\hat{\partial} - m^0)_{ji}^{\alpha\alpha'} \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta^{\beta\alpha'}(y, x)_{ki}^{dc}} +$$

$$\begin{aligned}
& + ig \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y,x)_{kj}^{dc}} \text{tr} \left[ \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x,x)} \right] - \right. \\
& \left. - \gamma_5^{\alpha\alpha'} \tau_{jj_1}^a \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha'}(y,x)_{kj_1}^{dc}} \text{tr} \left[ \gamma_5 \cdot \tau^a \cdot \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x,x)} \right] \right\} = 0, \quad (3.79)
\end{aligned}$$

решением которого является функционал (3.8)

$$G^{(0)} = \exp \text{Tr}(\eta * S).$$

Здесь  $S$  в импульсном пространстве имеет вид:

$$\begin{aligned}
(S^{-1})^{\alpha\beta}(p)_{jk}^{cd} &= (m_{0,jk} \delta^{\alpha\beta} - \delta_{jk} \hat{p}^{\alpha\beta}) \delta^{cd} - ig \delta^{\alpha\beta} \delta^{cd} \delta_{jk} \int d\tilde{p} \text{tr}[S(p)] = \\
&= \delta^{cd} (\delta^{\alpha\beta} m_{jk} - \hat{p}^{\alpha\beta} \delta_{jk}), \quad (3.80)
\end{aligned}$$

где

$$m_{jk} = m_{0,jk} - ig \delta_{jk} \int d\tilde{p} \text{tr}[S(p)].$$

Тогда уравнения самосогласования имеют вид:

$$\begin{aligned}
m_1 &= m_u - 4ign_c \cdot \int d\tilde{p} \left( \frac{m_1}{m_1^2 - p^2} + \frac{m_2}{m_2^2 - p^2} \right), \\
m_2 &= m_d - 4ign_c \cdot \int d\tilde{p} \left( \frac{m_1}{m_1^2 - p^2} + \frac{m_2}{m_2^2 - p^2} \right).
\end{aligned}$$

В киральном пределе:  $m_u = m_d = 0$ . Тогда  $m_1 = m_2 = m$  и уравнение

самосогласования в киральном пределе примет вид

$$1 = -8ign_c \cdot \int \frac{d\vec{p}}{m^2 - p^2}. \quad (3.81)$$

Расходящийся интеграл в правой части уравнения (3.81) должен восприниматься как некоторая регуляризация. Всегда существует кирально-симметричное тривиальное решение  $m = 0$ . Мы будем рассматривать физически интересное решение  $m \neq 0$ , соответствующее ДНКС.

В размерно-аналитической регуляризации уравнение самосогласования имеет вид (3.25) [37, 41]

$$1 = \kappa \Gamma(\xi) \left( \frac{4\pi M^2}{m^2} \right)^{1+\xi}, \quad (3.82)$$

где

$$\kappa = \frac{gn_c m^2}{2\pi^2}.$$

Уравнение для функционала  $n$ -го шага  $G^{(n)}$

$$\begin{aligned} & \delta^{\alpha\beta} \delta^{cd} \delta_{jk} \delta(x-y) G^{(n)} + (i\hat{\partial})_{ji}^{\alpha\alpha'} \frac{\delta G^{(n)}}{\delta \eta^{\beta\alpha'}(y, x)_{ki}^{dc}} + \\ & + ig \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y, x)_{kj}^{dc}} \text{tr} \left[ \frac{\delta G^{(n)}}{\delta \eta(x, x)} \right] - \gamma_5^{\alpha\alpha'} \tau_{jj_1}^a \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha'}(y, x)_{kj_1}^{dc}} \text{tr} \left[ \gamma_5 \cdot \tau^a \cdot \frac{\delta G^{(n)}}{\delta \eta(x, x)} \right] \right\} = \\ & = \eta * \frac{\delta G^{(n-1)}}{\delta \eta(x, x_1)}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Решение для (3.83) будем искать в виде  $G^{(n)} = P^{(n)}G^{(0)}$ , где  $P^{(0)} \equiv 1$ .  
Уравнение для  $P^{(n)}$  примет вид

$$\begin{aligned}
& -\frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y, x)_{kj}^{dc}} + ig \int dx_1 S^{\alpha\alpha'}(x - x_1)_{ji}^{cc_1} \left\{ \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha'}(y, x_1)_{ki}^{dc_1}} \text{tr} \left[ \frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} \right] - \right. \\
& \quad \left. - \gamma_5^{\alpha'\alpha_1} \tau_{il}^a \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha_1}(y, x_1)_{kl}^{dc_1}} \text{tr} \left[ \gamma_5 \cdot \tau^a \cdot \frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} \right] + \right. \\
& \quad \left. + S^{\alpha'\beta}(x_1 - y)_{ik}^{c_1d} \text{tr} \left[ \frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} \right] - \gamma_5^{\alpha'\alpha_1} \tau_{il}^a S^{\alpha_1\beta}(x_1 - y)_{lk}^{c_1d} \text{tr} \left[ \gamma_5 \cdot \tau^a \frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} \right] \right\} = \\
& \quad = \int dx_1 dx_2 S^{\alpha\alpha'}(x - x_1)_{ji}^{cc_1} \eta^{\alpha'\beta'}(x_1, x_2)_{il}^{c_1c_2} \times \\
& \quad \times \left[ P^{(n-1)} S^{\beta'\beta}(x_2 - y)_{lk}^{c_2d} + \frac{\delta P^{(n-1)}}{\delta \eta^{\beta\beta'}(y, x_2)_{kl}^{dc_2}} \right] \tag{3.84}
\end{aligned}$$

Решение уравнения первого шага есть функционал

$$G^{(1)} = \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} \eta * S_2 * \eta + \text{Tr} S^{(1)} * \eta \right\} G^{(0)}.$$

Проводя процедуру, аналогичную той, что проводилась в разделе 3.1, с учетом уравнения (3.80) получаем уравнение для двухчастичной функции  $S_2$  [155]

$$S_2 \left( \begin{array}{cc} x & y \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha'\beta', c'd', j'k'}^{\alpha\beta, cd, jk} = -S^{\alpha\beta'}(x - y')_{jk'}^{cd'} S^{\alpha'\beta}(x' - y)_{j'k}^{c'd} +$$

$$\begin{aligned}
& + ig \int dx_1 \left\{ [S(x-x_1)S(x_1-y)]_{jk}^{\alpha\beta,cd} S_2 \left( \begin{matrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{matrix} \right)_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}^{\beta_1\beta_1,c_1c_1,j_1j_1} - \right. \\
& \left. - [S(x-x_1)\gamma_5\tau^a S(x_1-y)]_{jk}^{\alpha\beta,cd} S_2 \left( \begin{matrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{matrix} \right)_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}^{\beta_1\beta_2,c_1c_1,j_1k_1} \gamma_5^{\beta_2\beta_1} \tau_{k_1j_1}^a \right\}. \quad (3.85)
\end{aligned}$$

Уравнение для поправки к пропагатору кварка первого порядка есть

$$\begin{aligned}
S^{(1)\alpha\beta}(x-y)_{jk}^{cd} = & ig \int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)_{j_1j_1}^{c_1c_1} \left[ S_2 \left( \begin{matrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{matrix} \right)_{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}^{\alpha_1\beta,c_1d,j_1d} - \right. \\
& \left. - \gamma_5^{\alpha_1\beta_1} \tau_{j_1k_1}^a S_2 \left( \begin{matrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{matrix} \right)_{\alpha_3\alpha_2,c_2c_2,k_2j_2}^{\beta_1\beta,c_1d,k_1k} \tau_{k_2j_2}^a \gamma_5^{\alpha_2\alpha_3} \right] + \\
& + ig \int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)_{j_1j_1}^{c_1c_1} S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)_{j_1k}^{c_1d} tr S^{(1)}(0).
\end{aligned}$$

Графические изображения этих уравнений приведены на рис.3.1 - 3.2, при условии, что под понятием вершина ( см. рис.3.3) подразумевается

$$ = ig \left( \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \gamma_5 \frac{\tau}{2} \otimes \gamma_5 \frac{\tau}{2} \right)$$

Рис. 3.4. Четырехкварковая вершина в  $SU(2)$ -модели НИЛ

Уравнение для массового оператора первого шага  $\Sigma^{(1)} = [S]^{-1} * S^{(1)} * [S]^{-1}$  имеет вид:

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(x-y)_{jk}^{cd} = ig \delta^{\alpha\beta} \delta^{cd} \delta_{jk} \delta(x-y) tr [S^{(1)}(0)] +$$

$$\begin{aligned}
& + ig \int dy_1 \left\{ S_2 \left( \begin{array}{c} x & y_1 \\ x & x \end{array} \right)_{\beta_1 \beta_1, c_2 c_2, j_1 j_1}^{\alpha \alpha_1, c c_1, j i} \cdot [S]_{\alpha_1 \beta}^{-1} (y_1 - y)_{ik}^{c_1 d} - \right. \\
& \left. - \gamma_5^{\alpha \alpha_1} \tau_{j_1}^a S_2 \left( \begin{array}{c} x & y_1 \\ x & x \end{array} \right)_{\beta_1 \beta_2, c_2 c_2, j_1 k_1}^{\alpha_1 \alpha_2, c c_1, l i} \gamma_5^{\beta_2 \beta_1} \tau_{k_1 j_1}^a [S]_{\alpha_2 \beta}^{-1} (y_1 - y)_{ik}^{c_1 d} \right\}. \quad (3.86)
\end{aligned}$$

Двухчастичная ампутированная функция есть

$$\begin{aligned}
F_2 \left( \begin{array}{c} x & y \\ x' & y' \end{array} \right) & \equiv \int dx_1 dy_1 dx'_1 dy'_1 [S]^{-1}(x - x_1) [S]^{-1}(x' - x'_1) \times \\
& \times S_2 \left( \begin{array}{c} x_1 & y_1 \\ x'_1 & y'_1 \end{array} \right) [S]^{-1}(y_1 - y) [S]^{-1}(y'_1 - y'). \quad (3.87)
\end{aligned}$$

Двухчастичная амплитуда будет иметь вид:

$$A \left( \begin{array}{c} x & y \\ x' & y' \end{array} \right) \equiv F_2 \left( \begin{array}{c} x & y \\ x' & y' \end{array} \right) + [S]^{-1}(x - y) [S]^{-1}(x' - y). \quad (3.88)$$

Цветовые и ароматовые структуры в киральном пределе есть

$$S^{\alpha \beta}(x)_{jk}^{cd} = \delta^{cd} \delta_{jk} S^{\alpha \beta}(x),$$

$$A \left( \begin{array}{c} x & y \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha' \beta', c' d', j' k'}^{\alpha \beta, cd, jk} = \delta^{cd} \delta^{c' d'} \left[ \delta_{jk} \delta_{j' k'} A_{\sigma} \left( \begin{array}{c} x & y \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha' \beta'}^{\alpha \beta} + \tau_{jk}^a \tau_{j' k'}^a A_{\pi} \left( \begin{array}{c} x & y \\ x' & y' \end{array} \right)_{\alpha' \beta'}^{\alpha \beta} \right].$$

Вводя анзац,

$$A_\sigma \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} = \delta(x-y)\delta(x'-y')\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'} A_\sigma(x-x'),$$

$$A_\pi \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} = \delta(x-y)\delta(x'-y')\gamma_5^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'} A_\pi(x-x'),$$

получим уравнения для скалярных амплитуд

$$A_\sigma(x) = -ig\delta(x) + 2ign_c \int dx_1 l_s(x-x_1)A_\sigma(x_1), \quad (3.89)$$

$$A_\pi(x) = ig\delta(x) - 2ign_c \int dx_1 l_p(x-x_1)A_\pi(x_1), \quad (3.90)$$

где

$$l_s(x) = tr_\alpha [S(x)S(-x)]; \quad l_s(p) = \int d\tilde{q} tr_\alpha [S(p+q)S(q)] - \text{скалярная петля,}$$

$$l_p(x) = tr_\alpha [S(x)S(x)]; \quad l_p(p) = \int d\tilde{q} tr_\alpha [S(p-q)S(q)] - \text{псевдоскалярная петля.}$$

Амплитуды в импульсном пространстве будут иметь вид:

$$A_\sigma = -\frac{ig}{1 - 2ign_c l_s}, \quad (3.91)$$

$$A_\pi = \frac{ig}{1 + 2ign_c l_p}. \quad (3.92)$$

Массовый оператор первого шага имеет вид

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(x)_{jk}^{cd} =$$

$$= \delta^{cd}\delta_{jk} [2ign_c \delta^{\alpha\beta}(x) tr_\alpha S^{(1)}(0) + S^{\alpha\beta}(x)A_\sigma(x) + 3S^{\alpha\beta}(-x)A_\pi(x)]. \quad (3.93)$$

Конденсат главного приближения  $\chi^{(0)}$  описывается уравнением (3.52).

Конденсат первого шага определяется следующим образом

$$\chi^{(1)} = i \text{tr} S^{(1)}(0) = 8 \text{ign}_c \int d\tilde{p} B_1(p), \quad (3.94)$$

где  $S^{(1)} = A_1 \hat{p} + B_1$ , а  $B_1(p)$  определяется по формуле

$$B_1(p) = g \chi^{(1)} \frac{m^2 + p^2}{(m^2 - p^2)^2} + m \int d\tilde{q} \frac{1}{(m^2 - (p - q)^2)(m^2 - p^2)^2} \times \\ \times \left( (3p^2 - 2(pq) + m^2) A_\sigma(q) + 3(-p^2 + 2(pq) + m^2) A_\pi(q) \right).$$

Соотношение конденсатов  $\chi^{(1)}$  первого шага (3.94) к конденсату главного приближения  $\chi^{(0)}$  (3.52) есть

$$r \equiv \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}} = r_\sigma + r_\pi = \\ = -\frac{8 \text{ign}_c}{1 - 8 \text{ign}_c J} \int \frac{d\tilde{q} d\tilde{p}}{(m^2 - (p - q)^2)(m^2 - p^2)^2} \times \\ \times \left[ (3p^2 - 2(pq) + m^2) A_\sigma(q) + 3(-p^2 + 2(pq) + m^2) A_\pi(q) \right], \quad (3.95)$$

где интеграл  $J = \int \frac{m^2 + p^2}{(m^2 - p^2)^2} d\tilde{p}$  в размерно-аналитической регуляризации имеет вид

$$J = \frac{1}{8 \text{ign}_c} (1 - 2\xi).$$

Вычислим вклады сигма-мезона  $r_\sigma$  и пиона  $r_\pi$  отдельно. Используя уравнение самосогласования (3.25) при  $m \neq 0$  с коэффициентом  $\kappa = \frac{gn_c m^2}{2\pi^2}$  нетрудно получить (в трансляционно-инвариантной регуляризации) для  $A_\sigma$  и  $A_\pi$  в полюсном приближении (т.е. в интеграле  $I_0(p)$  (3.48) который входит в амплитуды выбирается приближение главных сингулярностей) следующие выражения:

$$A_\sigma = \frac{1}{4n_c(4m^2 - p^2)I_0(4m^2)} = \frac{igm^2(1+2\xi)}{n_c(4m^2 - p^2)\xi}, \quad (3.96)$$

$$A_\pi = \frac{1}{4n_c p^2 I_0(0)} = -\frac{igm^2}{n_c p^2 \xi}, \quad (3.97)$$

Согласно выражению для  $r$  (3.95) и амплитуд (3.96) и (3.97) получим:

$$r_\sigma = -\frac{4g^2 m^2 (1+2\xi)}{\xi^2} \int \frac{d\tilde{q} d\tilde{p} (3p^2 - 2(pq) + m^2)}{(m^2 - (p-q)^2)(m^2 - p^2)^2 (4m^2 - q^2)}, \quad (3.98)$$

$$r_\pi = -\frac{12g^2 m^2}{\xi^2} \int \frac{d\tilde{q} d\tilde{p} (-p^2 + 2(pq) + m^2)}{(m^2 - (p-q)^2)(m^2 - p^2)^2 q^2}. \quad (3.99)$$

Далее переходим в евклидову метрику, вводим стандартную фейнмановскую параметризацию, сдвигаем импульсную переменную. Вводя под интеграл весовую функцию  $w_D(q_e^2)$ , а далее проводя интегрирование, получим

$$r_\pi = \frac{3}{8n_c \xi}, \quad (3.100)$$

$$r_\sigma = \frac{4^{\xi-1} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \xi\right)}{n_c \sqrt{\pi} \Gamma(3 + \xi)} \int_0^1 \frac{du}{(4-3u)^{1+\xi}} \left[ (3-2u)(1-\xi) F\left(1+\xi, 2-\xi; 3+\xi; \frac{(u-2)^2}{4-3u}\right) - (1+2\xi) F\left(1+\xi, 1-\xi; 3+\xi; \frac{(u-2)^2}{4-3u}\right) \right]. \quad (3.101)$$

Отметим, что в разделе 3.5 при фиксированном  $\xi$  приведены численные вычисления  $r_\sigma$  и  $r_\pi$  вне полюсном приближении амплитуд (3.91) и (3.92) (т.е. в интеграле  $I_0(p)$  который входит в амплитуды,  $I_0$  есть функция от  $p^2$ , в отличие от амплитуд в полюсном приближении (3.96) и (3.97)).

В табл. 3.2 приведены вклады сигма-мезона ( $r_\sigma$ ), пиона ( $r_\pi$ ) в киральный конденсат  $c^3$  и к конденсату главного приближения ( $c^{(1)}/c^{(0)}$ ) как функции параметра регуляризации  $\xi$ .

Таблица 3.2

Относительные вклады сигма-мезона ( $r_\sigma$ ) и пиона ( $r_\pi$ ) в киральный конденсат  $c^3$   $SU(2)$ - модели и отношение конденсата первого шага к конденсату главного приближения ( $c^{(1)}/c^{(0)}$ ) как функции параметра регуляризации  $\xi$ .

$\xi$	$r_\sigma$	$r_\pi$	$c^{(1)}/c^{(0)}$
0.1	0.044	1.250	0.319
0.2	0.032	0.625	0.183
0.3	0.020	0.417	0.128
0.4	0.010	0.313	0.098
0.5	0	0.250	0.077
0.6	-0.008	0.209	0.063
0.7	-0.016	0.179	0.052
0.8	-0.022	0.157	0.043
0.9	-0.027	0.139	0.036
1.0	-0.031	0.125	0.030

При физическом значении числа цветов  $n_c = 3$  оба вклада уменьшаются при тех же значениях параметра регуляризации по сравнению с аналогичными вкладами  $U(1)$ -модели ( см. Табл. 3.1):  $r_\sigma$  в шесть раз,  $r_\pi$ - вдвое. Соответственно сдвигается и граница области больших флуктуаций. Мы видим, что в  $SU(2)$ -модели при значениях  $\xi \geq 0.2$  конденсат первого шага  $c^{(1)}$  не превышает 20% от конденсата главного приближения, т.е. можно считать, что при таких значениях параметра регуляризации мы находимся в зоне стабильности относительно квантовых флуктуаций, вызванных мезонными вкладами.

### 3.5. Выбор параметров модели и мезонные вклады с учетом поправок.

#### Поправки к массе кварка

В настоящем разделе приводим вычисления улучшенных параметров модели за счет поправок к киральному конденсату, также вычисляем мезонные поправки к массе кварка.

#### 3.5.1. Параметры модели

Для фиксации значений параметров  $SU(2)$ -модели НИЛ- динамической массы кварка  $m$ , параметра регуляризации  $\xi$  и константы связи  $g$  ( либо безразмерной константы  $\kappa = \frac{gn_c m^2}{2\pi^2}$  ) необходимо связать значения этих параметров с измеряемыми величинами. В качестве последних мы выберем значения распадной константы пиона, киральный конденсат и ширину распада  $\pi^0$ -мезона на два фотона:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ .

Распадная константа пиона  $f_\pi = 93 \text{ МэВ}$  определяется формулой

$$i\delta^{\alpha\beta}k_\mu f_\pi = \langle 0 | \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi | b, k \rangle, \quad (3.102)$$

где  $|b, k\rangle$  – состояние пиона  $b$  с импульсом  $k_\mu$ .

В  $SU(2)$ –модели НИЛ существует не зависящая от регуляризации формула для  $f_\pi$ :

$$f_\pi^2 = -4in_c m^2 I_0(0) \quad (3.103)$$

( см. например [168, 169] ). Для размерно-аналитической регуляризации из (3.48) получаем

$$I_0(0) = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\xi}{\kappa}. \quad (3.104)$$

В итоге для  $f_\pi$  получим:

$$(f_\pi^2) = \frac{\xi}{2g}. \quad (3.105)$$

Киральный конденсат  $c$  в главном приближении есть

$$c = (\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle)^{1/3} = -\left(\frac{m}{2g}\right)^{1/3} \quad (3.106)$$

( эта формула в  $SU(2)$ –модели НИЛ не зависит от регуляризации).

Ширина распада  $\Gamma_{\pi^0\gamma\gamma} = 7.7 \text{ КэВ}$  в размерно-аналитической регуляризации  $SU(2)$ –модели НИЛ вычислена в работе [170]. В наших обозначениях эта формула имеет вид

$$\Gamma_{\pi^0\gamma\gamma} = \frac{\alpha^2 m_\pi^3 \xi^2 (1 + \xi)^2}{64\pi^3 f_\pi^2 \kappa^2}. \quad (3.107)$$

Здесь  $\alpha = 1/137$  – постоянная тонкой структуры;  $m_\pi = 135 \text{ МэВ}$  – масса  $\pi_0$ -мезона.

Кроме того, в размерно-аналитической регуляризации, необходимо фиксировать также значение величины  $M$  (“точки вычитания”). Анализ результатов показывает, что в весьма широком диапазоне значений конденсата значение величины  $M$  практически неизменно и составляет  $M \approx 100 \text{ МэВ}$  и повсюду входит в комбинации  $4\pi M^2$ , т.е.  $\sqrt{4\pi M^2} \approx 350 \text{ МэВ}$ . Практически это значение совпадает со значением массы кварка  $m$ . Итак  $4\pi M^2$  всюду отождествляется с массой кварка в главном приближении. Тогда уравнение самосогласования примет вид:

$$\kappa \Gamma(\xi) = 1. \quad (3.108)$$

Формулы (3.105) – (3.108) позволяют определить значения параметров  $SU(2)$ -модели НИЛ при  $n_c = 3$ .

Киральный конденсат  $c = \left( \frac{\langle \bar{\psi} \psi \rangle}{2} \right)^{1/3}$  не является непосредственно измеримой величиной. В связи с этим мы приведем значения параметров модели при нескольких наиболее характерных значениях величины кирального конденсата. При  $c = -160 \text{ МэВ}$  мы получаем  $\xi \cong 1$ ,  $m \cong 475 \text{ МэВ}$ ,  $\kappa \cong 2$ . Отметим, что при таком значении параметра регуляризации  $\xi$  поправка к конденсату  $c$  составляет около 3% ( см. табл. 3.2), т.е. модель стабильна относительно квантовых флюктуаций, вызываемых мезонами. Но столь низкое значение величины кирального конденсата вряд ли является приемлемым феноменологически, так как согласно формуле Гелл-Манна-Окса-Реннера приводит к большим значениям токовых масс кварков. В табл. 3.3 приведены

значения параметров модели при нескольких характерных значениях величины кирального конденсата.

Таблица 3.3

Параметры модели в размерно-аналитической регуляризации в главном порядке : киральный конденсат  $c$  , динамическая масса кварка  $m$  , параметр регуляризации  $\xi$  и безразмерная константа связи  $\kappa$  .

$c(MэВ)$	$m(MэВ)$	$\xi$	$\kappa = 3gm^2/2\pi^2$
-210	357	0.333	0.373
-220	356	0.289	0.322
-230	354	0.252	0.277
-240	353	0.221	0.242
-250	352	0.195	0.212

### 3.5.2. Пропагаторы первого шага

Уравнение первого шага определяют поправки к пропагатору кварка. Массовый оператор первого порядка  $\Sigma^{(1)} = [S]^{-1} * S^{(1)} * [S]^{-1}$ , где  $S^{(1)}$  – поправка первого порядка к пропагатору кварка, как известно, определяется в  $x$ -пространстве уравнением вида:

$$\Sigma^{(1)}(x) = ig\delta(x)trS^{(1)}(0) + S(x)A_\sigma(x) + 3S(-x)A_\pi(x). \quad (3.109)$$

Обратный пропагатор кварка есть

$$S^{-1} = m - \hat{p} - \Sigma^{(1)} = b(p^2) - a(p^2)\hat{p}.$$

Если пропагатор  $S$  имеет полюс в точке  $p^2 = m_r^2$  ( частица с массой  $m_r$  ), то

$$b^2(p^2) - a^2(p^2)p^2 = (m_r^2 - p_r^2)f(p^2)$$

(при  $f(m_r^2) \neq 0$ ). Отсюда следует, что

$$b^2(m_r^2) - m_r^2 a^2(m_r^2) = 0,$$

или

$$b(m_r^2) \mp m_r a(m_r^2) = 0.$$

Знак “+” соответствует античастице. Итак, мы имеем уравнение для массы кварка  $m_r$ :

$$b(m_r^2) = m_r a(m_r^2)$$

Введем массовые функции первого порядка  $a_1(p^2)$  и  $b_1(p^2)$ :

$$\Sigma^{(1)} \equiv a_1 p - m b_1, \quad (3.110)$$

где  $m$  – масса в главном приближении. Тогда обратный пропагатор кварка можно записать как,

$$S^{-1} = m(1 + b_1) - (1 + a_1)\hat{p}$$

и уравнение для массы примет вид:

$$m(1 + b_1(m_r^2)) = m_r(1 + a_1(m_r^2))$$

Введя массовый сдвиг  $m_r = m + \delta m$  и, поскольку по своему смыслу  $a_1$  и  $b_1$  являются малыми добавками:  $a_1 \ll 1$ ,  $b_1 \ll 1$ , то разлагая  $a_1(m_r^2)$  и  $b_1(m_r^2)$  вблизи точки  $m$ , получаем формулу для поправки к массе кварка  $\delta m \equiv m_r - m$ :

$$\frac{\delta m}{m} \cong b_1(m^2) - a_1(m^2). \quad (3.111)$$

Для поправки к пропагатору  $S^{(1)} = S\Sigma^{(1)}S$  получаем:

$$S^{(1)} = \frac{1}{(m^2 - p^2)^2} [2mp^2 a_1 - m(m^2 + p^2)b_1 + (a_1(m^2 + p^2) - 2m^2 b_1)\hat{p}],$$

соответственно, конденсат первого шага есть

$$\chi^{(1)} = itrS^{(1)}(0) = 8in_c m \int d\tilde{p} \frac{2p^2 a_1 - (m^2 + p^2)b_1}{(m^2 - p^2)^2}. \quad (3.112)$$

Отношение конденсата первого порядка к конденсату главного приближения есть

$$r = \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}} = -\frac{g\chi^{(1)}}{m} = -8ign_c \int d\tilde{p} \frac{2p^2 a_1 - (m^2 + p^2)b_1}{(m^2 - p^2)^2}. \quad (3.113)$$

В соответствии с определением (3.110), мы получим из (3.109) выражения для  $a^{(1)}$  и  $b^{(1)}$ :

$$b_1(p^2) = r - \int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - (p-q)^2} [A_\sigma(q) + 3A_\pi(q)], \quad (3.114)$$

$$p^2 a_1(p^2) = \int d\tilde{q} \frac{(p^2 - (pq))}{m^2 - (p-q)^2} [A_\sigma(q) - 3A_\pi(q)]. \quad (3.115)$$

Из формул (3.114) и (3.115) следует, что поправки к пропагатору состоят из двух частей: пионные поправки, обусловленные псевдоскалярной амплитудой  $A_\pi$  и вклады, обусловленные скалярной амплитудой  $A_\sigma$ :

$$a^{(1)} = a_\pi^{(1)} + a_\sigma^{(1)}; \quad b^{(1)} = b_\pi^{(1)} + b_\sigma^{(1)}. \quad (3.116)$$

## 3.5.3. Вклад пиона

Сначала рассмотрим вклад пиона в пропагатор кварка. Согласно (3.114) – (3.116) получим формулы:

$$b_{1\pi}(p^2) = r_\pi - 3 \int \frac{d\tilde{q} A_\pi(q)}{m^2 - (p-q)^2}, \quad (3.117)$$

$$p^2 a_{1\pi}(p^2) = -3 \int \frac{d\tilde{q} (p^2 - (pq))}{m^2 - (p-q)^2} A_\pi(q). \quad (3.118)$$

Для вычисления мы будем использовать полюсное приближение (3.97):

$$A_\pi^{pole} = -\frac{igm^2}{\xi q^2 n_c}.$$

Вычисление интегралов (3.117) и (3.118), соответствуют вычислению нижеследующих интегралов

$$I_0(p^2; m^2, \mu^2) = \int \frac{d\tilde{q}}{(m^2 - (p-q)^2)(\mu^2 - q^2)},$$

$$I_v(p^2; m^2, \mu^2) = \int \frac{q_v d\tilde{q}}{(m^2 - (p-q)^2)(\mu^2 - q^2)}.$$

при  $\mu^2 \rightarrow 0$ .

Эти интегралы вычисляются по тем же правилам, что и выше ( см. разделы 3.1-3.3): вводим фейнмановскую параметризацию, сдвигаем переменную интегрирования, переходим в евклидовую метрику, вводим под интеграл весовую функцию и модифицируем меру интегрирования по  $q$ ,

$$d\tilde{q} \rightarrow \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{\Gamma(1-\xi)} \left( \frac{4\pi M^2}{q_\varepsilon^2} \right)^{1+\xi} q_\varepsilon^2 dq_\varepsilon^2.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$I_0(p^2; m^2, \mu^2 \rightarrow 0) = - \frac{i(4\pi M^2)^{1+\xi} \Gamma(\xi) F\left(-\xi, 1+\xi; 1-\xi; -\frac{p^2}{m^2-p^2}\right)}{16\pi^2 (m^2-p^2)^{1+\xi}},$$

$$I_\nu(p^2; m^2, \mu^2 \rightarrow 0) = - \frac{i\xi p_\nu (4\pi M^2)^{1+\xi} \Gamma(\xi) F\left(1-\xi, 1+\xi; 2-\xi; -\frac{p^2}{m^2-p^2}\right)}{16\pi^2 (1-\xi)(m^2-p^2)^{1+\xi}}.$$

Далее используя формулу [71, с.454]

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} F\left(c-a, b; c; \frac{z}{z-1}\right)$$

и уравнение самосогласования (3.25) окончательно получаем

$$b_{1\pi} = r_\pi - \frac{3}{4\xi n_\varepsilon} F\left(1, 1+\xi; 1-\xi; \frac{p^2}{m^2}\right), \quad (3.119)$$

$$a_{1\pi} = -\frac{3}{4n_c} \left[ \frac{1}{\xi} F\left(1, 1+\xi; 1-\xi; \frac{p^2}{m^2}\right) + \frac{1}{1-\xi} F\left(1, 1+\xi; 2-\xi; \frac{p^2}{m^2}\right) \right], \quad (3.120)$$

Согласно (3.119) и (3.120) получим формулу

$$b_{1\pi} - a_{1\pi} = r_\pi + \frac{3}{4n_c} \frac{1}{1-\xi} F\left(1, 1+\xi; 2-\xi; \frac{p^2}{m^2}\right). \quad (3.121)$$

Наконец для получения окончательного выражения для поправки пиона в массу кварка в (3.121) переходим к пределу  $p^2 \rightarrow m^2$ :

$$\frac{\delta m^{(\pi)}}{m} = b_{1\pi}(m^2) - a_{1\pi}(m^2) = r_\pi - \frac{3}{8n_c\xi}. \quad (3.122)$$

где  $r_\pi$  имеет следующий вид ( см. раздел 3.4 ):

$$r_\pi = \frac{3}{8n_c\xi}.$$

Этот же результат можно получить также, из уравнения (3.112). Согласно этой формуле и (3.122) получаем очень важный результат: в размерно-аналитической регуляризации в  $SU(2)$ - модели НИЛ поправка пиона в массу кварка равна нулю [34, 159].

#### 3.5.4. Вклад сигма мезона

Рассмотрим вклад скалярной амплитуды  $A_\sigma$  в конденсат и в массу кварка. Согласно (3.114) и (3.115), имеем

$$b_{1\sigma} = r_\sigma - \int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - (p-q)^2} A_\sigma(q), \quad (3.123)$$

$$p^2 a_{1\sigma} = \int \frac{d\tilde{q}(p^2 - pq)}{m^2 - (p-q)^2} A_\sigma(q). \quad (3.124)$$

Для вычисления этого вклада мы будем использовать приближение главной сингулярности:

$$A_\sigma = \frac{1}{4n_c(4m^2 - p^2)I_0},$$

где  $I_0(p^2)$  есть (3.48). При  $\varepsilon < -1/2$

$$I_0(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow 4m^2} \approx -\frac{i\xi}{8gn_c m^2(1+2\xi)}.$$

Тогда полюсное значение амплитуды примет вид:

$$A_\sigma \approx ig \frac{1+2\xi}{\xi} \frac{2m^2}{4m^2 - p^2}.$$

В физической области  $\xi > 0$ , полюсное приближение должно пониматься как аналитическое продолжение этой формулы.

Если  $\varepsilon > -1/2$ , то

$$I_0(p^2) \Big|_{p^2 \rightarrow 4m^2} \approx -\frac{i\xi\Gamma(3/2)\Gamma(1/2+\xi)}{8gn_c m^2\Gamma(1+\xi)} \left(\frac{4m^2 - p^2}{4m^2}\right)^{-1/2-\xi}.$$

Для амплитуды получаем

$$A_\sigma \approx -ig \frac{\Gamma(\xi)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2+\xi)} \left(\frac{4m^2}{4m^2 - p^2}\right)^{1/2-\xi},$$

которым и будем пользоваться.

В размерно-аналитической регуляризации такое приближение описывается формулой (3.96).

Вычисление  $b_{1\sigma}$  сводится к вычислению интеграла

$$I_\xi = \int \frac{d\tilde{q}}{(m^2 - (p-q)^2)(4m^2 - q^2)^{1/2-\xi}}.$$

Этот интеграл вычисляется с помощью обобщения параметризации Фейнмана:

$$\frac{1}{A^\nu B^\mu} \approx \frac{\Gamma(\nu + \mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int_0^1 dx \frac{x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}}{[Ax + B(1-x)]^{\nu+\mu}}.$$

Сделав сдвиг импульсной переменной и вычислив интеграл по  $dq$  подобно случаю вычислений в пионном секторе ( см. выше), получим

$$I_\xi = \frac{i\sqrt{\pi}(4\pi M^2)^{1+\xi}}{16\pi^2 \Gamma(1/2 - \xi)} \int_0^1 \frac{x^{-1/2-\xi}}{\sqrt{m^2(1+3x) - p^2 x(1-x)}},$$

и, следовательно

$$b_{1\sigma}(p^2) = r_\sigma - \frac{1}{4^{1+\xi} n_c} \cdot \frac{\cos \pi \xi}{\pi} \int_0^1 \frac{x^{-1/2-\xi}}{\sqrt{1+3x - \frac{p^2}{m^2} x(1-x)}}. \quad (3.125)$$

Для вычисления уравнения (3.124) для  $a_{1\sigma}$  надо вычислить интеграл

$$I_\xi^\mu = \int \frac{q^\mu d\tilde{q}}{(m^2 - (p-q)^2)(4m^2 - q^2)^{1/2-\xi}}.$$

Проводя аналогичное вычисление ( см. выше, вычисление  $b_{1\sigma}$  ) получаем

$$I_\xi^\mu = \frac{ip^\mu \sqrt{\pi}(4\pi M^2)^{1+\xi}}{16\pi^2 \Gamma(1/2 - \xi)} \int_0^1 \frac{x^{1/2-\xi}}{\sqrt{m^2(1+3x) - p^2 x(1-x)}},$$

и, следовательно,

$$a_{1\sigma}(p^2) = \frac{1}{4^{1+\xi} n_c} \cdot \frac{\cos \pi \xi}{\pi} \int_0^1 \frac{x^{1/2-\xi}}{\sqrt{1+3x - \frac{p^2}{m^2} x(1-x)}} dx. \quad (3.126)$$

Согласно (3.111), (3.125) и (3.126) (в пределе  $p^2 \rightarrow m^2$ ) для поправки сигма-мезона в массу кварка окончательно получим

$$\frac{\delta m^{(\sigma)}}{m} = b_{1\sigma}(m^2) - a_{1\sigma}(m^2) = r_\sigma - \frac{\cos \pi \xi}{4^{1+\xi} n_c \pi (1/2 - \xi)}. \quad (3.127)$$

Рассмотрим отдельно вычисление при  $\xi = 1/2$ . В этом случае

$$A_\sigma = -ig,$$

т.е. при  $\xi = 1/2$  скалярная амплитуда вовсе не имеет особенностей – сигма-мезон исчезает! Таким образом, мы приходим к выводу, что в размерно-аналитической регуляризации при физических значениях параметра скалярная амплитуда  $A_\sigma$  модели НИЛ не содержит полюсного члена, который можно интерпретировать как физический скалярный мезон.

С учетом уравнения самосогласования имеем

$$b_{1\sigma} = r_\sigma + ig \int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - (p-q)^2} = r_\sigma - \frac{1}{8n_c},$$

$$p^2 a_{1\sigma} = -ig \int \frac{d\tilde{q} (p^2 - pq)}{m^2 - (p-q)^2} = -ig \int d\tilde{q} \frac{(pq)}{m^2 - q^2} = 0.$$

Следовательно, согласно (3.113),

$$r_\sigma = 8ign \int d\tilde{p} \frac{(m^2 + p^2) b_{1\sigma}(p^2)}{(m^2 - p^2)^2} = 0$$

и окончательно получим:

$$\frac{\delta m^{(\sigma)}}{m} = -\frac{1}{8n_c},$$

при  $\xi = 1/2$ . Это совпадает с пределом  $\xi \rightarrow 1/2$  в формуле (3.127).

Теперь вычислим  $r_\sigma$ . С учетом (3.113), (3.123) - (3.125) получим

$$r_\sigma = -\frac{ig \cos \pi \xi}{4\xi \pi \xi} \int_0^1 dx x^{-1/2-\xi} \int d\tilde{p} \frac{m^2 + (1+2x)p^2}{(m^2 - p^2)^2 \sqrt{1+3x - \frac{p^2}{m^2} x(1-x)}}.$$

Проводя интегрирование по  $dp$  в размерно-аналитической регуляризации получим

$$r_\sigma = \frac{f(\xi)}{2\Gamma(5/2)n_c 4^{1+\xi} \Gamma(1+\xi)\Gamma(1/2-\xi)}, \quad (3.128)$$

где

$$f(\xi) = \int_0^1 dx \frac{x^{-1/2-\xi}}{\sqrt{1+3x}} \left[ (1/2 + \xi) F\left(1/2, 1-\xi; 5/2; \frac{(1+x)^2}{1+3x}\right) - \right. \\ \left. - (1-\xi)(1+2x) F\left(1/2, 2-\xi; 5/2; \frac{(1+x)^2}{1+3x}\right) \right].$$

Эта формула пригодна для численного счета при  $0 < \xi < 1/2$ , после выделения сингулярного множителя  $x^{-\xi-1/2}$ , введем обозначение

$$\phi(x) = (1/2 + \xi) F\left(1/2, 1-\xi; 5/2; \frac{(1+x)^2}{1+3x}\right) - \\ - (1-\xi)(1+2x) F\left(1/2, 2-\xi; 5/2; \frac{(1+x)^2}{1+3x}\right)$$

и сделаем тождественное преобразование

$$f(\xi) = \int_0^1 dx \frac{x^{-1/2-\xi}}{\sqrt{1+3x}} \phi(0) + \int_0^1 dx \frac{x^{-1/2-\xi}}{\sqrt{1+3x}} \cdot \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}.$$

Приведем несколько численных значений  $r_\sigma$  сигма-вклада в размерно-аналитической регуляризации: например, при  $\xi = 0.25$  получаем  $(r_\sigma) = -0.033$ ; при  $\xi = 0.4$  получаем  $(r_\sigma) = -0.01$ . Очевидно, что сигма вклад мал по сравнению с пионным вкладом и имеет другой знак, то есть уменьшает общий вклад. Отметим, что этот результат качественно тот же, что и в разделе 3.4 [155], где для  $A_\sigma$  было использовано полюсное приближение (см. выше). Таким образом, выводы раздела 3.4 о роли мезонных вкладов остаются в силе и для более точного приближения главной сингулярности, использованного в настоящем разделе.

В табл. 3.4 приведем значения поправок к массе кварка для нескольких характерных значений кирального конденсата [34].

Таблица 3.4

Поправки к массе кварка как  
функция параметра регуляризации

$c(M\text{эВ})$	$\xi$	$\delta m/m$
-210	0.432	-0.052
-220	0.385	-0.061
-230	0.346	-0.067
-240	0.312	-0.074
-250	0.284	-0.079

Рассмотрим вопрос о точности сделанных вычислений. Основным приближением, использованным нами при вычислении поправок к конденсату, является приближение главной сингулярности. Рассмотрим вопрос о роли остальных членов. В размерно-аналитической регуляризации оценить их роль

помогают простые выражения для амплитуд при  $\xi = 1/2$  ( см. выше). Напомним, что эти выражения являются точными. Вычисление по формулам (3.113)-(3.118) с использованием уравнения самосогласования показывает, что вклад не полюсных членов в киральный конденсат при  $\xi = 1/2$  равен нулю. Поскольку значения параметра  $\xi$  находятся вблизи этой точки, то мы можем утверждать, что и при  $\xi \neq 1/2$  их вклад невелик по сравнению с основным полюсным пионным вкладом.

### 3.5.5. Улучшенный выбор параметров

Вычисленные выше поправки к киральному конденсату и массе кварка позволяют нам уточнить параметры  $SU(2)$ -модели НИЛ. Мы модифицируем формулу для конденсата следующим образом:

$$\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)} = -\frac{m}{g}(1 + r(\xi)). \quad (3.129)$$

Формула для  $f_\pi$  ( см. выше, (3.105) ) остается прежней, поскольку поправки к амплитуде возникают в следующем порядке разложения среднего поля ( второй шаг итераций ). Роль массы кварка будет играть масса  $m_r$ :

$$m_r = m + \delta m, \quad (3.130)$$

где  $\delta m$  определяется формулами (3.111), (3.122) и (3.127).

В соответствии с формулой  $\kappa = \frac{g n_c m^2}{2\pi^2}$ , уравнениями (3.108), (3.129) и

(3.130) а также с формулой  $f_\pi^2 = \frac{\xi}{2g}$ , получим систему уравнений для

определения параметров модели с учетом поправок

$$\left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{c^3}{f_\pi^2} \cdot \frac{\xi}{1 + \frac{1}{8\xi}} \\ \frac{3}{4\pi^2} \frac{m^2}{f_\pi^2} \Gamma(1 + \xi) = 1, \\ m_r = m + \delta m \end{array} \right.$$

Значения  $\delta m$  можно определить из табл. 3.4. Значения параметров модели при  $n_c = 3$  для этого улучшенного выбора параметров даны в табл. 3.5.

В заключении отметим, что в размерно-аналитической регуляризации из-за совпадения знака мезонных вкладов в конденсате и знака конденсата главного приближения в этой регуляризации происходит стабилизация модели, что хорошо видно из табл. 3.5. Значения параметра регуляризации  $\xi$  увеличиваются по сравнению с соответствующими значениями главного приближения (см. табл. 3.3) и сдвигаются в область стабильности модели, т.е. в ту область, в которой сами эти вклады уменьшаются. Итак в размерно-аналитической регуляризации модель НИЛ стабильна относительно квантовых флуктуаций.

Таблица 3.5

Параметры  $SU(2)$ –модели с учетом поправок первого порядка в размерно-аналитической регуляризации: киральный конденсат  $c$ , динамическая масса кварка  $m_r$ , параметр регуляризации  $\xi$  и безразмерная константа связи  $\kappa$ .

$c$ (МэВ)	$m_r$ (МэВ)	$\xi$	$\kappa = \frac{3gm^2}{2\pi^2}$
-210	339	0.432	0.486
-220	336	0.385	0.434
-230	333	0.346	0.387
-240	330	0.312	0.334
-250	328	0.284	0.316

### Выводы по главе III

1. Исследована модель НИЛ с размерно – аналитической регуляризацией в следующем за главным порядке РСР. Получено уравнение ШД для производящего функционала функции Грина. В главном приближении и в первом порядке РСР получены уравнения для одночастичной функции Грина  $S$  (пропагатор) и для двухчастичной функции Грина  $S_2$  (четвереххвостка), а также поправку к пропагатору первого порядка  $S^{(1)}$ . Определены скалярная амплитуда (связная часть ампутированной двухчастичной функции)  $A_\sigma$  - соответствующая сигма-мезону и псевдоскалярная амплитуда  $A_\pi$  - соответствующая пиону.

2. Для модели НИЛ обсуждена размерно-аналитическая регуляризация на примере уравнения самосогласования.

3. В качестве меры мезонных вкладов в киральный конденсат кварка вычислено отношение конденсата первого  $\chi^{(1)}$  шага к конденсату главного

приближения  $\chi^{(0)}$ : 
$$r \equiv \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}}.$$

4. Аналогичные вычисления проведены как в  $U(1)$  - модели НИЛ, так и в модели НИЛ с симметрией  $SU(2)$  группы.

5. Согласно полученным нами результатам размерно-аналитическая регуляризация в модели НИЛ дает нам простые замкнутые формулы не только для скалярных амплитуд и распадной константы пиона, но и для пионного вклада в киральный конденсат.

6. Как следует из полученных нами результатов в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией вклад пиона в киральный конденсат довольно значителен и должен учитываться при выборе физических значений параметров модели.

7. Вместе с тем проведенное исследование показывает, что в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией учет следующего за главным порядком РСР не приводит к каким-либо патологиям в области

физических значений параметров, типа исчезновения параметра порядка ДНКС, или голдстоуновского бозона в духе работ [136, 166, 167].

8. Определены улучшенные параметры модели за счет поправок к киральному конденсату.

9. Помимо поправок к киральному конденсату, вычислены поправки к массе кварка. Выяснено, что поправка пиона в массу кварка в  $SU(2)$ -модели НИЛ равна нулю.