BIRCINS MAQNIT SAHƏSINDƏ DIRAK TƏNLIYININ SIMMETRIYA XASSƏLƏRI

V. H. Bədəlov

Fizika Problemləri İnstitutu, Bakı Dövlət Universiteti

Xarici sahə olmayan halda Dirak tənliyinin invariantlığı Dirak [1], Pauli [2], İbrahimov [3] və Fuşiç [4] tərəfindən müxtəlif metodlarla öyrənilmişdir. Fəza və zamanın kəsilməz çevirmələrindən başqa Dirak tənliyi qeyri-həndəsi çevrilmələrə nəzərən də invariantdır, yəni o gizli simmetriyaya malikdir. Lakin bütün bu invariantlıq qrupları əsasən müxtəlif metodlar vasitəsilə tapıldığından onlar qrup nöqteyi - nəzərdən Dirak tənliyinin simmetriya xassələrini tam əhatə etmirlər. Başqa sözlə hər bir işdə bu tənliyinin bu və ya başqa invariantlıq qrupu tapılmışdır.

Diferensial tənliklərin qrup analizi metodu tənliyin simmetriya xassələrini vahid nöqteyi - nəzərdən öyrənməyə imkan verir. Ona görə də Dirak tənliyin simmetriyası Li qrup-nəzəri metodunun köməyilə tam analizi [5]-də yenidən tədqiq edilmiş və invariantlıq cəbrinin aşkar şəkildə operatorları tapılmışdır. Belə ki, a) $m \neq 0$ halında 14 - parametrik və b) $m = 0$ halında isə 23 - parametrik sonlu invariantlıq qrupları alınmışdır [5].

Bu işdə xarici bircins maqnit sahəsində

$$A_x = -cBy \,, A_y = A_z = 0 \text{ və } \varphi = 0 \tag{1}$$

Dirak tənliyinin

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = c\vec{\alpha}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\psi + \beta mc^2\psi \tag{2}$$

və ona qoşma tənliyin

$$ih\frac{\partial \psi^+}{\partial t} = c\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)\psi^+\vec{\alpha} - mc^2\psi^+\beta \tag{3}$$

Li qrup-nəzəri metodunun köməyilə qrup xassələri tədqiq edilmiş və Li mənada bu tənlikləri invariant saxlayan daha geniş kəsilməz qrup çevrilmələrinin aşağıdakı invariantlıq cəbrləri alınmışdır:

1) $m \neq 0$ və $B \neq 0$ halında

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t};\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x};X_3 = \frac{\partial}{\partial z};X_4 = t\frac{\partial}{\partial z} + \frac{z}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2c}\psi_3\frac{\partial}{\partial \psi_1} - \frac{1}{2c}\psi_4\frac{\partial}{\partial \psi_2} + \frac{1}{2c}\psi_1\frac{\partial}{\partial \psi_3} -$$
$$-\frac{1}{2c}\psi_2\frac{\partial}{\partial \psi_4} + \frac{1}{2c}\psi_3^*\frac{\partial}{\partial \psi_1^*} - \frac{1}{2c}\psi_4^*\frac{\partial}{\partial \psi_2^*} + \frac{1}{2c}\psi_1^*\frac{\partial}{\partial \psi_3^*} - \frac{1}{2c}\psi_2^*\frac{\partial}{\partial \psi_4^*};$$
$$X_5 = \psi_1\frac{\partial}{\partial \psi_1} + \psi_2\frac{\partial}{\partial \psi_2} + \psi_3\frac{\partial}{\partial \psi_3} + \psi_4\frac{\partial}{\partial \psi_4};\ X_6 = \psi_1^*\frac{\partial}{\partial \psi_1^*} + \psi_2^*\frac{\partial}{\partial \psi_2^*} + \psi_3^*\frac{\partial}{\partial \psi_3^*} + \psi_4^*\frac{\partial}{\partial \psi_4^*}; \tag{4}$$
$$X_\infty = u_1\frac{\partial}{\partial \psi_1} + u_2\frac{\partial}{\partial \psi_2} + u_3\frac{\partial}{\partial \psi_3} + u_4\frac{\partial}{\partial \psi_4} + u_1^*\frac{\partial}{\partial \psi_1^*} + u_2^*\frac{\partial}{\partial \psi_2^*} + u_3^*\frac{\partial}{\partial \psi_3^*} + u_4^*\frac{\partial}{\partial \psi_4^*}\ .$$

Bu halda 6 - parametrik sonlu qrupda: X_1, X_2, X_3 operatorları (t,x,z) dəyişənlərində translyasiya qrupunun generatorları; X_4 opeatoru (t,z) dəyişənlərində Lorens fırlanmasının generatoru, X_5, X_6 isə miqyas çevirmələr qrupunun generatorlarıdır.

2) $m \neq 0$ və $B = 0$ halında isə [5]

$$
\begin{aligned}
&X_1=\frac{\partial}{\partial t};\ X_2=\frac{\partial}{\partial x};X_3=\frac{\partial}{\partial y};X_4=\frac{\partial}{\partial z};X_5=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}+\frac{i}{2}\psi_1\frac{\partial}{\partial\psi_1}-\frac{i}{2}\psi_2\frac{\partial}{\partial\psi_2}+\frac{i}{2}\psi_3\frac{\partial}{\partial\psi_3}-\\
&-\frac{i}{2}\psi_4\frac{\partial}{\partial\psi_4}-\frac{i}{2}\psi_1^*\frac{\partial}{\partial\psi_1^*}+\frac{i}{2}\psi_2^*\frac{\partial}{\partial\psi_2^*}-\frac{i}{2}\psi_3^*\frac{\partial}{\partial\psi_3^*}+\frac{i}{2}\psi_4^*\frac{\partial}{\partial\psi_4^*};X_6=z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{2}\psi_2\frac{\partial}{\partial\psi_1}+\\
&+\frac{1}{2}\psi_1\frac{\partial}{\partial\psi_2}-\frac{1}{2}\psi_4\frac{\partial}{\partial\psi_3}+\frac{1}{2}\psi_3\frac{\partial}{\partial\psi_4}-\frac{1}{2}\psi_2^*\frac{\partial}{\partial\psi_1^*}+\frac{1}{2}\psi_1^*\frac{\partial}{\partial\psi_2^*}-\frac{1}{2}\psi_4^*\frac{\partial}{\partial\psi_3^*}+\frac{1}{2}\psi_3^*\frac{\partial}{\partial\psi_4^*};\\
&X_7=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}+\frac{i}{2}\psi_2\frac{\partial}{\partial\psi_1}+\frac{i}{2}\psi_1\frac{\partial}{\partial\psi_2}+\frac{i}{2}\psi_4\frac{\partial}{\partial\psi_3}+\frac{i}{2}\psi_3\frac{\partial}{\partial\psi_4}-\frac{i}{2}\psi_2^*\frac{\partial}{\partial\psi_1^*}-\frac{i}{2}\psi_1^*\frac{\partial}{\partial\psi_2^*}-\\
&-\frac{i}{2}\psi_4^*\frac{\partial}{\partial\psi_3^*}-\frac{i}{2}\psi_3^*\frac{\partial}{\partial\psi_4^*};X_8=t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{x}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2c}\psi_4\frac{\partial}{\partial\psi_1}+\frac{1}{2c}\psi_3\frac{\partial}{\partial\psi_2}+\frac{1}{2c}\psi_2\frac{\partial}{\partial\psi_3}+\frac{1}{2c}\psi_1\frac{\partial}{\partial\psi_4}+\\
&+\frac{1}{2c}\psi_4^*\frac{\partial}{\partial\psi_1^*}+\frac{1}{2c}\psi_3^*\frac{\partial}{\partial\psi_2^*}+\frac{1}{2c}\psi_2^*\frac{\partial}{\partial\psi_3^*}+\frac{1}{2c}\psi_1^*\frac{\partial}{\partial\psi_4^*};X_9=t\frac{\partial}{\partial y}+\frac{y}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{i}{2c}\psi_4\frac{\partial}{\partial\psi_1}+\\
&+\frac{i}{2c}\psi_3\frac{\partial}{\partial\psi_2}-\frac{i}{2c}\psi_2\frac{\partial}{\partial\psi_3}+\frac{i}{2c}\psi_1\frac{\partial}{\partial\psi_4}+\frac{i}{2c}\psi_4^*\frac{\partial}{\partial\psi_1^*}-\frac{i}{2c}\psi_3^*\frac{\partial}{\partial\psi_2^*}+\frac{i}{2c}\psi_2^*\frac{\partial}{\partial\psi_3^*}-\frac{i}{2c}\psi_1^*\frac{\partial}{\partial\psi_4^*};\\
&X_{10}=t\frac{\partial}{\partial z}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2c}\psi_3\frac{\partial}{\partial\psi_1}-\frac{1}{2c}\psi_4\frac{\partial}{\partial\psi_2}+\frac{1}{2c}\psi_1\frac{\partial}{\partial\psi_3}-\frac{1}{2c}\psi_2\frac{\partial}{\partial\psi_4}+\frac{1}{2c}\psi_3^*\frac{\partial}{\partial\psi_1^*}-\\
&-\frac{1}{2c}\psi_4^*\frac{\partial}{\partial\psi_2^*}+\frac{1}{2c}\psi_1^*\frac{\partial}{\partial\psi_3^*}-\frac{1}{2c}\psi_2^*\frac{\partial}{\partial\psi_4^*};X_{11}=\psi_1\frac{\partial}{\partial\psi_1}+\psi_2\frac{\partial}{\partial\psi_2}+\psi_3\frac{\partial}{\partial\psi_3}+\psi_4\frac{\partial}{\partial\psi_4};\\
&X_{12}=\psi_1^*\frac{\partial}{\partial\psi_1^*}+\psi_2^*\frac{\partial}{\partial\psi_2^*}+\psi_3^*\frac{\partial}{\partial\psi_3^*}+\psi_4^*\frac{\partial}{\partial\psi_4^*};X_{13}=\psi_4^*\frac{\partial}{\partial\psi_4}-\psi_3^*\frac{\partial}{\partial\psi_2}-\psi_2^*\frac{\partial}{\partial\psi_3}+\psi_1^*\frac{\partial}{\partial\psi_4};\\
&X_{14}=\psi_4\frac{\partial}{\partial\psi_1^*}-\psi_3\frac{\partial}{\partial\psi_2^*}-\psi_2\frac{\partial}{\partial\psi_3^*}+\psi_1\frac{\partial}{\partial\psi_4^*};X_\infty=u_1\frac{\partial}{\partial\psi_1}+u_2\frac{\partial}{\partial\psi_2}+u_3\frac{\partial}{\partial\psi_3}+u_4\frac{\partial}{\partial\psi_4}+\\
&+u_1^*\frac{\partial}{\partial\psi_1^*}+u_2^*\frac{\partial}{\partial\psi_2^*}+u_3^*\frac{\partial}{\partial\psi_3^*}+u_4^*\frac{\partial}{\partial\psi_4^*}\ .
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Bu halda 14 - parametrik sonlu qrupda: $X_1, X_2, ..., X_{10}$ operatorları 10 - parametrik $P(3,1)$ Puankare qrupunun, $X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}$ operatorların xətti kombinasiyası olan $X_{13}' = X_{13} + X_{14}$; $X_{14}' = i(X_{13} - X_{14}); X_{12}' = -i(X_{11} - X_{12})$ fırlanma və $X_{11}' = X_{11} + X_{12}$ operatoru isə miqyas çevirməsi qrupunun generatorlarıdır.

Qeyd edək ki, (4) və (5) ifadələrinə əsasən xarici bircins maqnit sahəsində Dirak tənliyinin invariantlıq cəbri sonsuz ölçülü Li cəbridir və bu (2) - (3) tənliklərin xəttiliyi ilə əlaqədardır. Sonsuz ölçülü Li cəbrnii ifadə edən operator X_∞ - dir və ona uyğun bütün sonlu çevirmələr ümumi şəkildə aşağıdakı kimidir:

$$\psi_i' = \psi_i + u_i \text{ və } \psi_i^{*'} = \psi_i^* + u_i^* \ (i = 1, 2, 3, 4),$$

burada u_i və u_i^* uyğun olaraq (2) və (3) tənliklərin ixtiyari həlləridir.

ƏDƏBİYYAT

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. London A **155,** 447 (1936).
[2] W. Pauli, Nuovo Cim. **6,** 204 (1957).
[3] Н. Х. Ибрагимов, ДАН СССР **185,** 1225 (1969).
[4] В. И. Фущич, А. Г. Никитин, ЭЧАЯ **14**, 6 (1983).
[5] V. H. Bədəlov, Dirak tənliyinin simmetriyası, “Fizikanın aktual problemləri” III Respublika elmi konfransı, s. 18, 2004.